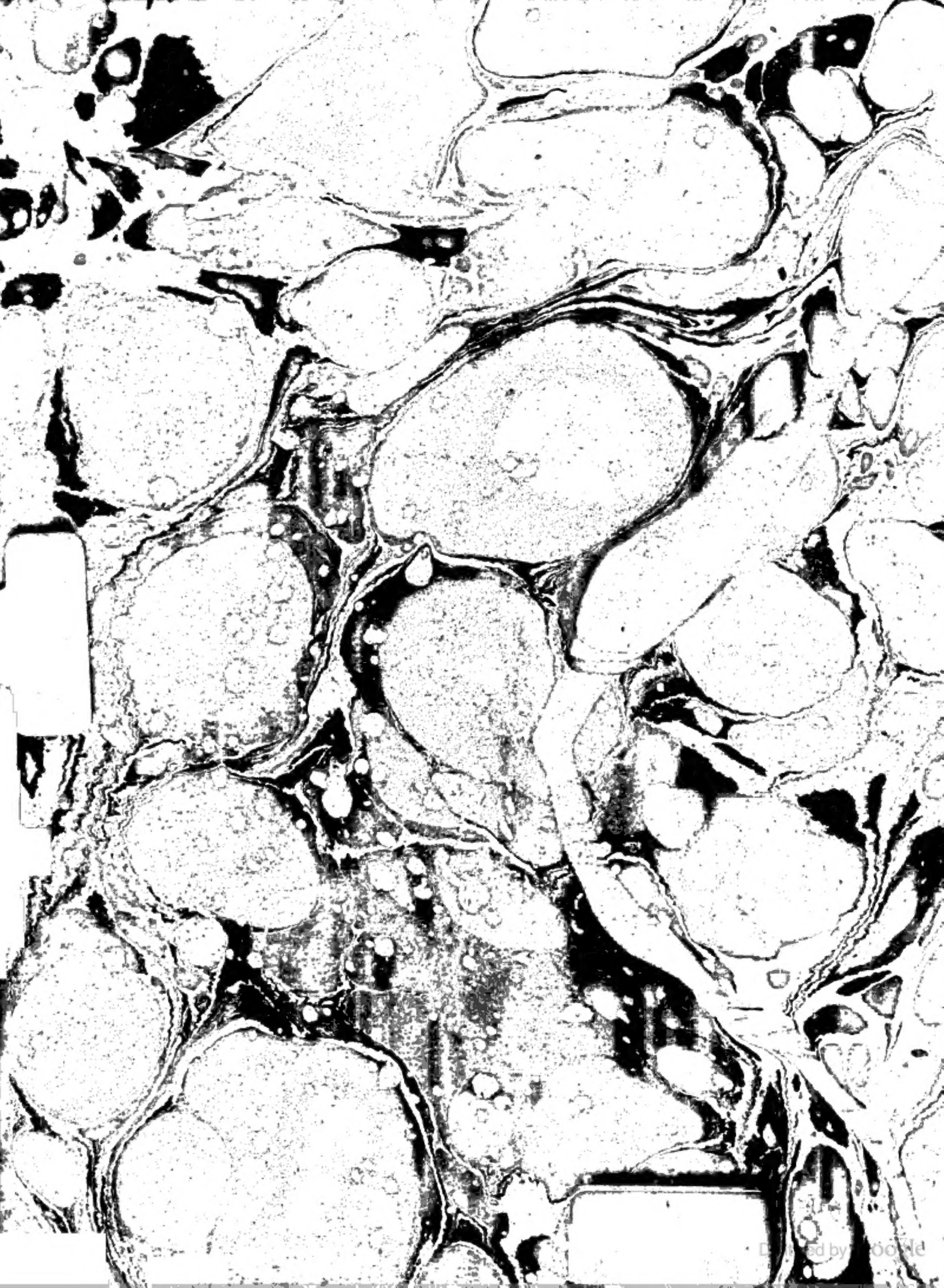
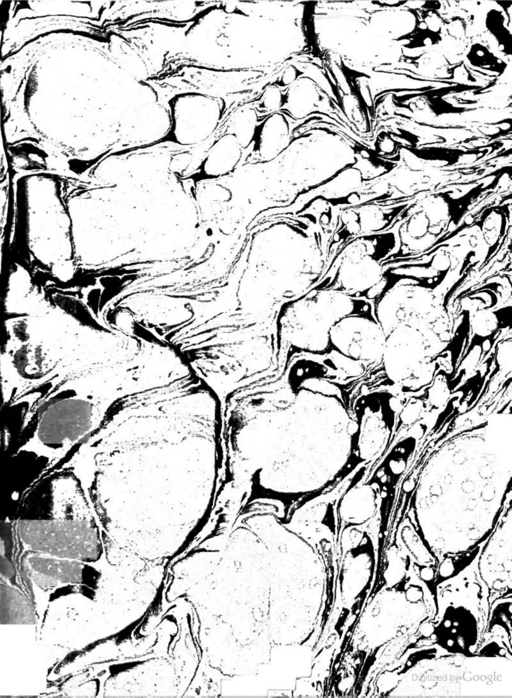




JOHANNIS
BERNOULLI,

M. D. MATHESEOS PROFESSORIS,
Regiarum Societatum PARISIENSIS, LONDINENSIS, PETROPOLITANÆ, BEROLINENSIS, *Socii* &c.

OPERA OMNIA,

TAM ANTEA SPARSIM EDITA,
quam hactenus inedita.

TOMUS QUARTUS,

Quo continentur

ΑΝΕΚΔΟΤΑ.



LAUSANNÆ & GENEVÆ,
Sumptibus MARCI-MICHAELIS BOUSQUET & Sociorum.

MDCCXLII.



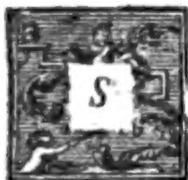


JOHANNIS BERNOULLI
OPERA
ANEKΔOTA.

ANALYTICA.

****

N°. CL.
DE SERIEBUS VARIA.
PROPOSITIO I.
PROBLEMA.



Eriei fractionum, quarum numeratores & denominatores arithmetice sint progressionales, invenire terminum infinitesimum.

Sit Series $\frac{a}{c}$, $\frac{a+b}{c+e}$, $\frac{a+2b}{c+2e}$, $\frac{a+3b}{c+3e}$, ... $\frac{a+mb}{c+me}$, &c. Si itaque pro numero infinito ponatur n, erit terminus infinite-

A 3. simus

ſimus $= \frac{a+nb}{c+ne}$. Sit ille $= x$. Ergo $cx + nex = a + nb$, & $cx - a = nb - nex$: Dividendo per $b - ex$, erit $n = \frac{cx-a}{b-ex}$. Quia autem numerator hujus fractionis eſt finitus [nam infinitus eſſe non poteſt, alias x deberet eſſe æqualis infinito, ideoque eſſet $b - ex$ negativa quantitas; ergo etiam $\frac{cx-a}{b-ex}$; quod eſt abſurdum,] erit $b - ex = 0$, proinde $b = ex$, & $x = b : e$. Hic itaque eſt terminus infiniteſimus. *Q. E. I.*

PROPOSITIO II.

PROBLEMA.

Seriei infinitæ fractionum, quarum numeratores ſint arithmetice, denominatores geometrice progreſſionales, invenire ſummam.

Sit $a : c$ primus terminus, b communis differentia numeratorum, e ratio in qua creſcunt denominatores; fiet itaque hæc progreſſio $\frac{a}{c} + \frac{a+b}{ce} + \frac{a+2b}{cee} + \frac{a+3b}{ce^3}$, &c. hujus progreſſionis ſumma ita invenitur: Dividantur primo numeratores in ſuas partes, ut fiat $\frac{a}{c} + \frac{a+b}{ce} + \frac{a+b+b}{cee} + \frac{a+b+b+b}{ce^3}$ &c. poteſt autem hæc progreſſio in alias infinitas pure geometricas reſolvi, videlicet in has *A*, *B*, *C*, *D*, &c.

A, $\frac{a}{c} + \frac{a}{ce} + \frac{a}{cee} + \frac{a}{ce^3}$ &c. ſumma eſt $\frac{ae}{ce-c}$

B .... $\frac{b}{ce} + \frac{b}{cee} + \frac{b}{ce^3}$ &c. ſumma $\frac{b}{ce-c}$

C .... $\frac{b}{cee} + \frac{b}{ce^3}$ &c. ſumma $\frac{b}{cee-ce}$

D .... $\frac{b}{ce^3}$ &c. ſumma $\frac{b}{ce^3-cee}$

quarum ſummæ, juxta vulgarem regulam, inveniri poſſunt. Summæ autem Serierum *B*, *C*, *D*, &c. à ſerie *B* incipientium conſti-

constituunt aliam Seriem infinitam geometricam [ut ex operatione patet], cujus Seriei summæ, si addatur summa Seriei *A*, habebitur summa summarum, seu summa Seriei propositæ: Ergo summæ Serierum *B*, *C*, *D*, constituunt hanc Seriem geometricam $\frac{b}{ce-c}+\frac{b}{cee-ce}+\frac{b}{ce^3-cee}$ &c. cujus summæ $\frac{be}{cee-2ce+c}$ addatur summa Seriei $A=\frac{ae}{ce-c}$, & habebitur $\frac{aee-ae+be}{cee-2ce+c}$ $=$ summæ Seriei propositæ. *Q. E. F.*

PROPOSITIO III.

PROBLEMA.

Seriei hujus $\frac{a}{b\times(b+c)}+\frac{a}{(b+c)\times(b+2c)}+\frac{a}{(b+2c)\times(b+3c)}$ &c. *summam invenire.*

Hæc Series ex hac $\frac{a}{b}+\frac{a}{b+c}+\frac{a}{b+2c}+\frac{a}{b+3c}$ resolvi potest hoc modo: $\frac{a}{b}=\frac{a}{b+c}+\frac{ac}{b\times(b+c)}$; $\frac{a}{b+c}=\frac{a}{b+2c}$ $+\frac{ac}{(b+c)\times(b+2c)}$; $\frac{a}{b+2c}=\frac{a}{b+3c}+\frac{ac}{(b+2c)\times(b+3c)}$ &c. Ergo $\frac{a}{b}+\frac{a}{b+c}+\frac{a}{b+2c}+\frac{a}{b+3c}$ &c. $=\frac{a}{b+c}+\frac{a}{b+2c}$ $+\frac{a}{b+3c}+$ &c. $+\frac{ac}{b\times(b+c)}+\frac{ac}{(b+c)\times(b+2c)}+\frac{ac}{(b+2c)\times(b+3c)}$; ideoque $\frac{a}{b}=\frac{ac}{b\times(b+c)}+\frac{ac}{(b+c)\times(b+2c)}+\frac{ac}{(b+2c)\times(b+3c)}+$ &c. & $\frac{a}{bc}=\frac{a}{b\times(b+c)}+\frac{a}{(b+c)\times(b+2c)}+\frac{a}{(b+2c)\times(b+3c)}+$ &c.

COROLLARIUM I.

Hinc si Series proposita sit finita, & numerus terminorum $=m$, erit omnium summa $=\frac{ma}{bb+mbc}$. Hoc patet ex operatione.

COROL-

COROLLARIUM II.

Si proponatur Series fractionum, cujus numeratores sint æquales; denominatores vero numeri trigonales $\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \frac{1}{21}$, &c. summa sic investigabitur. Ponatur $a = b = c = 1$; habebitur ergo per Prop. hanc, summa Seriei $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}$ &c. $= 1$. Hæc Series autem est subdupla illius, quia hujus denominatores sunt dupli illius: Ergo illius summa est 2. Summa propositæ Seriei finitæ est $= \frac{2ma}{bb + mbc} = \frac{2m}{1 + m}$.

COROLLARIUM III.

Sequitur ex his, progressionis harmonicæ $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ &c. summam esse infinitam; nam ob

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \text{\&c.} = 1$$
$$\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \text{\&c.} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \text{\&c.} = \frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{20} + \text{\&c.} = \frac{1}{4}$$

erit $\frac{1}{2} + \frac{2}{6} + \frac{3}{12} + \frac{4}{20} +$ &c. vel, fractionibus ad minimos terminos redactis, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} +$ &c. $= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} +$ &c. Quod si utriusque progressionis summa esset finita, sequeretur totum æquale esse suæ parti: nam prior incipit a posterioris termino secundo. Ergo summa est infinita. *Q. E. D.*

PROPOSITIO IV.

THEOREMA.

Seriei $\frac{2b + c}{b^2 \times (b + c)^2} + \frac{2b + 3c}{(b + c)^2 \times (b + 2c)^2} + \frac{2b + 5c}{(b + 2c)^2 \times (b + 3c)^2} +$ &c. *summa* $= \frac{1}{bbc}$.

Demons-

Demonſtratio hujus deducitur ut ſupra, ex progreſſione

$$\frac{1}{b^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(b+2c)^2}+\frac{1}{(b+3c)^2}+\text{\&c.}$$

COROLLARIUM.

$$\frac{3}{1^2}+\frac{5}{3^2}+\frac{7}{6^2}+\frac{9}{10^2}+\text{\&c.}=4;$$

$$\frac{1}{(4-1)^2}+\frac{2}{(16-1)^2}+\frac{3}{(36-1)^2}+\frac{4}{(64-1)^2}+\frac{5}{(100-1)^2}=\frac{1}{8}$$

PROPOSITIO V.

THEOREMA.

Seriei $\frac{1a}{1\times2}+\frac{2a}{1\times2\times3}+\frac{3a}{1\times2\times3\times4}+\frac{4a}{1\times2\times3\times4\times5}+\text{\&c.}$ *ſumma eſt* $=a$.

Demonſtratio hujus deſumitur ab hac Serie $\frac{a}{1}+\frac{a}{1\times2}+\frac{a}{1\times2\times3}+\frac{a}{1\times2\times3\times4}+\text{\&c.}$ ut in Propoſitione penultima factum.

COROLLARIUM.

Hinc $\frac{1}{1\times2}+\frac{4}{1\times2\times3}+\frac{9}{1\times2\times3\times4}+\text{\&c.}=\frac{1}{1}+\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{1\times2\times3\times4}+\text{\&c.}$

Nam reſolvatur prior hoc modo

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{2}{1\times2\times3}+\frac{3}{1\times2\times3\times4}+\text{\&c.}=1=\frac{1}{1}$$

$$\frac{2}{1\times2\times3}+\frac{3}{1\times2\times3\times4}+\text{\&c.}=\frac{1}{2}=\frac{1}{1\times2}$$

$$\frac{3}{1\times2\times3\times4}+\text{\&c.}=\frac{1}{6}=\frac{1}{1\times2\times3}$$

&c. &c.

Q. E. D.

PROPOSITIO VI.

PROBLEMA.

Aliarum Serierum summam invenire:

$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\frac{1}{256}+$ &c. $=2$.

subtrahatur $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}$ &c. $=\frac{4}{3}$. Ergo $\frac{1}{4}+\frac{3}{16}+\frac{7}{64}+\frac{15}{256}+$ &c. $=\frac{2}{3}$ ☉. Loco subtrahendi addatur hæc Series $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+$ &c. $=\frac{4}{3}$, proveniet $\frac{2}{1}+\frac{3}{4}+\frac{5}{16}+\frac{9}{64}+$ &c. $=\frac{10}{3}$ ☽. Ubi notandum quod in Serie ☉ inventa, numeratores sint in ratione dupla aucta unitate; in ☽ vero inventa in eadem ratione sed diminuta unitate.

$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}+\frac{1}{729}+$ &c. $=\frac{3}{2}$.

Subtrahatur $\frac{1}{1}+\frac{1}{9}+\frac{1}{81}+\frac{1}{729}+$ &c. $=\frac{9}{8}$ prodibit $\frac{2}{9}+\frac{8}{81}+\frac{26}{729}+$ &c. $=\frac{3}{8}$ ☿; si vero addatur $\frac{1}{1}+\frac{1}{9}+\frac{1}{81}+$ &c. $=\frac{9}{8}$, proveniet $\frac{2}{1}+\frac{4}{9}+\frac{10}{81}+\frac{28}{729}+$ &c. $=\frac{21}{8}$ ♀; ubi iterum advertitur, quod numeratores in Serie ☿ sint in ratione tripla aucta binario, in ♀ vero in eadem ratione sed eodem numero diminuta.

PROPOSITIO VII.

Potest inveniri ratio quam habent summæ (etiamsi incognitæ) duarum Serierum.

Ex. gr. hoc modo: Series sequens

$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}$ &c. æquatur suis

partibus

partibus, videlicet Seriebus $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+$ &c. $=2$, & $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+$ &c. $=\frac{2}{3}$, & $\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{40}+$ &c. $=\frac{2}{5}$; & $\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}+\frac{1}{56}+$ &c. $=\frac{2}{7}$, & ita consequenter. Erit ergo $\frac{2}{1}+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{2}{7}+\frac{2}{9}$ &c. $=$ Seriei propositæ $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ &c., ideoque $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}$ &c., dimidia est Seriei propositæ. Ex quo rursum patet Seriem propositam esse infinitam, nam quia $\frac{1}{1}<\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}<\frac{1}{4}$ & $\frac{1}{5}<\frac{1}{6}$ &c. erit $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+$ &c. $<\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}$ &c. Ergo si proposita Series esset finita, sequeretur $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+$ &c. non esse æqualem dimidiæ Seriei propositæ. Quod est absurdum.

Eodem modo, si proponatur Series $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}+$ &c. $=$ Seriebus $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}$ &c. $=\frac{4}{3}$ & $\frac{1}{9}+\frac{1}{36}+\frac{1}{144}$ &c. $=\frac{4}{3\times 9}$ & $\frac{1}{25}+\frac{1}{100}+\frac{1}{400}+$ &c. $=\frac{4}{3\times 25}$ &c. Ergo $\frac{4}{3\times 1}+\frac{4}{3\times 9}+\frac{4}{3\times 25}+\frac{4}{3\times 49}$ &c. $=\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+$ &c. ideoque, multiplicando per 3, $\frac{4}{1}+\frac{4}{9}+\frac{4}{25}+\frac{4}{49}+$ &c. $=\frac{3}{1}+\frac{3}{4}+\frac{3}{9}+\frac{3}{16}+\frac{3}{25}+$ &c. ablatis æqualibus $\frac{1}{1}+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+$ &c. $=\frac{3}{4}+\frac{3}{16}+\frac{3}{36}+$ &c. Ergo summa terminorum imparium Seriei propositæ est ad summam terminorum parium ut 3 ad 1.

Si denominatores Seriei propositæ essent cubi numerorum naturalium; inveniretur summam imparium terminorum esse ad summam parium ut 7 ad 1.

Generaliter: Si denominatores sint quæcunque potestas numerorum naturalium; erit summa terminorum imparium ad summam parium ut eadem potestas diminuta unitate ad unitatem.

PROPOSITIO VIII.

PROBLEMA.

Seriei, cujus numeratores sint in progressione geometrica aucta communi quadam quantitate, denominatores vero in quacunque alia majore progressione geometrica, summam invenire.

Sit primus terminus $\frac{a}{e}$, ratio in qua ascendunt numeratores & denominatores sit $\frac{c}{m}$, communis quantitas b; procreabitur itaque hæc Series $\frac{a}{e} + \frac{ac+b}{em} + \frac{acc+bc+b}{emm} + \frac{ac^3+bcc+bc+b}{em^3}$ &c. cujus summa invenitur resolvendo hanc Seriem in alias

$$\frac{a}{e} + \frac{ac}{em} + \frac{acc}{emm} + \frac{ac^3}{em^3} \text{ &c.} = \frac{am}{em - ec}$$

$$\frac{b}{em} + \frac{bc}{emm} + \frac{bcc}{em^3} \text{ &c.} = \frac{b}{em - ec}$$

$$\frac{b}{emm} + \frac{bc}{em^3} \text{ &c.} = \frac{b}{emm - emc}$$

$$\frac{b}{em^3} \text{ &c.} = \frac{b}{em^3 - ecmm}$$

&c. &c.

quarum summæ, omissa tantisper prima, constituunt hanc Seriem geometricam $\frac{b}{em - ec} + \frac{b}{emm - ecm} + \frac{b}{em^3 - ecmm}$ &c. quæ est æqualis $\frac{bm}{emm - ecm - em - ec}$. Addatur prima $\frac{am}{em - ec}$; provenit $\frac{amm - am + bm}{emm - ecm - em + ec}$ = summæ Seriei propositæ.

PRO-

PROPOSITIO IX.

THEOREMA.

Summa Seriei $\sqrt{}(2+\sqrt{}(2+\sqrt{}(2+\sqrt{}(2+\sqrt{}(2\ \&c.)))))$ *eſt* $=2$.

Sit ſi poteſt $=2+a$: Ergo eorum quadrata erunt æqualia, id eſt, $4+4a+aa=2+\sqrt{}(2+\sqrt{}(2+\sqrt{}(2+\sqrt{}(2\ \&c.))))$: Ergo [ſubtractis utrinque æqualibus] $2+4a+aa=\sqrt{}(2+\sqrt{}(2+\sqrt{}(2+\sqrt{}(2\ \&c.))))=2+a$. *Quod eſt abſurdum.*

Si nunc dicatur eſſe æqualem $2-a$; erit ergo $4-4a+aa$ $=2+\sqrt{}(2+\sqrt{}(2+\sqrt{}(2+\sqrt{}(2\ \&c.))))$ & [ſubtractis utrinque æqualibus] $2-4a+aa=\sqrt{}(2+\sqrt{}(2+\sqrt{}(2+\sqrt{}(2\ \&c.))))$ $=2-a$, ideoque tranſponendo & dividendo per a, erit $a=3$, & ſupra $2>a$, quæ repugnant; quin potius ſumma Seriei propoſitæ eſt $=2$. *Q. E. D.*

COROLLARIUM.

Eodem modo demonſtratur $\sqrt{}(6+\sqrt{}(6+\sqrt{}(6+\sqrt{}(6\ \&c.))))$ $=3$, & $\sqrt{}(12+\sqrt{}(12+\sqrt{}(12+\sqrt{}(12\ \&c.))))=4$, & $\sqrt{}(20+\sqrt{}(20+\sqrt{}(20+\sqrt{}(20\ \&c.))))=5$ &c. Et generaliter $\sqrt{}(a+\sqrt{}(a+\sqrt{}(a+\sqrt{}(a+\sqrt{}(a+\&c.)))))$ ſumma ita invenitur. Ponatur ſumma æqualis x: Ergo ipſorum quadrata æquantur $xx=a+\sqrt{}(a+\sqrt{}(a+\sqrt{}(a+\sqrt{}(a\ \&c.))))$: aufer utrinque æqualia, remanebit $xx-a=\sqrt{}(a+\sqrt{}(a+\sqrt{}(a+\sqrt{}(a\ \&c.))))=x$, proinde $xx=x+a$ & $x=\frac{1}{2}+\sqrt{}(\frac{1}{4}+a)$.

Hinc ſi ſeries ita proponatur $\sqrt[3]{}(a+\sqrt[3]{}(a+\sqrt[3]{}(a+\sqrt[3]{}(a\ \&c.))))$; ſumma ita invenitur. Ponatur $=x$: ergo $x^3-a=\sqrt[3]{}(a+\sqrt[3]{}(a+\sqrt[3]{}(a+\sqrt[3]{}(a\ \&c.))))=x$; proinde $x^3-x-a=0$ & univerſaliter $\sqrt[n]{}(a+\sqrt[n]{}(a+\sqrt[n]{}(a+\sqrt[n]{}(a\ \&c.))))$ pro æquatione habebitur $x^n-x-a=0$.

PROPOSITIO X.

THEOREMA.

Si sint duæ Series figuratæ immediate sibi subsequentes, & sit ubique summa terminorum primæ ad totidem maximo æqualium ut 1 *ad* r; *erit & ubique summa terminorum secundæ ad totidem maximo æqualium ut* 1 *ad* r + 1.

Est enim per naturam Serierum figuratarum, & per hypothesin:

$$n\left\{\begin{array}{lll} a\ldots o & & \\ \vdots\quad\ \vdots & & \\ b\ldots f & & \\ c\ldots g & & \\ d\ldots h & & \\ e\ldots i & & \\ \quad\ \ k & & \end{array}\right. \quad k+i+h+g+f \ldots +o = \frac{ne}{r} + \frac{(n-1)d}{r} + \frac{(n-2)c}{r} + \frac{(n-3)b}{r} \ldots\ldots + \frac{(n-n+1)a}{r}$$

$$= (\text{connexis homologis}) \frac{n.(e+d+c+b\ldots+a)}{r} \frac{-1d-2c-3b\ldots-n(+1)a}{r} = (\text{per naturam Serierum}) \frac{nk-i-h-g-f\ldots-o}{r},$$

ideoque $rk + r(i + h + g + f\ldots\ldots + o) = nk - i - h - g - f\ldots\ldots - o$. & reducta æquatione invenitur $nk - rk = (r+1)(i+h+g+f\ldots\ldots+o)$; dividatur utrumque per $r+1$, addaturque dein utrique k, habebitur $\frac{(n+1).k}{r+1} = k+i+h+g+f\ldots\ldots+o$. &c. *Q. E. D.*

COROLLARIUM.

Patet hinc cujuslibet Seriei figuratæ quamlibet summam terminorum habere ad totidem maximo æqualium rationem constantem. Series enim unitatum, quæ est prima omnium figuratarum, habet hanc proprietatem requisitam; sequitur itaque ex Propositione secundam Seriem eandem proprietatem habere; & ex secunda demonstratur, tertiam; ex tertia, quartam; ex quarta, quintam &c; & ita consequenter omnes in infinitum usque. *Q. E. D.*

PRO-

PROPOSITIO XI.

THEOREMA.

Esto numerus quilibet n datus, & fractio qualibet assumta $\frac{a}{b}$, *ex qua formetur hac altera* $\frac{b}{(n-1)a+2b}$, *& ex hac formetur eadem lege tertia* $\frac{(n-1)a+2b}{(n-1)b+2(n-1)a+4b}$, *ex tertia quarta, & sic deinceps, considerato scilicet semper numeratore ut a & denominatore ut b; erit terminus infinitesimus* $\frac{1}{1+\sqrt{n}}=\frac{-1+\sqrt{n}}{-1+n}$.

Cum enim terminus infinitesimus suo proximo termino seu sequenti censeatur æqualis, esto terminus infinitesimus $\frac{x}{y}$; ergo sequens ex natura Seriei erit $\frac{y}{(n-1)x+2y}$; adeoque $\frac{x}{y}=\frac{y}{(n-1)x+2y}$; reducatur æquatio & habebitur $y=x+x\sqrt{n}$, unde $\frac{x}{y}=\frac{x}{x+x\sqrt{n}}=\frac{1}{1+\sqrt{n}}=\frac{-1+\sqrt{n}}{-1+n}$. *Q. E. D.*

COROLLARIUM.

Hinc patet ratio extrahendi commodissime radicem quadratam numeri propositi n, per approximationem continuam: Incipiatur namque a quacunque fractione $\frac{a}{b}$, & continuetur Series, servata lege in Propositione exhibita, donec termini se mutuo insequentes sensibiliter non differant, vocetur unus ex illis V, erit ergo $V=$ (quam proxime) $\frac{1}{1+\sqrt{n}}=\frac{-1+\sqrt{n}}{-1+n}$, unde $\sqrt{n}=\frac{1-V}{V}=(n-1)V+1$.

ALITER.

Ponatur $\frac{a}{b} = \frac{(n+1)ab}{aa+bb}$, & reliqua fiant ut ante; dabit terminus infinitesimus hujus Seriei $\frac{a}{b}$, $\frac{(n+1)ab}{aa+bb}$, &c. immediate radicem quæsitam $\sqrt{n}$.

Simili modo extrahitur radix cubica ex numero dato n: ponendo scil. $\frac{a}{b} = \frac{(n+1)abb}{a^3+b^3}$; imo & cujuscunque potestatis p, hoc modo $\frac{a}{b} = \frac{(n+1)ab^{p-1}}{a^p+b^p}$.

ADHUC ALITER ET FACILIUS.

Fiat $\frac{a}{b} = \frac{a^{p-1}+nb^{p-1}}{(a+b)a^{p-2}}$; erit ultima fractio radix potestatis p ex numero n.

N°. CLI.

METHODUS

Exhibendi summas progressionum finitarum per numerorum naturalium quamcunque potentiam datam procedentium; imo cujusvis alterius progressionis finitæ constantis terminis utcunque complicatis, modo contineant quantitates rationales & integras.

Sit ex. gr. progressio quadratorum $1+4+9+16 \ldots\ldots +mm$, cujus summa quæritur. Hæc ponatur esse $am^3+bmm+cm$ (per a, b, c, intelligo coëfficientes incognitos ipsarum m^3, mm, m). Aucto nunc numero terminorum unitate, habebitur, ponendo ubique $m+1$ loco m, in assumta quantitate $am^3+bmm+cm$, hæc

$+cm$, hæc altera
$$\begin{aligned} am^3 &+ 3amm + 3am + a \\ &+ bmm + 2bm + b \\ &+ cm + c \end{aligned}$$

quæ per consequens æqualis esse debet expositæ progressioni, una cum termino post mm sequenti, qui est $mm + 2m + 1$; ideoque erit æquatio inter quantitatem hanc ex assumta generatam & inter ipsam assumtam, auctam termino post mm sequenti, $mm + 2m + 1$. Hinc si æquatio ad o redigatur; observata terminorum homogeneitate habebitur

$$\left.\begin{aligned} +3amm &+ 3am + a \\ -1mm &+ 2bm + b \\ &- 2m + c \\ &\quad -1 \end{aligned}\right\} = 0$$

Singulos ergo terminos æquando o, reperitur $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{6}$; & per consequens $am^3 + bmm + cm$, id est $1 + 4 + 9 + 16 \ldots\ldots\ldots + mm$ est $= \frac{1}{3}m^3 + \frac{1}{2}mm + \frac{1}{6}m = \frac{2m^3 + 3mm + m}{6} = \frac{2m^3 + 3mm + m}{1.\,2.\,3}$. Sit nunc generaliter potentia numerorum naturalium n, & quæratur summa progressionis finitæ $1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n \ldots\ldots + m^n$. Assumatur ergo itidem hæc quantitas [pro quæsita summa] $am^{n+1} + bm^n + cm^{n-1} + dm^{n-2} +$ &c. & augeatur unitate numerus terminorum m; unde provenit

$$\begin{aligned} am^{n+1} + (n+1)am^n &+ \frac{(n+1).n}{1.\,2}am^{n-1} + \frac{(n+1).n.(n-1)}{1.\,2.\,3.}am^{n-2}, \text{ \&c.} \\ + \quad bm^n &+ \quad n.\,bm^{n-1} + \frac{n.(n-1)}{1.\,2}\,bm^{n-2}, \text{ \&c.} \\ &+ \quad cm^{n-1} + \quad (n-1)\,cm^{n-2}, \text{ \&c.} \\ &\qquad\qquad + \quad dm^{n-2}, \text{ \&c.} \end{aligned}$$

$$= am^{n+1} + bm^{n} + cm^{n-1} + dm^{n-2} + \&c.$$
$$+ m^{n} + nm^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.\,2.} m^{n-2}$$
$$+ \frac{n.(n-1).(n-2)}{1\ 2.\ 3} m^{n-3} + \&c.$$

Æquatione reducta ad o, & observata homogeneitate terminorum, oritur

$$\left.\begin{array}{l} +(n+1).\,am^{n} + \frac{(n+1).\,n}{1.\,2}\, am^{n-1} + \frac{(n+1).n.(n-1)}{1.\,2.\,3}\, am^{n-2} + \&c. \\ -1\,m^{n} \qquad + nbm^{n-1} + \frac{n.(n-1)}{1.\,2}\, bm^{n-2} + \&c. \\ \qquad\qquad - nm^{n-1} + (n-1)\, cm^{n-2} + \&c. \\ \qquad\qquad\qquad - \frac{n.(n-1)}{1.\,2}\, m^{n-2} + \&c. \end{array}\right\} = 0$$

Singulis itaque terminis cum o æquatis, innotescent coëfficientes.

$$a = \frac{1}{n+1}$$
$$b = 1 - \frac{n+1}{1.\,2} a$$
$$c = \frac{n}{1.\,2} - \frac{(n+1).\,n}{1.\,2.\,3} a - \frac{n}{1.\,2} b$$
$$d = \frac{n.(n-1)}{1.\,2.\,3} - \frac{(n+1).n.(n-1)}{1.\,2.\,3.\,4} a - \frac{n.(n-1)}{1.\,2.\,3} b - \frac{n-1}{1.\,2} c$$
$$e = \frac{n.(n-1).(n-2)}{1.\,2.\,3.\,4} - \frac{(n+1).n.(n-1).(n-2)}{1.\,2.\,3.\,4.\,5} a - \frac{n.(n-1).(n-2)}{1.\,2.\,3.\,4} b$$
$$- \frac{(n-1).(n-2)}{1.\,2.\,3} c - \frac{n-2}{1.\,2} d,$$

&c.

quibus explicitis, erit

$$a = \frac{1}{n+1}$$
$$b = \frac{1}{2}$$
$$c = \frac{n}{3.\,4}$$
$$d = 0$$

$e =$

$e = -\frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3.4.5.6}$

$f = 0$

$g = \frac{n.(n-1).(n-2).(n-3).(n-4)}{1.2.3.4.5.6.7.6}$

$h = 0$

$i = -\frac{3n.(n-1).(n-2).(n-3).(n-4).(n-5).(n-6)}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}$

$k = 0$

$l = \frac{5n.(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.6}$

$m = 0$

&c.

EXEMPLUM.

Quæritur ſumma omnium numerorum integrorum ad decimam poteſtatem elevatorum, quorum radices in millenario continentur; id eſt: quæritur ſumma hujus progreſſionis $1^{10} + 2^{10} + 3^{10} + 4^{10} + 5^{10} \ldots\ldots + 1000^{10}$. Hoc in caſu, cum ſit $n = 10$, & $m = 1000$, erunt $a = \frac{1}{11}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{5}{6}$, $d = 0$, $e = -1$, $f = 0$, $g = 1$, $h = 0$, $i = -\frac{1}{2}$, $k = 0$, $l = \frac{5}{66}$, adoque ſumma totius progreſſionis erit $=\ldots$ $= 91,409,924,241,424,243,424,241,924,242,500$.

COROLLARIUM.

Si n eſt numerus negativus vel fractio; ſumma acquiret terminos infinitos. Hinc licet numeros irrationales plures ex. gr. $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} \ldots\ldots + \sqrt{1000}$; per unicam Seriem conſtantem terminis mere rationalibus exprimere; cum alioquin unuſquiſque numerus irrationalis peculiarem poſcat legem.

N°. CLII.

Summatio Seriei $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2}$ &c.

seu $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} +$ &c.

I.

LEIBNITIUS ostendit per methodum, quam dedit in *Actis Lipf. 1693*, p. 180, dato arcu circuli x, fore finum y [fumto radio vel finu toto $= 1$] expreffum per hanc Seriem $y = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \frac{x^7}{2.3\ldots7} +$ &c. Quam eandem Seriem anno fequenti 1694, p. 438, & 439 *, inveni per aliam methodum univerfalem; Et anno 1722, p. 398, eorund. *Actor.*† adhuc per aliam methodum, & quidem fine adminiculo Calculi differentialis.

II.

Quod fi jam detur y, palam eft, infinitos effe valores ipfius x eidem y refpondentes, ob infinitos infinitarum dimenfionum terminos ipfius x; quot nimirum funt radices in hac æquatione dimenfionis infinitæ $x - \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1}{2.3.4.5}x^5 - \frac{1}{2.3\ldots7}x^7 +$ &c. $- y = 0$. Cujus fingulæ radices, totidem arcus exhibentes, eidem finui y refpondent.

III.

Sit nunc finus y infinite parvus, feu $= 0$, erit utique primus arcus x finui y æqualis, feu etiam $= 0$, ipfaque æquatio, divifa per x, abibit in hanc $1 - \frac{1}{2.3}xx + \frac{1}{2.3.4.5}x^4 - \frac{1}{2.3\ldots7}x^6 +$ &c. $= 0$. Liquet autem, præter arcum illum initialem infinite parvum feu o, qui, divifa æquatione per x, jam eft fequeftra-

* N°. XXI. pag. 127. *Tom. I.* † N°. CXXVII. pag. 533. *Tom. II.*

questratus, reliquos omnes esse vel semicircumferentiam, vel duplam semicircumferentiam, vel triplam, vel quadruplam, vel quintuplam, & ita in infinitum; quippe qui arcus singuli habent sinum suum $= 0$. Liquet etiam, præter hos arcus nullum alium dari, qui habeat suum sinum $= 0$.

IV.

Nominando itaque semicircumferentiam circuli $= c$; continebuntur radices omnes prædictæ æquationis in hac progressione, c, $2c$, $3c$, $4c$, $5c$, &c. in infinitum continuata. Ut autem æquatio ista mutetur in aliam, quæ incipiat a maxima dimensione litteræ incognitæ; ponamus $x = 1 : z$; adeoque $xx = 1 : zz$, $x^4 = 1 : z^4$ &c. positoque exponente infinitesimo $2n$; prodibit hæc æquatio $1 - \frac{1}{2.3.} \times \frac{1}{zz} + \frac{1}{2.3.4.5} \times \frac{1}{z^4} - \frac{1}{2.3 \ldots 7} \times \frac{1}{z^6} \ldots + \frac{1}{2.3.4 \ldots 2n+1} \times \frac{1}{z^{2n}} = 0$; quæ multiplicata per z^{2n} dat hanc $z^{2n} - \frac{1}{2.3} z^{2n-2} + \frac{1}{2.3.4.5} z^{2n-4} - \frac{1}{2.3 \ldots 7} z^{2n-6} \ldots \frac{1}{2.3.4 \ldots 2n+1} = 0$.

V.

Hujus autem æquationis (quæ omnes suos terminos habet parium dimensionum) radix $zz = 1 : xx$, hoc est $=$ vel $1 : cc$, vel $1 : 4cc$, vel $1 : 9cc$, vel $1 : 16cc$, vel &c. Adeoque, cum ex natura æquationum algebraïcarum coëficiens secundi termini mutato signo sit æqualis summæ omnium radicum, erit sane $\frac{1}{2.3}$ seu $\frac{1}{6} = \frac{1}{cc} + \frac{1}{4cc} + \frac{1}{9cc} + \frac{1}{16cc} +$ &c. proinde $\frac{cc}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} +$ &c. $= \frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} +$ &c. Unde patet summam Seriei fractionum, quarum numeratores sunt unitates, denominatores vero quadrata numerorum naturalium

esse subsextuplum quadrati semicircumferentiæ cujus radius $= 1$; vel (quod eodem recidit) subsextuplum quadrati totius circumferentiæ cujus diameter $= 1$.

V I.

S C H O L I U M I.

Atque ita satisfactum est ardenti desiderio Fratris mei, qui agnoscens summæ hujus pervestigationem difficiliorem esse quam quis putaverit, ingenue fassus est, omnem suam industriam fuisse elusam: Si quis *inveniat*, inquit, *nobisque communicet*, *quod industriam nostram elusit hactenus*, *magnas de nobis gratias feret*. Vid. Tractat. *de Seriebus infinitis*. p. 254. Utinam Frater superstes esset!

V I I.

Simili modo inveniri potest summa Seriei fractionum, cujus, existentibus numeratoribus inter se æqualibus, denominatores procedunt ut quadrata, vel cubi, vel biquadrata, vel qualescunque potentiæ denominatorum 1, 4, 9, 16, 25, &c. hoc est, ut $1, 4^2, 9^2, 16^2, 25^2$ &c. vel ut $1, 4^3, 9^3, 16^3, 25^3$, &c. vel in genere ut $1, 4^m, 9^m, 16^m, 25^m$, &c. aut quia ipsi numeri 1, 4, 9, 16, 25 &c. sunt quadrati numerorum naturalium 1, 2, 3, 4, 5, &c. poterit inveniri summa Seriei fractionum cujus denominatores sunt qualibet potentiæ pares numerorum naturalium, nempe hujus Seriei fractionum

$$1 + \frac{1}{2^{2m}} + \frac{1}{3^{2m}} + \frac{1}{4^{2m}} + \frac{1}{5^{2m}} + \&c.$$

V I I I.

Hujus investigationis fundamentum petitur ex elegantissimo Theoremate *Newtoniano*, quod sine demonstratione extat in illius *Algebra* p. 251, Edit. Lond. anni 1707: cujus autem demonstrationem ego inveni: ubi traditur modus quo ex coëfficienti-

ficientibus terminorum datæ alicujus æquationis determinantur summa non tantum radicum, sed & ex radicibus summa quadratorum, cuborum, quadrato-quadratorum &c.

IX.

Ita ejus regulæ ductu, æquationis nostræ §. 4 expressæ $z^{2n} - \frac{1}{2.3} z^{2n-2} + \frac{1}{2.3.4.5.} z^{2n-4} \ldots . \frac{1}{2.3\ldots 2n+1} = 0$, radices $\frac{1}{cc}$, $\frac{1}{4cc}$, $\frac{1}{9cc}$, &c. habebunt pro summa quadratorum $\left(\frac{1}{c^4} + \frac{1}{4^2 c^4} + \frac{1}{9^2 c^4} + \frac{1}{16^2 c^4} + \text{\&c.} \right)$ hanc quantitatem ex primo & secundo coëfficiente deductam $\left(\frac{1}{2.3} \right)^2 - \frac{2}{2.3.4.5} = \frac{1}{36} - \frac{1}{60} = \frac{1}{90}$. Est itaque $1 + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{16^2} + \text{\&c.}$ seu $1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \text{\&c.} = \frac{c^4}{90}$.

X.

Sic pariter radices $\frac{1}{cc}$, $\frac{1}{4cc}$, $\frac{1}{9cc}$, $\frac{1}{16cc}$ &c. obtinebunt pro summa cuborum $\left(\frac{1}{c^6} + \frac{1}{4^3 c^6} + \frac{1}{9^3 c^6} + \frac{1}{16^3 c^6} + \text{\&c.} \right)$ hanc quantitatem ex primo, secundo & tertio coëfficiente, seu ex coëfficientibus termini secundi, tertii & quarti elicitam $\left(\frac{1}{2.3} \right) \times \frac{1}{90} - \left(\frac{1}{2.3.4.5} \right) \times \left(\frac{1}{2.3} \right) + \frac{3}{2.3\ldots 7} = \frac{1}{940}$; Proinde erit $1 + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{16^3} + \text{\&c.}$ seu $1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{2}{4^6} + \text{\&c.} = \frac{c^6}{940}$.

XI.

Ex istis eliciemus summam hujus Seriei $1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \text{\&c.}$

atque ita successive progredi licebit ad altiores dimensiones numerorum naturalium, modo exponentes sint numeri pares; quomodo vero Series tractandæ sint, si denominatores terminorum sunt numeri naturales ad dimensiones impares elevati, ex. gr. si hæc simplicissima proponatur Series $1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} +$ &c. cujus utique summa est finita, nondum constat per hanc nostram methodum. Invitantur Analystæ, ut defectui succurrant.

XII.

SCHOLIUM II.

Supponitur cæterum, æquationem nostram §. 4 inventam $z^{2n} - \frac{1}{2.3} z^{2n-2} + \frac{1}{2.3.4.5.} z^{2n-4} - \ldots \frac{1}{2.3.4\ldots 2n+1} = 0$, nullas continere radices impossibiles, seu imaginarias, nullas quoque admixtas habere (ut in solutione Problematum subinde accidit) radices peregrinas, præter illas genuinas $\frac{1}{cc}$, $\frac{1}{4cc}$, $\frac{1}{9cc}$, $\frac{1}{16cc}$, &c. Alias vacillaret fundamentum desumtum ex notissima illa proprietate coëfficientium. Neutrum autem hic timendum esse, satis est probabile vel ex ipsa Seriei generatione. Cum præsertim per regulam NEWTONI traditam p. 242, ad nostram æquationem infinitam probe applicatam, fere omnino pateat nullas in illa contineri radices impossibiles.

APPENDIX.

Esto circuli radius $= 1$, tangens alicujus arcus $= t$, erit arcus cui respondet t, hoc est $\int \frac{dt}{1+tt} = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 +$ &c. Hoc jam invenit LEIBNITIUS. Sed sine alternatione signorum inveni ego hanc seriem $\int \frac{dt}{1+tt} = \frac{t}{1.(1+tt)^1} + \frac{2t^3}{1.3.(1+tt)^2} + \frac{2.4.t^5}{1.3.5(1+tt)^3} + \frac{2.4.6.t^7}{1.3.5.7.(1+tt)^4} +$ &c.

Posito

Posito sinu $= x$, erit, ut dudum constat, arcus $= x + \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1.3}{2.4.5}x^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7.}x^7 +$ &c. Sed sine successione signorum reperi ego hanc seriem $\frac{x}{1(1-xx)^{1:2}}, - \frac{x^3}{3(1-xx)^{3:2}}, + \frac{x^5}{5(1-xx)^{5:2}} - \frac{x^7}{7(1-xx)^{7:2}} +$ &c. $= \int \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \int \frac{dx}{(1-xx)^{1:2}}$. Hinc itaque $\int \left(\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} \int \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}\right) = \int \frac{x\,dx}{1-xx} - \frac{1}{3}\int \frac{x^3 dx}{(1-xx)^2} + \frac{1}{5}\int \frac{x^5 dx}{(1-xx)^3} - \frac{1}{7}\int \frac{x^7 dx}{(1-xx)^4} +$ &c.

Ex serie secunda fit $\int \left(\frac{dt}{1+tt}\int \frac{dt}{1+tt}\right) = \int \frac{t\,dt}{1.(1+tt)^2} + \frac{2}{1.3}\int \frac{t^3 dt}{(1+tt)^3} + \frac{2.4}{1.3.5}\int \frac{t^5 dt}{(1+tt)^4} + \frac{2.4.6}{1.3.5.7.}\int \frac{t^7 dt}{(1+tt)^5} +$ &c. cujus singuli termini sunt integrabiles. Si vero, post integrationem peractam & more solito rectificatam, ponatur $t = \infty$; prodibit ista Series $\frac{1}{1.2} + \frac{2}{1.3.4} + \frac{2.4}{1.3.5.6} + \frac{2.4.6}{1.3.5.7.8} +$ &c. cujus adeo summa (posita semicircumferentia $= c$) erit $= \frac{1}{8}cc$.

N°. CLIII.

PROBLEMA.

Maximum terminum binomii ad quamcunque dimensionem elevati invenire.

SIT $a + b$ binomium, & c numerus dimensionis; erit $(a+b)^c = a^c + \frac{c}{1}a^{c-1}b + \frac{c.(c-1)}{1.2.}a^{c-2}bb + \frac{c.(c-1).(c-2)}{1.2.3.}a^{c-3}b^3$; Quæritur maximus hujus Seriei terminus?

Hic ibi erit, ubi duo subsequentes sunt æquales. Sit igitur numerus quotus termini quæsiti $= x$, & quia subsequens

huic debet esse æqualis, dividatur subsequens per antecedentem, & proveniet ex natura Seriei $\frac{c-x+1}{x} \times \frac{b}{a}$; quod erit (ob æquale divisum per æquale) æquale unitati, id, quod hanc format æqualitatem $\frac{cb-bx+b}{ax} = 1$, vel $cb - bx + b = ax$; Ergo $x = \frac{cb+b}{a+b}$ = numero quoto termini maximi quæsiti. *Q. E. I.*

Hinc si $\frac{cb+b}{a+b}$ est numerus integer, duo erunt termini maximi; nam subsequens invento est æqualis. Sin autem $\frac{cb+b}{a+b}$ non est numerus integer; erunt duo termini subsequentes quidem æquales; sed, ob numerum quotum non integrum, neuter in Serie existet, ideoque unicus erit maximus terminus; nempe ille qui inter utrumque imaginarium includitur: proinde numerus fractus $\frac{cb+b}{a+b}$ ad proximam unitatem augendus est, ad habendum verum numerum quoti termini maximi quæsiti.

EXEMPLUM.

Sit $a = 2$, $b = 6$, $c = 7$, erit $\frac{cb+b}{a+b} = 6$ = numero integro, quod indicio est 6tum & 7mum terminum esse maximos, utpote æquales. Si vero $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$, erit $\frac{cb+b}{a+b} = \frac{24}{7} = 3\frac{3}{7}$ = numero non integro; quod denotat quartum terminum, eumque solum, esse maximum. Sic si $a = 2$, $b = 1$, $c = 6$, erit $\frac{cb+b}{a+b} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$; ideoque maximus terminus erit tertius.

PRO-

PROBLEMA.

Data progressione arithmetica, ab unitate incipiente, & eo modo disposita quo hic vides; invenire Seriem transversalem, cujus summa omnium sit maxima.

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ & & 12 & 13 & 14 & 15 \\ & & & 16 & 17 & 18 \\ & & & & 19 & 20 \\ & & & & & 21 \end{array}$$

Sit numerus terminorum primæ Seriei transversalis $= a$, numerus quotus Seriei quæsitæ $= x$. Ex natura progressionis arithmeticæ, primi & ultimi Seriérum transversalium, sic se habebunt.

$$\begin{array}{lcl} 1,\ 2,\ 3,\ 4. & \ldots\ldots\ldots\ldots & a \\ a+1, & \ldots\ldots\ldots\ldots & 2a-1 \\ 2a. & \ldots\ldots\ldots\ldots & 3a-3 \\ 2a-2. & \ldots\ldots\ldots\ldots & 4a-6 \\ 4a-5. & \ldots\ldots\ldots\ldots & 5a-10 \\ \vdots & & \\ ax-a-\frac{xx+3x}{2} & \ldots\ldots & ax-\frac{xx+x}{2} \end{array}$$

Est autem numerus terminorum Seriei quæsitæ $= a - x + 1$; ergo summa Seriei quæsitæ erit $= (x^3 - 3axx - 3xx + 2aax + 5ax + 2x - aa - a) : 2$, & posito $x + 1$ loco x, proveniet summa Seriei subsequentis $= (x^3 - 3axx + 2aax - ax - x + aa + a) : 2$. Si itaque, ad modum præcedentem, æquatio instituatur inter has duas quantitates, invenietur $x = a + \frac{1}{2} - \sqrt{(\frac{1}{3}aa + \frac{1}{3}a + \frac{1}{4})}$. Sic si hæc quantitas est numerus integer, erunt duæ Series transversales maximæ: Sin minus, quantitas inventa ad proximam unitatem augenda est, & unica erit Series transversalis maxima.

N°. CLIV.

DE ALEA, SIVE ARTE CONJECTANDI,

PROBLEMATA QUÆDAM.

PROBLEMA I.

ALiquot Collusores tessera ludunt, quorum primus certum numerum jactuum habet; quaeritur quot jactus secundo, tertio, quarto, quinto adjudicandi sint ante ludum, ita ut sors singulorum fiat aequalis?

Sit numerus facierum tesseræ quibus obtinetur $= a$, & numerus facierum quibus perditur $= b$, numerus jactuum primi Collusoris $= c$, numerus Collusoris quoti $= n$, & numerus jactuum Collusoris quoti, una cum jactibus præcedentium $= x$. In uno jactu sunt a casus ad obtinendum, & b ad perdendum; ergo sors unius jactus $= \frac{a}{a+b}$. In primo duorum jactuum sunt a casus ad obtinendum, & b ad perveniendum ad sortem $\frac{a}{a+b}$; ergo sors duorum jactuum $= \frac{ab}{(a+b)^2} + \frac{a}{a+b}$. In primo trium jactuum sunt a casus ad 1, & b ad $\frac{ab}{(a+b)^2} + \frac{a}{a+b}$; ergo sors trium jactuum $= \frac{abb}{(a+b)^3} + \frac{ab}{(a+b)^2} + \frac{a}{a+b}$. Eodem modo habetur sors quatuor jactuum $= \frac{ab^3}{(a+b)^4} + \frac{abb}{(a+b)^3} + \frac{ab}{(a+b)^2} + \frac{a}{a+b}$. Et sors c jactuum $= \frac{ab^{c-1}}{(a+b)^c} + \frac{ab^{c-2}}{(a+b)^{c-1}} \ldots\ldots \frac{a}{a+b} =$ (quia est progressio geometrica) $1 - b^c : (a+b)^c =$ sorti primi Collusoris. Pari ratione erit

erit ſors x jactuum $= 1 - b^x : (a+b)^x$; quia autem ſingulorum Colluſorum ſors eadem ponitur, erit $1 - b^x : (a+b)^x = n - nb^c : (a+b)^c$, aut $1 - n + nb^c : (a+b)^c = b^x : (a+b)^x$; ideoque Log. $(1 - n + nb^c : (a+b)^c) = x\,lb - x\,l(a+b)$; ideoque $x = l(1 - n + nb^c : (a+b)^c) : (lb - l(a+b))$, a quo ſi auferatur numerus jactuum præcedentium [qui habetur ponendo $n - 1$ pro n] reſtabit

$$\frac{l(2 - n + (n-1)b^c : (a+b)^c) - l(1 - n + nb^c : (a+b)^c)}{l(a+b) - lb}$$

= numero jactuum quæſito.

ALITER.

Quoniam tantundem eſt, & eadem expectatio habetur, ſi unica teſſera aliquot jactus inſtituendi ſint, quam cum totidem teſſeris unicus jactus eſt faciendus; ponatur loco numeri jactuum primi Colluſoris numerus teſſerarum $= c$, & loco numeri jactuum Colluſoris quoti una cum jactibus præcedentium, numerus teſſerarum $= x$. Patet ex Arte combinandi, quod c teſſeræ (ob $a+b$ facies unius teſſeræ) variari poſſint $(a+b)^c$ caſibus, & b^c caſibus quibus nulla facies ipſarum a cadit, id eſt, quibus perditur; ideoque ſunt $(a+b)^c - b^c$ caſus quibus obtinetur: Invenitur ergo ſors Colluſoris primi $= ((a+b)^c - b^c) : (a+b)^c = 1 - b^c : (a+b)^c$, ut ante. Pariter erit ſors x jactuum $= 1 - b^x : (a+b)^x$; reliqua peraguntur ut prius.

PROBLEMA II.

Datis faciebus a + b *unius tesseræ; quæritur quot vicibus cum unica tessera, seu, quod tantundem est, quot tesseris unica vice aliquis suscipere possit ut jaciat unam, duas*, 3, 4, &c. n, *ex faciebus a.*

Esto numerus tesserarum $= x$, erunt $(a+b)^x$ casus quibus x tesseræ variari possunt, b^x casus quibus nulla facies ipsarum a cadit, $\frac{x}{1} b^{x-1} a^1$ casus quibus una, $\frac{x.(x-1)}{1.2} b^{x-2} a^2$ casus quibus duæ, $\frac{x.(x-1).(x-2)}{1.2.3} b^{x-3} a^3$ quibus tres &c. Si itaque unam ex faciebus a jacere debeat; erunt $(a+b)^x - b^x$ casus quibus lucratur: si duas, $(a+b)^x - b^x - \frac{x}{1} b^{x-1} a$ casus: si tres, $(a+b)^x - b^x - \frac{x}{1} b^{x-1} a - \frac{x.(x-1)}{1.2} b^{x-2} a^2$ casus; si n facies suscipiantur; erunt $(a+b)^x - b^x - \frac{x}{1} b^{x-1} a - \frac{x.(x-1)}{1.2} b^{x-2} a^2 \ldots\ldots\ldots - \frac{x(x-1)\ldots(x-n+2)}{1.2.3\ldots n-1} b^{x-n+1} a^{n+1}$ casus; ideoque si quæratur sors, erit illa $= \frac{1}{2}$; quod hanc dabit æquationem $-\frac{1}{2} + (a+b)^x - b^x - \frac{x}{1} b^{x-1} a^1 - \frac{x.(x-1)}{1.2} b^{x-2} a^2$ &c. $= 0$. *Q. E. I.*

PROBLEMA III.

Petrus & Paulus, *quorum dexteritates sint æquales inter se, datis globis numero* p & q *certent; jam post ludos aliquot peractos desint Petro ludi* f *quominus victor evadat*, Paulo *vero desint ludi* g. *Quæritur ratio inter ipsorum sortes?*

Solutio

betur. Esto $p+q=m$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\ldots-1).(q-2)\ldots(q-g+1)}{.(m-1)\ldots\ldots(m-g+1)}\ o\\ \frac{q-1).(q-2)\ldots(q-\ldots+2)}{.(m-1)\ldots\ldots(m-g+1)}\ \alpha\\ \frac{q-1).(q-2)\ldots(q-g+3)}{.(m-1)\ldots\ldots(m-g+2)}\ \beta\\ \frac{q-1).(q-2)\ldots(q-g+4)}{.(m-1)\ldots\ldots(m-g+3)}\ \gamma\\ \vdots\\ \frac{pq}{m.(m-1)}\ \xi\end{array}\right\} = \text{Expectationi } Petri$$

D, &c. expectationes *Petri* cum & *Paulo* ludi g; & per $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ psi desunt ludi f, & *Paulo* ludi

EMA IV.

is, hac conditione, ut si medium at inter maximum & minimum t quam iste medius proportionalis, faciat, lucretur Paulus. *Quari-*

SOLUTIO.

Si numerus tesserarum est impar quicunque, liquet sortes inter se esse æquales. Si vero sit par, sit ille $=2n$, ita ut numerus casuum, quibus jactus omnes variare possunt, sit 6^{2n}; inter hos erunt $\frac{(7n-1).(7n-2).(7n-3)\ldots\ldots(5n+1)}{1.2.3.4\ldots\ldots(2n-1)}$

G 2 casus,

PROBLEMA II.

Datis faciebus a + b *unius tesseræ; quæritur quot vicibus cum unica tessera, seu, quod tantundem est, quot tesseris unica vice aliquis suscipere possit ut jaciat unam, duas,* 3, 4, &c. n, *ex faciebus a.*

Esto numerus tesserarum $= x$, erunt $(a+b)^x$ casus quibus x tesseræ variari possunt, b^x casus quibus nulla facies ipsarum a cadit, $\frac{x}{1} b^{x-1} a^1$ casus quibus una, $\frac{x.(x-1).}{1.2} b^{x-2} a^2$ casus quibus duæ, $\frac{x.(x-1).(x-2)}{1.2.3} b^{x-3} a^3$ quibus tres &c. Si itaque unam ex faciebus a jacere debeat; erunt $(a+b)^x - b^x$ casus quibus lucratur: si duas, $(a+b)^x - b^x - \frac{x}{1} b^{x-1} a$ casus: si tres, $(a+b)^x - b^x - \frac{x}{1} b^{x-1} a - \frac{x.(x-1)}{1.2} b^{x-2} a^2$ casus; si n facies suscipiantur; erunt $(a+b)^x - b^x - \frac{x}{1} b^{x-1} a - \frac{x.(x-1)}{1.2} b^{x-2} a^2 \ldots\ldots\ldots - \frac{x(x-1)\ldots(x-n+2)}{1.2.3\ldots n-1} b^{x-n+1} a^{n+1}$ casus; ideoque si quæratur fors, erit illa $= \frac{1}{2}$; quod hanc dabit æquationem $-\frac{1}{2} + (a+b)^x - b^x - \frac{x}{1} b^{x-1} a^1 - \frac{x.(x-1)}{1.2} b^{x-2} a^2$ &c. $= 0$. *Q. E. I.*

PROBLEMA III.

Petrus & Paulus, *quorum dexteritates sint æquales inter se, datis globis numero* p & q *certent; jam post ludos aliquot peractos desint* Petro *ludi* f *quominus victor evadat*, Paulo *vero desint ludi* g. *Quæritur ratio inter ipsorum sortes?*

Solutio

Solutio ex sequenti tabella habetur. Esto $p+q=m$

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{p.(p-1).(p-2)\ldots.(p-f+1)}{m.(m-1)\ldots.(m-f+1)}\,1+\frac{q.(q-1).(q-2)\ldots(q-g+1)}{m.(m-1)\ldots.(m-g+1)}\,0 \\
\frac{pq.(p-1).(p-2)\ldots(p-f+2)}{m.(m-1)\ldots.(m-f+1)}\,A+\frac{pq.(q-1).(q-2)\ldots(q-g+2)}{m.(m-1)\ldots.(m-g+1)}\,\alpha \\
\frac{pq.(p-1).(p-2)\ldots(p-f+3)}{m.(m-1)\ldots.(m-f+2)}\,B+\frac{pq.(q-1).(q-2)\ldots(q-g+3)}{m.(m-1)\ldots.(m-g+2)}\,\beta \\
\frac{pq.(p-1).(p-2)\ldots(p-f+4)}{m.(m-1)\ldots.(m-f+3)}\,C+\frac{pq.(q-1).(q-2)\ldots(q-g+4)}{m.(m-1)\ldots.(m-g+3)}\,\gamma \\
\quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
\frac{pq}{m.(m-1)}\,X \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \frac{pq}{m.(m-1)}\,\xi
\end{array}\right\} = \text{Expectationi } \textit{Petri}$$

NB. Intelligo per *A*, *B*, *C*, *D*, &c. expectationes *Petri* cum ipsi desunt ludi 1, 2, 3, 4 &c. & *Paulo* ludi g; & per $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ &c. expectationes *Petri*, cum ipsi desunt ludi f, & *Paulo* ludi 1, 2, 3, 4 &c.

PROBLEMA IV.

Petrus *ludit cum* Paulo *tesseris, hac conditione, ut si medium arithmeticum proportionalem jaciat inter maximum & minimum jactum, vel si plura puncta jaciat quam iste medius proportionalis, ille lucretur; sin minorem jactum faciat, lucretur* Paulus. *Quaeritur ratio sortium?*

SOLUTIO.

Si numerus tesserarum est impar quicunque, liquet sortes inter se esse aequales. Si vero sit par, sit ille $=2n$, ita ut numerus casuum, quibus jactus omnes variare possunt, sit 6^{2n}; inter hos erunt $\frac{(7n-1).(7n-2).(7n-3).\ldots.(5n+1)}{1.2.3.4.\ldots.(2n-1)}$ casus,

casus, quibus medius arithmeticus inter extremos cadere potest; adeoque sors *Petri* est ad sortem *Pauli* ut $6^{2n} + \frac{(7n-1).(7n-2)\ldots(5n+1)}{1.2.3\ldots(2n-1)}$ ad $6^{2n} - \frac{(7n-1).(7n-2)\ldots(5n+1)}{1.2.3\ldots(2n-1)}$;

PROBLEMA V.

Duo lusores A & B ludunt una tessera, hac conditione, ut A tres jactus faciat continuos, numeretque puncta quæ tribus istis jactibus jecerit in unam summam; B vero tot faciat jactus quot puncta A primo jactu jecerit, omnia jacta puncta pariter collecturus in unum: Qui autem majorem punctorum summam habuerit, ille lucrabitur; Quod si vero utriusque punctorum numerus sit æqualis, tunc depositum bipartientur. Quæritur ratio sortis utriusque?

R. Sors A est ad sortem B ut 4200563 ad 5877133.

PROBLEMA VI.

Cæteris positis ut prius, sit æqualem uterque habuerint punctorum summam, tunc etiam A vincet. Quæritur sortium ratio?

R. Sors A est ad sortem B ut 282571 ad 347285.

PROBLEMA. VII.

Dato numero Electorum, qui sit multiplex ternarii, non tamen minor senario; Duo autem ex Electoribus A & B se declaraverint faventes alicui ex Candidatis C. Quæritur quantam spem habeat C, seu quænam sit probabilitas, ut A & B in unam eandemque trium Electorum classem per sortem collocentur.

SOLUTIO.

Sit numerus Electorum $= 6 + 3n$. Dico probabilitatem quæsitam fore $= \frac{1+n}{5+3n}$; Hoc est probabilitas ut A & B in eadem classe conjungantur, est ad probabilitatem eventus contrarii ut $1 + n$ ad $4 + 2n$.

COROL-

Corollarium I.

Si 6 sint Electores, erit ratio expectationis ad metum sinistri successus, ut 1 ad 4.

Corollarium II.

Si numerus Electorum esset infinitus, foret illa ratio ut 1 ad 2.

Corollarium III.

Hinc quo major est Electorum numerus, eo favorabiliorem expectationem habet *C*. Quod paradoxum esse videtur.

N°. CLV.

GEOMETRICA.

PROPOSITIO I.

Theorema.

SI per quodvis punctum A *in Triangulo quovis rectilineo* BCD *ex singulis angulis ducantur rectæ ad latera opposita; erunt solida ex tribus laterum segmentis, non contiguis, facta inter se æqualia; nempe* $CF \times DE \times BG = DF \times CG \times BE$. TAB. LXXVII. *Fig. 1.*

Demonstratio.

Producta BF, agantur DH & CI parallelæ ipsis AC & AD. Jam, ob similia Triangula ACI, HDA, ut & AFC, HFD, erit $CF : FD = AI : AH = AI : AB\,[CG : GB] + AB : AH\,[BE : ED]$; id est, $CF : FD = CG \times BE : BG \times DE$. Ergo $CF \times BG \times DE = DF \times CG \times BE$. *Q. E. D.*

PROPOSITIO II.

PROBLEMA.

Datis in peripheria circuli duobus punctis A *&* B, *invenire tertium quoddam in illa, ut* C, *ita ut ductis* AC, BC *& perpendiculari* BD, *lineæ* AD *&* BD *simul sumtæ sint æquales lineis* BC *&* DC *simul sumtis.*

SOLUTIO.

TAB. LXXVII. *Fig. 2.* Ducatur subtensa AB, bisceturque illa in H, & per punctum H agatur diameter HI, voceturque AH, vel HB $= a$, GH $= c$, radius FG $= b$, HE $= x$; erit AE $= \sqrt{(aa + xx)}$. Nunc, ob similia Triangula AHE & ABD, est AE $[\sqrt{(aa+xx)}]$: AH $[a]$ = AB $[2a]$: AD $[2aa : \sqrt{(aa+xx)}]$, & AH $[a]$: HE $[x]$ = AD $[2aa : \sqrt{(aa+xx)}]$: BD $[2ax : \sqrt{(aa+xx)}]$. Quia GE $= c + x$, & IE $= 2b - c - x$, erit rectangulum GEI $= 2bc + 2bx - cc - 2cx - xx =$ rectangulo AEC, proinde $\frac{2bc + 2bx - cc - 2cx - xx}{\sqrt{(aa+xx)}}$ $=$ EC, & $\frac{2bc + 2bx - cc - 2cx - xx}{\sqrt{(aa+xx)}} + \sqrt{(aa+xx)}$ $= \frac{aa + 2bc + 2bx - cc - 2cx}{\sqrt{(aa+xx)}} =$ AC. Ergo AC $-$ AD [DC] $= \frac{-aa + 2bc + 2bx - cc - 2cx}{\sqrt{(aa+xx)}}$; & BD^2 $\left[\frac{4aaxx}{aa+xx}\right]$ + DC^2 $[(a^4 + 4bbcc + 4bbxx + c^4 + 4ccxx - 4aabc - 4aabx + 2aacc + 4aacx + 8bbcx - 4bc^3 - 12bccx - 8bcxx + 4c^3x) : (aa+xx)]$ $=$ BC^2. Jam autem quia AD + BD debet esse $=$ BC + DC, erit etiam AD + BD $-$ DC $=$ BC, id est, $(3aa + 2ax - 2bc - 2bx + cc + 2cx) : \sqrt{(aa+xx)} = \sqrt{(4aaxx + a^4 + 4bbcc + 4bbxx + c^4 + 4ccxx - 4aabc - 4aabx + 2aacc + 4aacx + 8bbcx - 4bc^3 - 12bccx - 8bcxx + 4c^3x)} : \sqrt{(aa+xx)}$.

Abjecto

Abjecto communi denominatore, sumantur numeratorum quadrata, erit,

$$\begin{array}{lll} +4aaxx & -4aabx & +a^4 \\ +4bb & +4aac & +c^4 \\ +4cc & +8bbc & +4bbcc \\ -8bc & -12bcc & -4aabc \\ & +4c^3 & +2aacc \\ & & -4bc^3 \end{array} = \begin{array}{lll} 4aaxx & +12a^3x & +9a^4 \\ +4bb & -12aab & +c^4 \\ +4cc & +12aac & +4bbcc \\ -8ab & -8abc & -12aabc \\ +8ac & +4acc & +6aacc \\ -8bc & +8bbc & -4bc^3 \\ & -12bcc & \\ & +4c^3 & \end{array}$$

Reducta hac æquatione, provenit $xx = \left\{ \begin{array}{ll} -3a^2x & -2a^3 \\ +2ab & +2abc \\ -2ac & -acc \\ +2bc & \\ -cc & \end{array} \right\} : (2c-2b)$.

Ut autem hæc æquatio paucioribus literis & terminis habeatur, quæratur valor ipsius b, & quidem sic: IHG rectangulum $=$ AH², id est $2bc - cc = aa$, proinde $b = (aa + cc) : 2c$; si itaque loco b, substituatur valor hic inventus, habebitur $xx = ((a^3 - 2aac - acc)x - a^3c) : (cc - aa)$ & $x = (\frac{1}{2}a^3 - aac - \frac{1}{2}acc + \sqrt{(\frac{1}{4}a^6 + \frac{1}{2}a^4cc + \frac{1}{4}aac^4)}) : (cc - aa)$; aut, quia ex posteriori quantitate radix potest extrahi, fit $x = (a^3 - aac) : (cc - aa)$ & $x = (-acc - aac) : (cc - aa)$, vel dividatur numerator & denominator prioris per $a - c$, & posterioris per $-a - c$, proveniet $x = aa : (-a - c)$ & $x = ac : (a - c)$. Ubi notandum est quod prior radix inventa valeat, si punctum C quæratur in minori arcu A G B, posterior autem, si idem illud in majori AIB.

CONSTRUCTIO.

Sumatur HK $=$ HG ad utramque partem, & agatur KL parallela ipsi HG, & quidem in priori casu sursum & æqualis ipsi AH, in posteriori deorsum & æqualis HG; perque puncta L ducantur lineæ AC; designabunt hæ lineæ in periphe-

H 2 ria

ria Circuli duo puncta C, adeo ut, ductis BC & perpendicularibus BD, sint $AD + BD = BC + DC$.

PROPOSITIO III.

PROBLEMA.

TAB. LXXVII. Fig. 3. *In data linea* BF *ad diametrum Circuli* GH *perpendiculari; invenire punctum* F *ita comparatum, ut ducta* FC *tangens Circulum sit æqualis lineæ* CD *perpendiculari ad eandem diametrum.*

SOLUTIO.

Intelligatur ductam esse AC, & CE parallelam diametro GH; voceturque radius circuli $AC = a$, $AB = b$, & $AD = x$, erit $DC = \surd(aa - xx)$. Quia nunc angulus ACF est rectus, ob tangentem CF, & angulus DCE etiam rectus, ob CE parallelam GH; erit, ablato communi ACE, reliquus ACD = reliquo FCE: est autem CDA = CEF, utpote uterque rectus; erunt ideo Triangula ADC & CEF similia; proinde $AC[a] : DC[\surd(aa - xx)] = CF[\surd(aa - xx)] : CE$ seu $DB[(aa - xx) : a] = b + x$; erit reducendo æquationem $xx = -ax - ab + aa$, & $x = -\frac{1}{2}a \pm \surd(\frac{5}{4}aa - ab)$.

PROPOSITIO IV.

PROBLEMA.

TAB. LXXVII. Fig. 4. *Si a puncto quodam peripheriæ Circuli, ut* B, *infinitæ ducantur lineæ* BF, *arcusque* BF, *quos subtendunt, bisecentur in* D, *& a punctis bisectionis agantur lineæ* DE, *parallelæ diametro* BA, *donec occurrant lineis* BF *in* E; *invenire naturam curvæ, quam puncta* E *describunt?*

SOLU-

SOLUTIO.

Ducatur AD ex centro A, & EC perpendicularis ad BA: Sit radius AB $= a$, BC $= x$, & CE $= y$. Quia nunc arcus BF per hypothesin bisectus est in D, erit AD perpendicularis ad BF; proinde Triangula AGB & ACH sunt similia: est autem Triangulum AGB etiam simile Triangulo BCE; ergo Triangulum ACH est simile Triangulo BCE, ideoque EC $[y]$: CB $[x]$ = AC $[a - x]$: CH $[(ax - xx):y]$. Quia vero Triang. ACH & DHE etiam sunt similia, erit EH: HC = DH: HA & *componendo* EC $[y]$: HC $[(ax - xx):y]$. DA $[a]$: HA $[(aax - axx):yy]$. Nunc iterum CH $[(ax - xx):y]$: HA $[(aax - axx):yy] = 1:\frac{a}{y}$ = BC $[x]$: BE $[ax:y]$, cujus quadratum BE² $[aaxx:yy]$ = BC² $[xx]$ + CE² $[yy]$ & $aaxx = xxyy + y^4$, tandemque $y^4 + xxyy - aaxx = 0$.

PROPOSITIO V.

PROBLEMA.

Si a puncto quodam peripheriæ Circuli ut B, *infinitæ ducantur lineæ* BF, *arcusque* BF *quos subtendunt bisecentur in* D, *& a punctis bisectionis demittantur lineæ* DC *normales ad diametrum* BA, *quæ lineas* BF *secent in* E; *invenire naturam Curvæ quam puncta* E *describunt?* TAB. LXXVII. Fig. 5.

SOLUTIO.

Ducatur AD ex centro A, & DC perpendicularis ad BA (ut prius): Sit radius AB $= a$, BC $= x$, & CE $= y$. Quia nunc arcus BF per hypothesin bisectus est in D, erit AD perpendicularis ad BF, Triangula BCE & AHB sunt similia; est autem Triangulum AHB simile Triangulo ACD; Ergo Triangulum BCE est simile Triangulo ACD, ideo-

que CE $[y]$: BC $[x]$ = AC $[a - x]$: CD $[(ax - xx):y]$ cujus quadratum CD² $[(aaxx - 2ax^3 + x^4):yy]$ = rectang. BCG $[2ax - xx]$ & $aaxx - 2ax^3 + x^4 = 2axyy - xxyy$. Divisum utrumque per x, erit $aax - 2axx + x^3 = 2ayy - xyy$; tandemque $x^3 - 2axx + aax + yyx - 2ayy = 0$.

PROPOSITIO VI.

PROBLEMA.

TAB. LXXVII. Fig. 6. *Data in dato Circulo* ABC *subtensa* AC; *invenire in majoris segmenti peripheria punctum* B, *ita ut ducta per centrum* D *linea* BDH, *terminata a subtensa* AC, *sit media proportionalis inter ductas* BA *&* BC.

SOLUTIO.

Sit BD vel DG $= a$, AF vel FC $= b$, DF $= \sqrt{(aa - bb)} = c$, DH $= x$, FH $= \sqrt{(xx - cc)}$. Quia nunc HD : DB = HF : FE, erit FE $= \sqrt{(xx - cc)}\,a : x$ & AE $= (bx - a\sqrt{(xx - cc)}) : x$ & EC $= (bx + a\sqrt{(xx - cc)}) : x$, quia etiam HD : DF = HB : BE, erit BE $= (cx + ac) : x$, est autem AE² + EB² = AB², & EC² + BE² = BC²; erit ergo AB $= \sqrt{((aax + bbx + ccx + 2acc - 2ab\sqrt{(xx - cc)}) : x)}$ & BC $= \sqrt{((aax + bbx + ccx + 2acc + 2ab\sqrt{(xx - cc)}) : x)}$. Substituatur utrobique valor ipsius $cc = aa - bb$, & habebitur AB $= \sqrt{((2aax + 2a^3 - 2abb - 2ab\sqrt{(xx - aa + bb)}) : x)}$ & BC $= \sqrt{((2aax + 2a^3 - 2abb + 2ab\sqrt{(xx - aa + bb)}) : x)}$. Quoniam itaque debet esse AB : BH = BH : BC, erit rectangulum ABC = BH², id est $\sqrt{(4a^4xx - 4aabbxx + 8a^5x - 8a^3bbx + 4a^6 - 4a^4bb)} : x = aa + 2ax + xx$. Multiplica utrumque per x, & divide per $x + a$, & invenies $xx + ax = \sqrt{(4a^4 - 4aabb)}$ & $xx = -ax + \sqrt{(4a^4 - 4aabb)}$; ergo erit $x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}aa + \sqrt{(4a^4 - 4aabb)})}$.

Idem

Idem PROBLEMA *faciliori modo solvere.*

Serventur eædem litteræ quæ prius, videlicet DB $= a$, DF $= c$, DH $= x$, & ducatur CG; ideoque erit angulus BCG = recto = BEA & BGC = BAE, quia insistunt eidem segmento BC, proinde Triangula ABE & BGC similia sunt, idcirco AB: BE = BG: BC; hincque rectangulum ABC = EBG; sed est HD: DF = HB: BE, id est $x : c = x + a : \frac{ac + cx}{x} =$ BE; ideoque rectangulum EBG $= (2aac + 2acx) : x =$ ABC. Hoc autem æquale debet esse BH^2, erit ergo $(2aac + 2acx) : x = aa + 2ax + xx$; multiplica utrumque per x, & divide per $a + x$, habebis $xx + ax = 2ac$, proinde $x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}aa + 2ac)}$. TAB. LXXVII. Fig. 7.

CONSTRUCTIO.

Producatur diameter OI ad K, ita ut IK sit = DF, & diametro OK describatur circulus KLO, cujus peripheriæ occurrat recta IL tangens circulum ICO in I, & a medio ipsius DI puncto M applicetur MN = ductæ ML, radioque DN describatur circulus HNH secans subtensam AC in punctis H, H; per quæ & per centrum D, si ducantur rectæ HDB, designabunt in peripheria puncta B quæsita, ut videlicet BH sit media inter ductas BA, BC.

DEMONSTRATIO.

Quia NM = ML, erit NM^2 [$ND^2 + DM^2 + NDI$] $= ML^2$ [$MI^2 + IL^2$], & ablatis æqualibus, erit $ND^2 + NDI = IL^2 =$ KIO; est autem $ND^2 +$ NDI = IND = BHD; ergo BHD = KIO, ideoque DH : KI vel FD [BH: BE] = IO: BH; proinde $BH^2 = BE \times IO =$ EBG = ABC [ut in analysi demonstratur]; ergo AB: BH = BH: BC. *Q. E. D.*

PROPOSITIO VII.

PROBLEMA.

TAB. LXXVII. *Fig.* 8. *Quæritur natura curvæ* ABCG, *ut ducta a puncto dato* D *utcunque recta* DBC, *intercepta inter puncta intersectionis* BC *sit semper æqualis constanti.*

Sit BC $= 1$, DB $= x$, BE $= y = a + bx + cx^2 + ex^3 + fx^4 + gx^5 + hx^6$ &c. Quoniam igitur DB : DC = BE : CF erit

$$
\begin{array}{l}
CF = a{:}x + a \\
\quad + b + bx \\
\quad\quad + cx + cxx \\
\quad\quad\quad + exx + ex^3 \\
\quad\quad\quad\quad + fx^3 + fx^4 \\
\quad\quad\quad\quad\quad + gx^4 + gx^5 \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad + hx^5 + hx^6 \ \&c.\ \&;
\end{array}
$$

ob identitatem relationis duorum punctorum in curva ad puncta in axe erit etiam

$$
\begin{array}{l}
CF = + a \\
+ b + bx \\
+ c + 2cx + cxx \\
+ e + 3ex + 3exx + ex^3 \\
+ f + 4fx + 6fxx + 4fx^3 + fx^4 \\
+ g + 5gx + 10gxx + 10gx^3 + 5gx^4 + gx^5 \\
+ h + 6hx + 15hxx + 20hx^3 + 15hx^4 + 6hx^5 + hx^6. \\
\&c.
\end{array}
$$

Ergo, comparando dimensiones æquales, invenietur pro coëfficientibus $a = 0$, $c + e + f + g + h = 0$, $c + 3e + 4f + 5g + 6h = 0$, $2e + 6f + 10g + 15h = 0$, $3f + 10g + 20h = 0$, $4g + 15h = 0$, $5h = 0$. Quoniam autem provenit $h = 0$, erunt pariter omnes aliæ litteræ $= 0$, quod indicio est, hoc modo Problema non posse solvi. Ponatur ergo punctum D inter A &

A & G; erit, cæteris positis ut prius, ob DB : DC = BE : CF $= a : x - a$

$$\begin{array}{l} + b - bx \\ \quad + cx - cxx \\ \qquad + exx - ex^3 \\ \qquad\quad + fx^3 - fx^4 \\ \qquad\qquad + gx^4 - gx^5 \\ \qquad\qquad\quad + hx^5 - hx^6 \\ \qquad\qquad\qquad \&c. \end{array}$$

=, ob identitatem relationis punctorum in curva,

$$\begin{array}{l} + a \\ + b - bx \\ + c - 2cx + cxx \\ + e - 3ex + 3exx - ex^3 \\ + f - 4fx + 6fxx - 4fx^3 + fx^4 \\ + g - 5gx + 10gxx - 10gx^3 + 5gx^4 - gx^5 \\ + h - 6hx + 15hxx - 20hx^3 + 15hx^4 - 6hx^5 + hx^6 \\ \quad \&c. \end{array}$$

unde comparando dimensionum æqualium coëfficientes, reperientur $a = 0$, $c + e + f + g + h = 0$, $- 3c - 3e - 4f - 5g - 6h = 0$, $+ 2c + 2e + 6f + 10g + 15h = 0$, $- 5f - 10g - 20h = 0$, $+ 2f + 4g + 15h = 0$, $- 7h = 0$, $- 2h = 0$; Ex quo concluditur litteras b, c, e, esse arbitrarias, ceteræ vero erunt $a = 0$, $f = - 2c - 2e$, $g = c + e$, $h = 0$; ideoque substitutis hisce valoribus, habebitur æquatio quæsita pro natura curvæ, talis $y = bx + cxx + ex^3 - (2c - 2e)x^4 + (c + e)x^5$. Rursum inde patet, quod hæc Series continuari possit quantum placuerit, ita ut infinita genera curvarum, præter Circulum, e vestigio exhiberi possint, quæ lineas rectas per punctum quoddam datum ductas capiant æquales.

Nota, quod punctum D possit etiam, imo nonnunquam debeat esse extra A, G, sed tunc CD + DB statuitur = unitati.

Conferatur N^rus^. XXX, pag. 158, *Tom. I.* ubi Solutio hujus Problematis exstat, sed sine Demonstratione.

DE ANALYSI INFINITORUM VARIA.

****

N°. CLVI.

Modus resolvendi æquationem $(ax+by)dx+(cx+ey)dy=0$, *per logarithmos circulares, sine præcedente separatione indeterminatarum.*

Conferatur Nrus. CXXXVI. *Tom. III*, pag. 108.

Ponatur $\pi\int\frac{(\alpha^2ydx-\alpha^2xdy).(\beta-\varepsilon)}{\alpha\alpha(x+\beta y)^2+(x+\varepsilon y)^2}+l(\alpha\alpha(x+\beta y)^2+(x+\varepsilon y)^2)=C.$
Differentietur hæc æquatio ut habeatur

$$\begin{array}{llll} +2\alpha\alpha xdx & +2\alpha\alpha\beta ydx & +2\alpha\alpha\beta xdy & +2\alpha\alpha\beta\beta ydy=0 \\ +\ 2xdx & +2\varepsilon ydx & +2\varepsilon xdy & +2\varepsilon\varepsilon ydy \\ +\ (\beta\pi-\varepsilon\pi)\alpha^2ydx & & +\alpha^2xdy.(-\beta\pi+\varepsilon\pi) & \end{array}$$

Hujus termini comparentur cum terminis homogeneis æquationis propositæ; prodibunt valores litterarum assumtarum $\alpha, \beta, \varepsilon, \pi$; Tot enim occurrunt comparationes instituendæ, quot sunt assumtæ litteræ. Earum itaque valores, substituti in æquatione supposita, formabunt eam convenientem æquationi propositæ &c. Superest ut ostendam quantitatem $\pi\int\frac{(\alpha\alpha ydx-\alpha\alpha xdy).(\beta-\varepsilon)}{\alpha\alpha.(x+\beta y)^2+(x+\varepsilon y)^2}$ exprimere arcum circuli; quod sic facio:

$$\frac{(\alpha\alpha ydx-\alpha\alpha xdy).(\beta-\varepsilon)}{\alpha\alpha.(x+\beta y)^2+(x+\varepsilon y)^2}=\frac{\frac{(\alpha\alpha ydx-\alpha\alpha xdy)}{(x+\beta y)^2}\times(\beta-\varepsilon)}{\alpha\alpha+\left(\frac{x+\varepsilon y}{x+\beta y}\right)^2}.$$

Est autem numerator hujus fractionis differentiale ipsius $\frac{x+\varepsilon y}{x+\beta y}$ multiplicatum per α^2: Quare descriptus arcus circuli radio α, cujus tangens $=\frac{x+\varepsilon y}{x+\beta y}$, erit $=\int\frac{(\alpha^2ydx-\alpha^2xdy).(\beta-\varepsilon)}{\alpha\alpha.(x+\beta y)^2+(x+\varepsilon y)^2}$, qui arcus π vicibus sumtus, & additus logarithmo $l(\alpha\alpha(x+\beta y)^2+(x+\varepsilon y)^2)$ dabit æquationem integralem propositæ canonicæ differentialis primi gradus $(ax+by)dx+(cx+ey)dy=0.$

SCHO-

N°. CLV.

Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 5.

Fig. 8.

Fig. 7.

SCHOLION.

Potest, brevitatis gratia, in $(x+\epsilon y)^2$, negligi x, & poni simpliciter $\pi\int\frac{\alpha^2\epsilon x dy - \alpha^2\epsilon y dx}{\alpha\alpha(x+\beta y)^2+\epsilon\epsilon yy} + l(\alpha\alpha(x+\beta y)^2+\epsilon\epsilon yy) = C$. Quæ differentiata dat hanc

$$2\alpha\alpha x dx + 2\alpha\alpha\beta y dx + 2\alpha\alpha\beta x dy + 2\alpha\alpha\beta\beta y dy = 0$$
$$-\pi\alpha^2\epsilon y dx + \pi\alpha^2\epsilon x dy + 2\epsilon\epsilon y dy,$$

comparandam terminotenus cum $axdx + bydx + cxdy + eydy = 0$; faciendo scilicet $2\alpha\alpha = a$, $2\alpha\alpha\beta - \pi\alpha^2\epsilon = b$, $2\alpha\alpha\beta + \pi\alpha^2\epsilon = c$, $2\alpha\alpha\beta\beta + 2\epsilon\epsilon = e$. Ex prima habetur $\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}a}$, ex secunda & tertia $4\alpha\alpha\beta = b+c$, & $2\pi\alpha^2\epsilon = c-b$, unde porro fluit $\beta = (b+c):2a$, $2\alpha\alpha\beta\beta = (b+c)^2:4a$, adeoque ex quarta $(b+c)^2:4a + 2\epsilon\epsilon = e$, hinc $\epsilon^2 = (4ae-(b+c)^2):8a$. Quoniam vero $2\pi\alpha^2\epsilon = c-b$, inde $\pi = (c-b):2\alpha^2\epsilon = (2c-2b):\sqrt{(2aae - \frac{1}{2}a(b+c)^2)}$. Inveniuntur itaque litterarum assumtarum hi quatuor valores $\alpha=\sqrt{\frac{1}{2}a}$, $\beta=(b+c):2a$, $\epsilon = \sqrt{((4ae-(b+c)^2):8a)}$, $\pi = (2c-2b):\sqrt{(2aae-\frac{1}{2}a(b+c)^2)}$. His substitutis emergit quæsita æquatio in terminis finitis hæc

$$\frac{2c-2b}{\sqrt{(2aae-\frac{1}{2}a.(b+c)^2)}}\int\frac{\frac{1}{2}\sqrt{(2aae-\frac{1}{2}a.(b+c)^2)}.(xdy-ydx)}{\frac{1}{2}a.(x+\frac{b+c}{2a}y)^2+\frac{4ae-(b+c)^2}{8a}yy}$$

$+l\frac{1}{2}a.(x+\frac{b+c}{2a}y)^2+\frac{4ae-(b+c)^2}{8a}yy = C$. Est enim in assumta formula $\frac{\alpha^2\epsilon xdy-\alpha^2\epsilon ydx}{\alpha\alpha.(x+\beta y)^2+\epsilon\epsilon yy}$ idem quod $(\frac{\alpha^2\epsilon xdy-\alpha^2\epsilon ydx}{(x+\beta y)^2}):(\alpha\alpha+\frac{\epsilon\epsilon yy}{(x+\beta y)^2})$ id quod nihil aliud est, quam elementum arcus circuli, cujus radius $=\alpha=\sqrt{\frac{1}{2}a}$, & tangens $=\frac{\epsilon y}{x+\beta y}$ $= (y\sqrt{\frac{(4ae-(b+c)^2}{8a}}):(x+\frac{b+c}{2a}y)$. Porro quantitas sub signo logarithmicali rite ordinata abit in hanc $l(\frac{1}{2}axx + \frac{(b+c)^2}{2}xy+\frac{1}{2}eyy)$; Ergo si prædictus arcus dicatur $=A$; erit æquatio finita satisfaciens canonicæ hæc $\frac{2c-2b}{\sqrt{(2aae-\frac{1}{2}a.(b+c)^2)}}\times A$ $+l(\frac{1}{2}axx+\frac{b+c}{2}xy+\frac{1}{2}eyy)=C$.

COROLLARIUM.

Hinc liquet $4ae$ debere esse $> (b+c)^2$ ut hæc methodus succedat. Altera vero, quæ per meros logarithmos peragitur requirit contrarium, ut nimirum $4ae$ sit $< (b+c)^2$: adeoque quodlibet particulare exemplum per alterutram methodum solvi potest, excepto unico casu quo $4ae = (b+c)^2$. Hunc autem in scripto *Petropolin* misso §. 19 *, peculiari modo solutum dedi, monstrans eum lineæ rectæ convenire.

Applicatio ad Exemplum de curva velocitatum in Cycloide. Vid. N^us^. CLXXXIII, infra.

Æquatio hujus curvæ est $sds - gvds + vdv = 0$. Supponendo igitur $x = s$ & $y = v$, erit hic $a = 1$, $b = -g$, $c = 0$, $e = 1$. Quibus substitutis in æquatione finita generali, prodit $\frac{2g}{\sqrt{(2-\frac{1}{2}gg)}} \times A + l(\frac{1}{2}ss - \frac{1}{2}gsv + \frac{1}{2}vv) = C$, quæ evanescente v, dat $\frac{2g}{\sqrt{(2-\frac{1}{2}gg)}} \times 0 + 2\,l\alpha - l2 = C$, quia tangens arcus A etiam evanescit, & s evadit = longitudini totius descensus, quam vocavi α, sicuti longit. ascensus $= 6$. Unde vera æquatio correcta hæc est $\frac{2g}{\sqrt{(2-\frac{1}{2}gg)}} \times A + l(ss - gsv + vv) - 2\,l\alpha = 0$, quæ evanescente v & ipsa tota evanescet. Sed existente $s = 0$, tangens arcus A fit $= \frac{\sqrt{(2-\frac{1}{2}gg)}}{-g}$, ubi notandum etiamsi hic tangens sit negativa, ideo arcum ipsum non esse negativum, sed potius quadrante majorem, & affirmativum, seu complementum ad duos quadrantes ejus qui quadrante minor pro tangente habet $\frac{\sqrt{(2-\frac{1}{2}gg)}}{+g}$. Vocetur igitur hic arcus quadrante major $= Q + B$. Et erit in casu $s = 0$, $\frac{2g}{\sqrt{(2-\frac{1}{2}gg)}} \times (Q + B) + 2\,lv - 2\,l\alpha = 0$,

* N°. CXXXVI, *Tom. III*, pag. 121.

$= 0$, unde $lv = la - \frac{g}{\sqrt{(2 - \frac{1}{2}gg)}} \times (Q + B)$. Haud absimili ratiocinio concluditur, pro ascensu fore $lv = l\beta + \frac{g}{\sqrt{(2 - \frac{1}{2}gg)}} \times (Q - B)$; Qui duo valores consentire deprehenduntur cum illis, quos per separationem indeterminatarum invenimus *; sicuti patebit attentione facta ad id quod in uno modo assumtus sit radius $= 1$, in altero vero $= \sqrt{\frac{1}{2}}$; & quod in uno est B, id in altero sit complementum ad quadrantem.

NOTA. Poterat pro multiplo arcus simpliciter poni .... $\int \frac{\pi x dy - \pi y dx}{\alpha\alpha.(x + \beta y)^2 + \varepsilon\varepsilon yy}$; hic enim pariter habentur quatuor assumtæ litteræ α, β, ε, π, adeoque sufficientes ad quatuor comparationes instituendas. Et ita semper invenitur tangens arcus simpli, qui aliquoties sumtus dat $\int \frac{\pi x dy - \pi y dx}{\alpha\alpha.(x + \beta y)^2 + \varepsilon\varepsilon yy}$. Est enim $\frac{\pi x dy - \pi y dx}{\alpha\alpha.(x + \beta y)^2 + \varepsilon\varepsilon yy} = \left(\frac{\pi x dy - \pi y dx}{(x + \beta y)^2}\right) : \left(\alpha\alpha + \frac{\varepsilon\varepsilon yy}{(x + \beta y)^2}\right)$ $\frac{\pi}{\alpha\alpha\varepsilon}\left(\frac{\alpha\alpha\varepsilon x dy - \alpha\alpha\varepsilon y dx}{(x + \beta y)^2}\right) : \left(\alpha\alpha + \frac{\varepsilon\varepsilon yy}{(x + \beta y)^2}\right)$. Est vero numerator hujus fractionis differentiale ipsius $\frac{\varepsilon y}{x + \beta y}$ multiplicatum per $\alpha\alpha$, sumtum $\frac{\pi}{\alpha\alpha\varepsilon}$ vicibus. Adeoque $\int \frac{\pi x dy - \pi y dx}{\alpha\alpha.(x + \beta y)^2 + \varepsilon\varepsilon yy}$ designabit arcum circuli $\frac{\pi}{\alpha\alpha\varepsilon}$ vicibus sumti, cujus radius $= \alpha$, & tangens $= \frac{\varepsilon y}{x + \beta y}$. Quare, si statuatur $\pi \int \frac{x dy - y dx}{\alpha\alpha.(x + \beta y)^2 + \varepsilon\varepsilon yy} + l(\alpha\alpha.(x + \beta y)^2 + \varepsilon\varepsilon yy) = C$, dabit ea differentiata,

$$\begin{array}{l} 2\alpha\alpha x dx + 2\alpha\alpha\beta y\, dx + 2\alpha\alpha\beta x dy + 2\alpha\alpha\beta^2 y dy = 0 \\ \quad\quad - \pi y dx \quad + \quad \pi x dy \quad + 2\varepsilon\varepsilon y dy \end{array}$$

comparandam cum proposita $axdx + bydx + cxdy + eydy = 0$. Faciendo ergo $2\alpha\alpha = a$, $2\alpha\alpha\beta - \pi = b$, $2\alpha\alpha\beta + \pi = c$, $2\alpha\alpha\beta\beta + 2\varepsilon\varepsilon = e$, & quærendo valores litterarum, invenietur nunc $\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}a}$, $\beta = (b + c) : 2a$, $\pi = \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}b$; $\varepsilon = \sqrt{(4ae - (b + c)^2)} : \sqrt{8a}$.

 His

* N°. CLXXXIII, infra.

His ergo valoribus ſubſtitutis in formula habetur $\frac{c-b}{2}$

$$\int \frac{x\,dy - y\,dx}{\frac{1}{2}a(x+\frac{b+c}{2a}y)^2 + \frac{4ae-(b+c)^2}{8a}yy} + l(\tfrac{1}{2}a(x+\frac{(b+c)}{2a}y)^2$$

$$+ \frac{4ae-(b+c)^2}{a}yy = C.$$ Reliqua fiunt ut ſupra.

Propoſita jam ſit æquatio canonica ſecundi ordinis, cujus reſolutio pendeat a logarithmis partim, partim a rectificatione arcus circularis, $(axx+bxy+cyy)dx+(exx+fxy+gyy)dy=0$.

Hic jam pono hanc integralem ſatisfacere $\pi\int\frac{x\,dy-y\,dx}{\alpha\alpha.(x+\beta y)^2+\varepsilon\varepsilon yy} + \lambda l(x+\mu y) + l((x+\mu y)\times\alpha\alpha.(x+\beta y)^2+\varepsilon\varepsilon yy) = C.$ Differentiata enim dat æquationem etiam ſecundi ordinis, & adſunt ſex litteræ aſſumtæ pro totidem comparationibus inſtituendis. Adeoque reſolvetur propoſita.

Propoſita æquatio canonica tertii ordinis poſtulat, ut integralis hoc pacto ponatur: $\pi\int\frac{x\,dy-y\,dx}{\alpha\alpha.(x+\beta y)^2+\varepsilon\varepsilon yy} + \phi\int\frac{x\,dy-y\,dx}{\gamma\gamma.(x+\sigma y)^2+\theta\theta yy}$ $+ l(\alpha\alpha.(x+\beta y)^2+\varepsilon\varepsilon yy)\times(\gamma\gamma.(x+\delta y)^2+\theta\theta yy)) = C.$ Et ita habentur octo aſſumtæ litteræ pro totidem comparationibus faciendis.

Pro canonica quarti ordinis, addenda eſt ad aſſumtam adhuc $\lambda l(x+\mu y)$. Et ita procedendum in infinitum. Hac methodo poteſt æquatio canonica $(ax+by)dx+(cx+ey)dy=0$, reſolvi per meros logarithmos, ubi rei natura hoc permittit, ut faciliori forſan modo perveniatur ad æquationem exponentialem, quam edocui in *Commentariis Petropolit.* * In hunc finem ita procedo. Fiat $\pi\int\frac{x\,dy-y\,dx}{\alpha\alpha.(x+\beta y)^2-\varepsilon\varepsilon yy} + l(\alpha\alpha.(x+\beta y)^2 - \varepsilon\varepsilon yy) = C.$ Quod ſi differentietur, habebitur

$$\begin{array}{l} 2\alpha\alpha x dx + 2\alpha\alpha\beta y dx + 2\alpha\alpha\beta x dy + 2\alpha\alpha\beta^2 y dy = 0, \\ \quad - \pi y dx \quad + \pi x dy \quad - 2\varepsilon\varepsilon y dy \end{array}$$

compa-

* N°. CXXXV, *Tom. III*, pag. 108.

comparanda cum proposita $axdx + bydx + cxdy + eydy = 0$, ubi nulla est alia differentia, quam quod hic semper habeatur $-\varepsilon\varepsilon$ pro $+\varepsilon\varepsilon$. Faciendo ergo $2\alpha\alpha = a$, $2\alpha\alpha\beta - \pi = b$, $2\alpha\alpha\beta + \pi = c$; nunc vero $2\alpha\alpha\beta\beta - 2\varepsilon\varepsilon = e$, & quærendo valores litterarum invenietur $\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}a}$, $\beta = (b+c) : 2a$, $\pi = \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}b$; sed $\varepsilon = \sqrt{((b+c)^2 - 4ae)} : \sqrt{8a}$. His ergo valoribus substitutis in formula habetur

$$\frac{c-b}{2}\int\frac{xdy - ydx}{\frac{1}{2}a.(x + \frac{b+c}{2a}y)^2 - (\frac{(b+c)^2 - 4ae}{8a})yy} +$$

$$l(\tfrac{1}{2}a(x + \frac{b+c}{2a}y)^2 - \frac{(b+c)^2 - 4ae}{8a}yy) = C.$$ Hinc ergo, & ex præcedentibus, patet formulam nostram pendere ex logarithmis quotiescunque $(b+c)^2 > 4ae$, sed ex rectificatione arcus circularis quando $(b+c)^2 < 4ae$. In posteriori casu rem jam vidimus; In priori casu vero res ita peragitur: In assumta expressione habetur $\frac{xdy - ydx}{\alpha\alpha.(x+\beta y)^2 - \varepsilon\varepsilon yy} = (\frac{xdy - ydx}{(x+\beta y)^2}) : (\alpha\alpha - \frac{\varepsilon\varepsilon yy}{(x+\beta y)^2})$

$= [$ posito $\frac{\varepsilon y}{x+\beta y} = z]$ $\frac{\frac{1}{\varepsilon}dz}{\alpha\alpha - zz} = \frac{1}{2\alpha\alpha\varepsilon} \times \frac{2\alpha\alpha dz}{\alpha\alpha - zz} = \frac{1}{2\alpha\alpha\varepsilon}$ $(\frac{\alpha dz}{\alpha + z} + \frac{\alpha dz}{\alpha - z})$. Ergo integrando & multiplicando per π, prodibit $\pi\int\frac{xdy - ydx}{\alpha\alpha.(x+\beta y)^2 - \varepsilon\varepsilon yy} = \frac{\pi}{2\alpha\varepsilon}\, l\frac{\alpha + z}{\alpha - z}$, & reponendo pro z ejus valorem $\frac{\varepsilon y}{x+\beta y}$, prodibit $\pi\int\frac{xdy - ydx}{\alpha\alpha.(x+\beta y)^2 - \varepsilon\varepsilon yy} = \frac{\pi}{2\alpha\varepsilon}$ $l((\alpha + \frac{\varepsilon y}{x+\beta y}) : (\alpha - \frac{\varepsilon y}{x+\beta y})) = \frac{\pi}{2\alpha\varepsilon}\, l\frac{\alpha x + \alpha\beta y + \varepsilon y}{\alpha x + \alpha\beta y - \varepsilon y}$

Adeoque substitutis pro α, β, ε, π eorum valoribus, habetur æquatio logarithmica hæc $\frac{c-b}{\sqrt{((b+c)^2 - 4ae)}} \times$

$$l\frac{x\sqrt{\frac{1}{2}a} + \frac{b+c}{2\sqrt{2a}}y + y\sqrt{((b+c)^2 - 4ae)} : \sqrt{8a}}{x\sqrt{\frac{1}{2}a} + \frac{b+c}{2\sqrt{2a}}y - y\sqrt{((b+c)^2 - 4ae)} : \sqrt{8a}} + l(\tfrac{1}{2}a(x + \frac{b+c}{2a}y)^2$$

$$- \frac{(b+c)^2 - 4ae}{8a}yy) = C.$$

 Quia

Quia autem $\frac{1}{2}a.\,(x+\frac{b+c}{2a}y)^2 - \frac{(b+c)^2-4ae}{8a}yy = (x\sqrt{\tfrac{1}{2}a} + \frac{b+c}{2\sqrt{2a}}y + \frac{y\sqrt{((b+c)^2-4ae)}}{2\sqrt{2a}}) \times (x\sqrt{\tfrac{1}{2}a} + \frac{b+c}{2\sqrt{2a}}y - \frac{y\sqrt{((b+c)^2-4ae)}}{2\sqrt{2a}})$; poterit æquatio inventa, per $\sqrt{((b+c)^2-4ae)}$ prius multiplicata ita exprimi $(c-b)\,l\,(x\sqrt{\tfrac{1}{2}a} + \frac{b+c}{2\sqrt{2a}}y + \frac{y\sqrt{((b+c)^2-4ae)}}{2\sqrt{2a}}) - (c-b)\,l\,(x\sqrt{\tfrac{1}{2}a} + \frac{b+c}{2\sqrt{2a}}y - \frac{y\sqrt{((b+c)^2-4ae)}}{2\sqrt{2a}}) + \sqrt{((b+c)^2-4ae)}\,l\,(x\sqrt{\tfrac{1}{2}a} + \frac{b+c}{2\sqrt{2a}}y + \frac{y\sqrt{((b+c)^2-4ae)}}{2\sqrt{2a}}) + \sqrt{((b+c)^2-4ae)}\,l\,(x\sqrt{\tfrac{1}{2}a} + \frac{b+c}{2\sqrt{2a}}y - \frac{y\sqrt{((b+c)^2-4ae)}}{2\sqrt{2a}}) = C$. Habebitur transeundo a logarithmis ad numeros, $(x\sqrt{\tfrac{1}{2}a} + \frac{b+c}{2\sqrt{2a}}y + \frac{y\sqrt{((b+c)^2-4ae)}}{2\sqrt{2a}})^{c-b+\sqrt{((b+c)^2-4ae)}} \times (x\sqrt{\tfrac{1}{2}a} + \frac{b+c}{2\sqrt{2a}}y - \frac{y\sqrt{((b+c)^2-4ae)}}{2\sqrt{2a}})^{-c+b+\sqrt{((c+b)^2-4ae)}} = C$. Et omnia sub parenthesibus multiplicando per $2\sqrt{2a}$; erit $(2ax + (b+c)y + y\sqrt{((b+c)^2-4ae)})^{c-b+\sqrt{((b+c)^2-4ae)}} \times (2ax+(b+c)y - y\sqrt{((b+c)^2-4ae)})^{-c+b+\sqrt{((c+b)^2-4ae)}} = C$: vel, brevitatis gratia, scribendo m pro $\sqrt{((b+c)^2-4ae)}$, prodit tandem hæc æquatio $(2ax+(b+c+m)y)^{c-b+m}\,(2ax+(b+c-m)y)^{-c+b+m} = C$; eodem prorsus modo ut inveni in priori Schediasmate edito in *Comment. Petropolitanis* *.

* N°. CXXXV, *Tom. III*, pag. 120.

PROBLE-

N°. CLVII.

PROBLEMA.

Invenire conditiones separabilitatis differentialium in æquationibus hujus formæ $as^m ds + bu^q s^p ds = du$.

SOLUTIO.

Cas. 1. Si $m = p$, patet separari posse dividendo per $a + bu^q$.

Cas. 2. Fiat $u = z^\alpha$, adeoque $du = \alpha z^{\alpha - 1} dz$; quibus substitutis prodit $as^m ds + bz^{\alpha q} s^p ds = \alpha z^{\alpha - 1} dz$; ubi si ponatur $m = \alpha q + p = \alpha - 1$ [ut nimirum indeterminatæ s & z eundem in omnibus terminis dimensionis numerum efficiant, adeoque per regulam generalem separabiles evadant] habebitur $m = (p + q) : (1 - q)$.

Cas. 3. Fiat $u = xy$, adeoque $du = xdy + ydx$; per substitutionem provenit $as^m ds + bx^q y^q s^p ds = xdy + ydx$. Ponatur $bx^q y^q s^p ds = xdy$, & $as^m ds = ydx$. Ut vero ubique æquationi satisfiat, sit $q = 1$; mutabitur prior in hanc $bys^p ds = dy$, ac proinde $bs^p ds = y^{-1} dy$; datur itaque y per s: sit ergo $y = S$; quo substituto in altera $as^m ds = ydx$, oritur $as^m ds = Sdx$, adeoque $\frac{as^m}{S} ds = dx$; dabitur ergo etiam x per S, sit igitur $x = \Sigma$: unde [existente $q = 1$] erit u [xy] $= S\Sigma$. Hac methodo jam usus sum in *Actis Lips.* A. 1697, *p.* 115 *, pro solutione æquationis similis a Fratre meo mihi propositi.

* N°. XXXV, *Tom. I*, pag. 175.

Cas. 4. Fiat $s = z^{\alpha}$, adeoque $ds = \alpha z^{\alpha - 1} dz$; quæ substituantur, & orietur $\alpha a z^{\alpha m + \alpha - 1} dz + \alpha b u^{q} z^{\alpha p + \alpha - 1} dz = du$; quare ut indeterminatæ ubique easdem dimensiones obtineant, ponendum est $\alpha m + \alpha - 1 = 0 = q + \alpha p + \alpha - 1$; ex priori habetur $m = (1 - \alpha) : \alpha$; ex altera vero $q = 1 - \alpha - \alpha p$; ubi notandum numerum α esse arbitrarium. Ex. gr. assumta $\alpha = \frac{1}{2}$, erit $m = 1$, & $q = (1 - p) : 2$. Hic casus ex secundo etiam deduci potest, atque si eliminetur α, ad eandem conditionem pervenietur.

Cas. 5. Dantur etiam casus, in quibus æquatio proposita ad algebraicam omnino reduci potest. Hoc modo: $as^{m} ds + bu^{q} s^{p} ds = du = \alpha du + (1 - \alpha) du$. Ponatur $as^{m} ds = \alpha du$, & $bu^{q} s^{p} ds = (1 - \alpha) du$, seu $bs^{p} ds = (1 - \alpha) u^{-q} du$; per utriusque integrationem provenit $\frac{a}{m+1} s^{m+1} = \alpha u$, & $\frac{b}{p+1} s^{p+1} = \frac{1 - \alpha}{-q+1} u^{-q+1}$; prior dat $u = \frac{a}{\alpha(1+m)} s^{m+1}$, altera vero $u = \left(\frac{b(1-q)}{(1-\alpha)(1+p)}\right)^{1:(1-q)} s^{(1+p):(1-q)}$. Ut igitur hi duo valores ipsius u identificentur, coæquandæ sunt tam dimensiones, quam coëfficientes; h. e. fiat $m + 1 = (1 + p) : (1 - q)$ & $a : \alpha(1 + m) = \left(\frac{b(1-q)}{(1-\alpha)(1+p)}\right)^{1:(1-q)}$; unde primo habetur $m = (p + q) : (1 - q)$; quæ est eadem conditio jam *Cas.* 2, & 4, inventa pro separabilitate tantum. Secundo erit $\left(\frac{a}{\alpha.(1+m)}\right)^{1-q} = \frac{b.(1-q)}{(1-\alpha).(1+p)}$, vel substituto valore ipsius $1 + m$, $\left(\frac{a.(1-q)}{\alpha.(1+p)}\right)^{1-q} = \frac{b.(1-q)}{(1-\alpha).(1+p)}$; hoc est $\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{1-q} \times \left(\frac{1-q}{1+p}\right)^{1-q} = \frac{b}{1-\alpha} \times \frac{1-q}{1+p}$, adeoque $\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{1-q} \times \left(\frac{1-q}{1+p}\right)^{-q} = \frac{b}{1-\alpha}$; reducta æquatione habetur

$b\,\alpha$

$b\alpha^{1-q} = (1-\alpha)\times a^{1-q}\times\left(\frac{1-q}{1+p}\right)^{-q} = (1-\alpha)\times a^{1-q}$ $\times(1-q)^{-q}\times(1+p)^{q}$. Cujus radix α determinat quæſitum.

Ex quo patet æquationem $as^{m}ds + bu^{q}s^{p}ds = du$ [quando nempe $m = (p+q):(1-q)$,] non tantum ad ſeparabilitatem differentialium reduci, ſed omnino algebraice exprimi poſſe, ci quippe reſpondet hæc $\frac{a}{\alpha.(1+m)}s^{1+m} = u$; adeo ut curva, cujus natura per dictam æquationem differentialem determinatur, eſſe poſſit ex Parabolarum genere.

ALITER ET FACILIUS.

Ponatur æquationem propoſitæ reſpondentem eſſe $\pi s^{\epsilon} = u$, erit $\epsilon\pi s^{\epsilon-1}ds = du$. Subſtituendo in propoſita loco u^{q} & du ipſarum valores, mutabitur in hanc $as^{m}ds + b\pi^{q}s^{\epsilon q+p}ds = \epsilon\pi s^{\epsilon-1}ds$, h. e. $as^{m} + b\pi^{q}s^{\epsilon q+p} = \epsilon\pi s^{\epsilon-1}$; quæ ut fiant perfecte æqualia, faciendum eſt $m = \epsilon q + p = \epsilon - 1$, & $a + b\pi^{q} = \epsilon\pi$; ex priori venit $m = (p+q):(1-q)$ & $\epsilon = (1+p):(1-q)$, ut ante; altera vero $b\pi^{q} - \epsilon\pi + a = 0$, dat $b\pi^{q} + \frac{-1-p}{1-q}\pi + a = 0$, cujus radix π erit parameter Parabolæ quæſitæ: adeoque in caſu quo $m = (p+q):(1-q)$, æquationi propoſitæ $as^{m}ds + bu^{q}s^{p}ds = du$ ſatisfacit hæc algebraïca $\pi s^{(1+p):(1-q)} = u$.

N°. CLVIII.

FORMULÆ REDUCTIONUM.

Videantur N^ri. CXIV & CXV, *Tom. II*, pag. 402.

I. $\int \frac{dx}{(e+fx^q)^n} = \int \frac{1}{(e+fx^q)^n} \times dx = \frac{x}{(e+fx^q)^n} + nq \int \frac{fx^q\, dx}{(e+fx^q)^{n+1}}$ $= \frac{x}{(e+fx^q)^n} + nq \int \frac{e+fx^q}{(e+fx^q)^{n+1}} dx - nq \int \frac{e\,dx}{(e+fx^q)^{n+1}} =$ $\frac{x}{(e+fx^q)^n} + nq \int \frac{dx}{(e+fx^q)^n} - nq \int \frac{e\,dx}{(e+fx^q)^{n+1}}$: Unde nqe $\int \frac{dx}{(e+fx^q)^{n+1}} = \frac{x}{(e+fx^q)^n} + (nq-1) \int \frac{dx}{(e+fx^q)^n}$.

COROLL. I. Existente $nq = 1$, erit $\frac{dx}{(e+fx^q)^{n+1}}$ absolute integrabile, utpote cujus integrale $= \frac{1}{e} \times \frac{x}{(e+fx^q)^n}$.

COROLL. II. $\int \frac{dx}{(e+fx^q)^{n+1}}$ dependet a $\int \frac{dx}{(e+fx^q)^n}$, & per eandem rationem $\int \frac{dx}{(e+fx^q)^n}$ a $\int \frac{dx}{(e+fx^q)^{n-1}}$, & ita porro; usquedum, supposito n numero integro & affirmativo, perveniatur ad $\int \frac{dx}{e+fx^q}$; a quo per consequens dependet $\int \frac{dx}{(e+fx^q)^n}$ nisi fortassis $(n-1).\,q = 1$; quo casu esset hoc absolute integrabile, ut & quicquid ab hoc dependet, nempe $\int \frac{dx}{(e+fx^q)^{n+m}}$.

II. $\int \frac{e\,dx}{e+fx^q} = \int \frac{e+fx^q}{e+fx^q} dx - \int \frac{fx^q dx}{e+fx^q} = x - \int \frac{fx^q\, dx}{e+fx^q}$;

adeo-

adeoque $f\int \frac{x^q dx}{e+fx^q} = x - e\int \frac{dx}{e+fx^q}$; hinc ergo $\int \frac{x^q dx}{e+fx^q}$ dependet a $\int \frac{dx}{e+fx^q}$.

III. $\int \frac{edx}{(e+fx^q)^2} = \int \frac{e+fx^q}{(e+fx^q)^2} dx - \int \frac{fx^q dx}{(e+fx^q)^2} =$ $\int \frac{dx}{e+fx^q} - \int \frac{fx^q dx}{(e+fx^q)^2}$; unde $f\int \frac{x^q dx}{(e+fx^q)^2} = \int \frac{dx}{e+fx^q} -$ $e\int \frac{dx}{(e+fx^q)^2}$; $=$ [per primam] $\frac{1}{q}\int \frac{dx}{e+fx^q} - \frac{1}{q} \times \frac{x}{e+fx^q}$; adeoque $fq\int \frac{x^q dx}{(e+fx^q)^2} = \frac{-x}{e+fx^q} + \int \frac{dx}{e+fx^q}$. Hinc igitur $\int \frac{x^q dx}{(e+fx^q)^2}$ dependet a $\int \frac{dx}{e+fx^q}$.

IV. $\int \frac{dx}{(e+fx^q)^{n+1}} = \frac{1}{e}\int \frac{e+fx^q}{(e+fx^q)^{n+1}} dx - \frac{1}{e}\int \frac{fx^q dx}{(e+fx^q)^{n+1}}$ $= \frac{1}{e}\int \frac{dx}{(e+fx^q)^n} - \frac{f}{e}\int \frac{x^q dx}{(e+fx^q)^{n+1}}$. Itaque $\frac{f}{e}\int \frac{x^q dx}{(e+fx^q)^{n+1}}$ $= \frac{1}{e}\int \frac{dx}{(e+fx^q)^n} - \int \frac{dx}{(e+fx^q)^{n+1}} =$ [per primam] $\frac{1}{e}\int \frac{dx}{(e+fx^q)^n} - \frac{1}{nqe} \times \frac{x}{(e+fx^q)^n} - \frac{nq-1}{nqe} \times \int \frac{dx}{(e+fx^q)^n} =$ $\frac{1}{nqe}\int \frac{dx}{(e+fx^q)^n} - \frac{1}{nqe} \times \frac{x}{(e+fx^q)^n}$; adeoque $nfq \times \int \frac{x^q dx}{(e+fx^q)^{n+1}}$ $= \int \frac{dx}{(e+fx^q)^n} - \frac{x}{(e+fx^q)^n}$. Hinc ergo $\int \frac{x^q dx}{(e+fx^q)^{n+1}}$ dependet a $\int \frac{dx}{(e+fx^q)^n}$.

 V. Quia

V. Quia $\int \frac{x^q\, dx}{(e+fx^q)^{n-1}} = \int \frac{ex^q + fx^{2q}}{(e+fx^q)^n} dx = e\int \frac{x^q\, dx}{(e+fx^q)^n} + f\int \frac{x^{2q}\, dx}{(e+fx^q)^n}$; patet $\int \frac{x^{2q}\, dx}{(e+fx^q)^n} = \frac{1}{f}\int \frac{x^q\, dx}{(e+fx^q)^{n-1}} - \frac{e}{f}\int \frac{x^q\, dx}{(e+fx^q)^n}$, hoc est per præced. a $\int \frac{dx}{e+fx^q}$ dependere.

VI. Eodem modo demonstratur $\int \frac{x^{3q}\, dx}{(e+fx^q)^n}$, $\int \frac{x^{4q}\, dx}{(e+fx^q)^n}$ & [sumto p pro numero integro & affirmativo] generaliter $\int \frac{x^{pq}\, dx}{(e+fx^q)^n}$ dependere a $\int \frac{dx}{e+fx^q}$. Quod est Theor. V *.

VII. Quia, per Coroll. I, Prop. I, existente $nq = 1$; erit $\frac{dx}{(e+fx^q)^{n+1}}$ absolute integrabile, & quia per ipsam Prop. I, $\int \frac{dx}{(e+fx^q)^{n+2}}$ dependet a $\int \frac{dx}{(e+fx^q)^{n+1}}$, atque $\int \frac{dx}{(e+fx^q)^{n+3}}$ a $\int \frac{dx}{(e+fx^q)^{n+2}}$, & ita deinceps, sequitur [assumto k pro quolibet numero integro affirmativo, excepta cyphra] fore $\int \frac{dx}{(e+fx^q)^{1:q+k}}$ absolute quadrabilem. Quod est Theor. I. †

VIII. Quia etiam, per Propositionem IV, $nfq \int \frac{x^q dx}{(e+fx^q)^{n+1}} = \int \frac{dx}{(e+fx^q)^n} - \frac{x}{(e+fx^q)^n}$, existente vero $nq - q = 1$; per Coroll. II, est $\int \frac{dx}{(e+fx^q)^n}$ absolute quadrabilis; erit per con-

* N°. CXIV, *Tom. II*, pag. 418. † Ibid. pag. 417.

consequens etiam $\int \frac{x^q\,dx}{(e+fx^q)^{(2q+1):q}}$ absolute quadrabilis.

IX. Quia $\int \frac{x^{2q}\,dx}{(e+fx^q)^n} = \frac{1}{f}\int \frac{x^q\,dx}{(e+fx^q)^{n-1}} - \frac{e}{f}\int \frac{x^q\,dx}{(e+fx^q)^n}$, per V; hæ vero partes simul non possunt esse quadrabiles; sequitur $\int \frac{x^{2q}\,dx}{(e+fx^q)^n}$ non esse quadrabilem. Idem etiam valet de $\int \frac{x^{3q}\,dx}{(e+fx^q)^n}$, $\int \frac{x^{4q}\,dx}{(e+fx^q)^n}$, & in genere de $\int \frac{x^{pq}\,dx}{(e+fx^q)^n}$; quamvis interim singulæ dependeant a $\int \frac{dx}{e+fx^q}$.

X. $\int \frac{dx}{(e+fx^q)^{1:q+k}} = \int \frac{(e+fx^q)\,dx}{(e+fx^q)^{1:q+k+1}}$; quia itaque, per VII, totum est quadrabile, & per eandem etiam pars $\int \frac{e\,dx}{(e+fx^q)^{1:q+k+1}}$; erit quoque reliquum $f\int \frac{x^q\,dx}{(e+fx^q)^{1:q+k+1}}$ quadrabile.

XI. Pariter $\int \frac{x^q\,dx}{(e+fx^q)^{1:q+k+1}} = \int \frac{(ex^q+fx^{2q})\,dx}{(e+fx^q)^{1:q+k+2}}$. Ergo quia, per præced. totum est quadrabile; ut & ablatum; erit etiam quadrabile reliquum $f\int \frac{x^{2q}\,dx}{(e+fx^q)^{1:q+k+2}}$.

XII. Per processus continuationem probabitur generaliter, quadrabilem esse hanc Formulam $\int \frac{x^{pq}\,dx}{(e+fx^q)^{1:q+k+p}}$. Quod est Theor. II. *

N 2 XIII.

* Ibid. pag. 417.

XIII. Quia itaque $\int \frac{x^{pq}\,dx}{(e+fx^q)^{1:q+k+p}}$ = [dividendo numeratorem & denominatorem per $x^{1+kq+pq}$] $\int \frac{x^{-kq-1}\,dx}{(ex^{-q}+f)^{1:q+k+p}}$; Ergo nominando e per f, f per e, $-q$ per $+q$, erit $\int \frac{x^{kq-1}\,dx}{(e+fx^q)^{-1:q+k+p}}$ quadrabilis. Quod est THEOR. III, & IV. *

XIV. Porro quia $\int \frac{x^{pq}\,dx}{(e+fx^q)^n}$ = [dividendo numeratorem & denominatorem per x^{qn}] $\int \frac{x^{pq-nq}\,dx}{(ex^{-q}+f)^n}$; ergo etiam nominando e per f, & f per e, & $-q$ per $+q$, prodibit $\int \frac{x^{nq-pq}\,dx}{(e+fx^q)^n}$; vel, vocando $n-p$ per $-p$, provenit $\int \frac{x^{-pq}\,dx}{(e+fx^q)^n}$ dependens a $\int \frac{dx}{e+fx^q}$. Quod est THEOR. VI. † Hæc dudum inventa habui.

NB. *Theorema* VII facile reducitur ad *Theor.* V, ponendo tantum $x^{l+1} = z$. Et Theor. VIII est tantum Corollarium utriusque.

Alia Methodus pro reductione Formulæ $dx : \sqrt[n]{(x^n + a)}$ Petropoli *nuper missæ.*

Ponatur $\sqrt[n]{(x^n + a)} = xz$, unde $x^n + a = x^n z^n$, seu $(z^n - 1)\,x^n = a$, vel $x^n = a : (-1 + z^n)$. Hinc nlx =

* Ibid. pag. 417, 418. † Ibid. pag. 418.

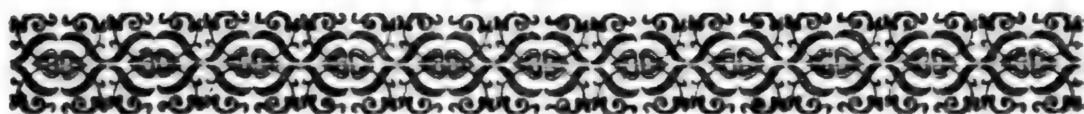
$= la - l(-1+z^n)$; differentiando $dx:x = -z^{n-1} dz:(z^n-1)$. Per ſubſtitutionem aſſumptæ quantitatis xz pro $\sqrt[n]{(x^n+a)}$, provenit $dx:\sqrt[n]{(x^n+a)} = dx:xz$, ubi pro $dx:x$ ſubſtituatur valor inventus $-z^{n-1}dz:(z^n-1)$; emergit $dx:\sqrt{(x^n+a)} = -z^{n-2}dz:(z^n-1)$.

Pro EULERI noſtri, vel Filii mei *Danielis* expreſſione $dx:\sqrt[n]{(a+bx^n)}$ ſic pariter procedo. Pono $\sqrt[n]{(a+bx^n)} = xz$, $a+bx^n = x^n z^n$, $(z^n-b)x^n = a$, $x^n = a:(z^n-b)$, $nlx = la - l(z^n-b)$, $dx:x = -z^{n-1}dz:(z^n-b)$. Per ſubſtitutionem xz pro $\sqrt[n]{(a+bx^n)}$ habetur $dx:\sqrt[n]{(a+bx^n)} = dx:xz = -z^{n-2}dz:(z^n-b)$. Quæ fractio cum ſit rationalis, patet reduci poſſe ad quadraturam Circuli, vel ad Logarithmos; ſed non video dari caſus abſolute quadrabiles.

GENERALIUS.

Sit formula reducenda $dx:\sqrt[n]{(ax^p+bx^n)}$. Pono, ut ante, $ax^p+bx^n = x^n z^n$, $(z^n-b)x^n = ax^p$, $z^n-b = ax^{p-n}$, $l(z^n-b) = la + (p-n)lx$, $nz^{n-1}dz:(z^n-b) = (p-n)dx:x$. Hinc $dx:\sqrt[n]{(ax^p+bx^n)} = dx:xz = \frac{n}{p-n}z^{n-2}dz:(z^n-b)$.

COROLL. Vocetur $p = q+n$, & erit $dx:\sqrt[n]{(ax^{q+n}+bx^n)} = dx:x\sqrt[n]{(ax^q+b)}$; quæ nova eſt formula reducibilis.



No. CLIX.

RESOLUTIO

Binomii $1 \pm x^n$ *in suos Factores reales duarum dimensionum.*

SIT primo n numerus par, adhibito signo superiori $+$, a cujus quippe resolutione etiam resolutio reliquorum Casuum dependet. Hunc in finem, formo Tabellam sequentem, quæ incipit a simplicissimis & ad magis compositos progreditur, unde aliqua progressionis Lex elucescet.

TAB. I.

1 $1+xx = 1+xx$

2 $1+x^4 = (1+xx+x\sqrt{2}).(1+xx-x\sqrt{2})$

3 $1+x^6 = (1+xx).(1+xx+x\sqrt{3}).(1+xx-x\sqrt{3})$

4 $1+x^8 = (1+xx+x\sqrt{(2+\sqrt{2})}).(1+xx-x\sqrt{(2+\sqrt{2})}).$
$(1+xx+x\sqrt{(2-\sqrt{2})}).(1+xx-x\sqrt{(2-\sqrt{2})})$

5 $1+x^{10} = (1+xx).(1+xx+x\sqrt{\tfrac{1}{2}}.\sqrt{(5+\sqrt{5})}).(1+xx-x\sqrt{\tfrac{1}{2}}.\sqrt{(5+\sqrt{5})}).$
$(1+xx+x\sqrt{\tfrac{1}{2}}.\sqrt{(5-\sqrt{5})}).(1+xx-x\sqrt{\tfrac{1}{2}}.\sqrt{(5-\sqrt{5})})$

6 $1+x^{12} = (1+xx+x\sqrt{2}).(1+xx-x\sqrt{2}).(1+xx+x\sqrt{(2+\sqrt{3})}).$
$(1+xx-x\sqrt{(2+\sqrt{3})}).(1+xx+x\sqrt{(2-\sqrt{3})}).$
$(1+xx-x\sqrt{(2-\sqrt{3})})$

7 $1+x^{14} = (1+xx).(1+xx+px).(1+xx-px).(1+xx+qx).$
$(1+xx-qx).(1+xx+rx).(1+xx-rx)$

NB. Litteræ p, q & r determinantur per tres sequentes æquationes $pp+qq+rr=7$
$ppqq+pprr+qqrr=14$
$ppqqrr=7$

2+

9 $1+x^{16}=(1+xx+x\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{2})})}).(1+xx-x\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{2})})}).$
$(1+xx+x\sqrt{(2+\sqrt{(2-\sqrt{2})})}).(1+xx-x\sqrt{(2+\sqrt{(2-\sqrt{2})})}).$
$(1+xx+x\sqrt{(2-\sqrt{(2-\sqrt{2})})}).(1+xx-x\sqrt{(2-\sqrt{(2-\sqrt{2})})}).$
$(1+xx+x\sqrt{(2-\sqrt{(2+\sqrt{2})})}).(1+xx-x\sqrt{(2-\sqrt{(2+\sqrt{2})})}).$

8 $1+x^{18}=(1+xx).(1+xx+px).(1+xx-px).(1+xx+qx).(1+xx-qx).(1+xx+rx).(1+xx-rx).(1+xx+sx).(1+xx-sx).$

NB. Litteræ p, q, r & s determinantur per compendium ita:

$1+x^{18}=(1+x^{6}).(1-x^{6}+x^{12})=(1+xx).(1+xx+x\sqrt{3}).(1+xx-x\sqrt{3}).(1+x^{4}+pxx).(1+x^{4}+qxx).(1+x^{4}+rxx)$

ubi p, q & r sunt tres radices hujus æquationis $z^{3}-3z+1=0$, quarum minima est Chorda decimæ octavæ partis circumferentiæ, media est Chorda $\frac{13}{18}$ circumferentiæ, & maxima negative sumenda est Chorda $\frac{7}{18}$ circumferentiæ. Est vero

$1+x^{4}+pxx=(1+xx+x\sqrt{(2-p)}).(1+xx-x\sqrt{(2-p)})$
$1+x^{4}+qxx=(1+xx+x\sqrt{(2-q)}).(1+xx-x\sqrt{(2-q)})$
$1+x^{4}+rxx=(1+xx+x\sqrt{(2-r)}).(1+xx-x\sqrt{(2-r)})$

Adeoque

$1+x^{18}=(1+xx).(1+xx+x\sqrt{3}).(1+xx-x\sqrt{3}).(1+xx+x\sqrt{(2-p)}).(1+xx-x\sqrt{(2-p)}).(1+xx+x\sqrt{(2-q)}).(1+xx-x\sqrt{(2-q)}).(1+xx+x\sqrt{(2-r)}).(1+xx-x\sqrt{(2-r)}).$

SCHOLIUM.

Constructio hujus Tab. I fundatur in hac altera

TAB. II.

3 $1+x^{6}=(1+xx).(1-xx+x^{4})$
5 $1+x^{10}=(1+xx).(1-xx+x^{4}-x^{6}+x^{8})$
7 $1+x^{14}=(1+xx).(1-xx+x^{4}-x^{6}+x^{8}-x^{10}+x^{12})$
9 $1+x^{18}=(1+xx).(1-xx+x^{4}-x^{6}+x^{8}-x^{10}+x^{12}-x^{14}+x^{16})$
11 $1+x^{22}=(1+xx).(1-xx+x^{4}-x^{6}+x^{8}-x^{10}+x^{12}-x^{14}+x^{16}-x^{18}+x^{20})$
13 $1+x^{26}=(1+xx).(1-xx+$ &c. .)
&c. &c. = &c. &c.)

Ut autem factores compositi $1-xx+x^{4}-x^{6}+x^{8}-x^{10}+$&c. resolvantur in simplices, incipiatur a primo $1-xx+x^{4}$, qui

O 2 ponatur

ponatur $=(1+xx+px).(1+xx-px)$, unde erit $1-xx+x^4 =1+(2-p^2)xx+x^4$, id quod dat $p=\sqrt{3}$; & sic erit $1-xx+x^4=(1+xx+x\sqrt{3}).(1+xx-x\sqrt{3})$. Ponatur jam $1-xx+x^4-x^6+x^8=(1+xx+px).(1+xx-px).(1+xx+qx).(1+xx-qx)$; quod actu multiplicatum facit

$$\begin{array}{llllll} 1-xx+x^4-x^6+x^8= & 1 & +4xx & +6x^4 & +4x^6 & +x^8, \text{ hinc,} \\ & & -pp & -2pp & -pp & \\ & & -qq & -2qq & -qq & \\ & & & +ppqq & & \end{array}$$

comparatis terminis homogeneis, habetur $4-pp-qq=-1$, $6-2pp-2qq+ppqq=+1$; ex priori fit $pp+qq=5$, ex posteriori autem $ppqq=5$, seu $pq=\sqrt{5}$ & $2pq=2\sqrt{5}$; proinde $pp\pm 2pq+qq=5\pm 2\sqrt{5}$; extractaque radice $p\pm q=\sqrt{(5\pm 2\sqrt{5})}$, hinc $(p+q).(p-q)$ sive $pp-qq=\sqrt{5}$, addendo itaque & subtrahendo ipsi $pp+qq=5$, oritur $2pp=5+\sqrt{5}$, & $2qq=5-\sqrt{5}$, tandemque $p=\sqrt{\tfrac{1}{2}}.\sqrt{(5+\sqrt{5})}$ & $q=\sqrt{\tfrac{1}{2}}.\sqrt{(5-\sqrt{5})}$. Quibus substitutis erit $1-xx+x^4-x^6+x^8=(1+xx+x\sqrt{\tfrac{1}{2}}.\sqrt{(5+\sqrt{5})}).(1+xx-x\sqrt{\tfrac{1}{2}}.\sqrt{(5+\sqrt{5})}).(1+xx+x\sqrt{\tfrac{1}{2}}.\sqrt{(5-\sqrt{5})}).(1+xx-x\sqrt{\tfrac{1}{2}}.\sqrt{(5-\sqrt{5})})$.

NB. Possunt valores ipsarum pp & qq determinari hac æquatione $zz-5z+5=0$.

Porro ponatur $1-xx+x^4-x^6+x^8-x^{10}+x^{12}=(1+xx+px).(1+xx-px).(1+xx+qx).(1+xx-qx).(1+xx+rx).(1+xx-rx)$; quibus actu multiplicatis, habetur $1-xx+x^4-x^6+x^8-x^{10}+x^{12}=$

$$\begin{array}{lllllll} 1+ & 6xx & +15x^4 & +20x^6 & +15x^8 & +6x^{10} & +x^{12} \\ & -pp & -4pp & -6pp & -4pp & -pp & \\ & -qq & -4qq & -6qq & -4qq & -qq & \\ & -rr & -4rr & -6rr & -4rr & -rr & \\ & & +ppqq & +2ppqq & +ppqq & & \\ & & +pprr & +2pprr & +pprr & & \\ & & +qqrr & +2qqrr & +qqrr & & \\ & & & -ppqqrr & & & \end{array}$$

Collatis

Collatis terminis homogeneis, emergit $pp + qq + rr = 7$, $ppqq + pprr + qqrr = 14$, & $ppqqrr = 7$. Valores litterarum pp, qq, rr, habentur sumendo tres radices hujus æquationis $z^3 - 7zz + 14z - 7 = 0$. Observando legem progressionis, inveniuntur factores sequentis $1 - xx + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + x^{12} - x^{14} + x^{16}$; adhibitis nempe pp, qq, rr, ss, erit illa =

$1 +$	$8xx$	$+28x^4$	$+56x^6$	$+70x^8$	$+56x^{10}$	$+28x^{12}$	$+8x^{14}$	$+x^{16}$
	$-pp$	$-6pp$	$-15pp$	$-20pp$	$-15pp$	$-6pp$	$-pp$	
	$-qq$	$-6qq$	$-15qq$	$-20qq$	$-15qq$	$-6qq$	$-qq$	
	$-rr$	$-6rr$	$-15rr$	$-20rr$	$-15rr$	$-6rr$	$-rr$	
	$-ss$	$-6ss$	$-15ss$	$-20ss$	$-15ss$	$-6ss$	$-ss$	
		$+ppqq$	$+4ppqq$	$+6ppqq$	+ &c.	+ &c.		
		$+pprr$	$+4pprr$	$+6pprr$	&c.	&c.		
		$+ppss$	$+4ppss$	$+6ppss$				
		$+qqrr$	$+4qqrr$	$+6qqrr$				
		$+qqss$	$+4qqss$	$+6qqss$				
		$+rrss$	$+4rrss$	$+6rrss$				
			$-ppqqrr$	$-2ppqqrr$				
			$-ppqqss$	$-2ppqqss$				
			$-pprrss$	$-2pprrss$				
			$-qqrrss$	$-2qqrrss$				
				$+ppqqrrss$				

Ex comparatione homogeneorum prodit $pp + qq + rr + ss = 9$, $ppqq + pprr + ppss + qqrr + qqss + rrss = 27$, $ppqqrr + ppqqss + pprrss + qqrrss = 30$, $ppqqrrss = 9$. Quare quatuor Radices hujus æquationis $z^4 - 9z^3 + 27zz - 30z + 9 = 0$, dabunt valores litterarum pp, qq, rr, ss.

Conjectis istis Valoribus litterarum pp, qq, rr, &c. pro quolibet casu in Tabellam; apparebit illa ut sequitur.

T A B. III.

Pro casu
- Tertio $1 + x^6$ habetur $z - 3 = 0$
- Quinto $1 + x^{10}$ .... $zz - 5z + 5 = 0$
- Septimo $1 + x^{14}$ .... $z^3 - 7zz + 14z - 7 = 0$
- Nono $1 + x^{18}$ .... $z^4 - 9z^3 + 27zz - 30z + 9 = 0$
- Undecim. $1 + x^{22}$ .... $z^5 - 11z^4 + 44z^3 - 77zz + 55z - 11 = 0$.

O 3 Gene-

Generaliter vero hos Casus determinare licet, faciendo; $1+x^{4n+2}=(1+xx).(1-xx+x^4-x^6.\;.\;.\;.\;.\;x^{4n})$ tum ponendo $1-xx+x^4-x^6.\;.\;.\;.\;.\;x^{4n}=(1+xx+px).(1+xx-px).(1+xx+qx).(1+xx-qx).(1+xx+rx).(1+xx-rx)$. &c. Prodibit observata lege progressionis, quæ in eo consistit, ut numeri puri præfixi potestatibus xx, x^4, x^6 &c. sint coëfficientes terminorum binomii ad $2n$ elevati, deinde numeri præfixi litteris pp, qq, rr &c. coëfficientes sint binomii ad $2n-2$ elevati, postea numeri ipsis $ppqq$, $pprr$, &c. coëfficientes binomii ad $2n-4$ elevati, & ita porro; hæc æquatio

$$(1-xx+x^4-x^6+x^8-x^{10}+\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;x^{4n})=$$

$$1+\frac{2n}{1}xx+\frac{2n.2n-1}{1.2}x^4+\frac{2n.\,2n-1.\,2n-2}{1.\,2.\,3}x^6+\frac{2n.2n-1.2n-2.2n-3}{1.\,2.\,3.\,4}x^8+\&c.$$

$$=P-\frac{2n-2}{1}P-\frac{2n-2.2n-3}{1.\,2}P-\frac{2n-2.2n-3.2n-4}{1.\,2.\,3.}P$$

$$+Q+\frac{2n-4}{1}Q+\frac{2n-4.\,2n-5}{1.\,2}Q$$

$$+R-\frac{2n-6}{1}R$$

$$+S$$

Intelligo per P summam omnium $pp+qq+rr+$ &c. per Q summam omnium productorum ex singulis binis $ppqq+pprr+qqrr+$ &c. per R summam omnium productorum ex singulis ternis $ppqqrr+$ &c. per S summam omnium ex singulis quaternis $ppqqrrss+$ &c. per T summam omnium ex singulis quinis $ppqqrrsstt+$ &c. Et ita deinceps.

Hinc ponendo $\left.\begin{matrix}\frac{2n}{1}\\ -P\end{matrix}\right\}=-1,\;\left.\begin{matrix}+\frac{2n.\,2n-1}{1.\,2}\\ -\frac{2n-2}{1}P\\ +Q\end{matrix}\right]=+1;$

$$\left.\begin{array}{l} +\frac{2n.2n-1.2n-2}{1.\ 2.\ 3} \\ -\frac{2n-2.\ 2n-3}{1.\ 2}P \\ +\frac{2n-4}{1}Q \\ -R \end{array}\right\}=-1,\quad \left.\begin{array}{l} +\frac{2n.2n-1.2n-2.2n-3}{1.\ 2.\ 3.\ 4} \\ -\frac{2n-2.2n-3.2n-4}{1.\ 2.\ 3}P \\ +\frac{2n-4.2n-5}{1.\ 2}Q \\ -\frac{2n-6}{1}R \\ +S \end{array}\right\}=+1.\ \&c.$$

Invenientur successive singula P, Q, R, S, T, &c. posteriora ex prioribus; erit namque

$P = 2n + 1.$

$Q = (2n-2)P - \frac{2n.\ 2n-1}{1.2} + 1,$

$R = (2n-4)Q - \frac{2n-2.\ 2n-3}{1.2}P + \frac{2n.2n-1.2n-2}{1.2.3} + 1,$

$S =$ &c.

Ut nunc determinentur etiam casus comprehensi sub num. 2, 4, 6, &c. Tab. I, ubi exponens potestatis xx est numerus pariter par, qui in hactenus pertractatis erat impariter par, considerānda est Tabula sequens.

T A B. IV.

Pro casu {

Secundo $1+x^4=(1+xx+px).(1+xx-px)$

Quarto $1+x^8=(1+xx+px).(1+xx-px).$
$(1+xx+qx).(1+xx-qx)$

Sexto $1+x^{12}=(1+xx+px).(1+xx-px).$
$(1+xx+qx).(1+xx-qx).$
$(1+xx+rx).(1+xx-rx)$

⋮

$2n^o.$ $1+x^{4n}=(1+xx+px).(1+xx-px).$
$(1+xx+qx).(1+xx-qx).$
$(1+xx+rx).(1+xx-rx).$
&c. &c.

ad-

adhibendo tot litteras p, q, r &c. quot ſunt unitates in n.

Hoc modo acquiritur per actualem multiplicationem, quod ſequitur in Tab. V.

T A B. V.

$$2 \quad 1+x^4 = 1 + 2xx + x^4$$
$$-pp$$

$$4 \quad 1+x^8 = 1 + 4xx + 6x^4 + 4x^6 + x^8$$
$$-pp - 2pp - pp$$
$$-qq - 2qq - qq$$
$$+ppqq$$

$$6 \quad 1+x^{12} = 1 + 6xx + 15x^4 + 20x^6 + 15x^8 + 6x^{10} + x^{12}$$
$$-pp - 4pp - 6pp - 4pp - pp$$
$$-qq - 4qq - 6qq - 4qq - qq$$
$$-rr - 4rr - 6rr - 4rr - rr$$
$$+ppqq + 2ppqq + ppqq$$
$$+pprr + 2pprr + pprr$$
$$+qqrr + 2qqrr + qqrr$$
$$-ppqqrr$$

$$2n \quad 1+x^{4n} = 1 + \frac{2n}{1}xx + \frac{2n.2n-1}{1.2}x^4 + \frac{2n.2n-1.2n-2}{1.2.3}x^6 + \frac{2n.2n-1.2n-2.2n-3}{1.2.3.4}x^8 + \&c.$$
$$-P - \frac{2n-2}{1}P - \frac{2n-2.2n-3}{1.2}P - \frac{2n-2.2n-3.2n-4}{1.2.3}P$$
$$+Q + \frac{2n-4}{1}Q + \frac{2n-4.2n-5}{1.2}Q$$
$$-R - \frac{2n-6}{1}R$$
$$+S$$

Hic ex comparatione homogeneorum patet, coëfficientes terminorum intermediorum ponendos eſſe $=0$, hoc eſt

$$\left.\begin{matrix} 2n \\ -P \end{matrix}\right\} = 0, \quad \left.\begin{matrix} \frac{2n.2n-1}{1.2} \\ -\frac{2n-2}{1}P \\ +Q \end{matrix}\right\} = 0,$$

2n.

$$\left.\begin{array}{c} \frac{2n.2n-1.2n-2}{1.2.3} \\ -\frac{2n-2.2n-3}{1.2}P \\ +\frac{2n-4}{1}Q \\ -R \end{array}\right\}=0,\quad \left.\begin{array}{c} \frac{2n.2n-1.2n-2.2n-3}{1.2.3.4} \\ -\frac{2n-2.2n-3.2n-4}{1.2.3}P \\ +\frac{2n-4.2n-5}{1.2}Q \\ -\frac{2n-6}{1}R \\ +S \end{array}\right\}=0,\&c.$$

Hoc pacto inveniuntur P, Q, R, S, T, &c. posteriora ex prioribus, nempe.

$$P=2n$$

$$Q=(2n-2)P-\frac{2n.2n-1}{1.2}$$

$$R=(2n-4)Q-\frac{2n-2.2n-3}{1.2}P+\frac{2n.2n-1.2n-2}{1.2.3},$$

$S=$ &c.

Id si ad casus speciales successive applicetur, obtinebitur.

TAB. VI.

Pro casu:

- Secundo $1+x^4 \ldots z-2=0.$
- Quarto $1+x^8 \ldots zz-4z+2=0.$
- Sexto $1+x^{12} \ldots z^3-6zz+9z-2=0.$
- Octavo $1+x^{16} \ldots z^4-8z^3+20zz-16z+2=0.$
- Decimo $1+x^{20} \ldots z^5-10z^4+35z^3-50zz+25z-2=0.$

Harum æquationum radices dant suas respective quantitates pp, qq, rr &c.

Quod nunc attinet ad easdem illas formulas, adhibito signo negativo $-$, & existente n numero pari, liquet eas resolvi posse ut exhibet Tabula sequens.

TAB. VII.

1 $1 - xx = 1 - xx \text{ seu } (1 + x).(1 - x)$

2 $1 - x^4 = (1 - xx).(1 + xx)$

3 $1 - x^6 = (1 - xx).(1 + xx + x^4)$

4 $1 - x^8 = (1 - xx).(1 + xx + x^4 + x^6) = (1 - xx).(1 + xx).(1 + x^4)$

5 $1 - x^{10} = (1 - xx).(1 + xx + x^4 + x^6 + x^8)$

6 $1 - x^{12} = (1 - xx).(1 + xx + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10})$

$= (1 - xx).(1 + xx).(1 + x^4 + x^8)$

7 $1 - x^{14} = (1 - xx).(1 + xx + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10} + x^{12})$

8 $1 - x^{16} = (1 - xx).(1 + xx + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10} + x^{12} + x^{14})$

$= (1 - xx).(1 + xx).(1 + x^4 + x^8 + x^{12})$

$= (1 - xx).(1 + xx).(1 + x^4).(1 + x^8)$

9 $1 - x^{18} = (1 + xx).(1 + xx + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10} + x^{12} + x^{14} + x^{16})$

10 $1 - x^{20} = (1 - xx).(1 + xx + x^4 \ldots\ldots\ldots + x^{16} + x^{18})$

$= (1 - xx).(1 + xx).(1 + x^4 + x^8 + x^{12} + x^{16}).$

Qui casus omnes, ceu liquet, resolvuntur per Methodum ad Tab. III. explicatam.

SCHOLIUM.

Possunt etiam resolvi primo in factores duos dimensionis dimidiæ, & deinde qui gaudet signo — & numero dimensionis pari iterum in duos factores dimensionis dimidiæ, idque iterum donec ad dimensionem imparem perveniatur; atque ita tandem res reducta sit ad resolutionem binomiorum dimensionis imparis, quod negotii post Exemplum aliquod aggrediemur.

Sit ex. gr. $1 - x^{20}$ resolvendum: Ponatur $1 - x^{20} = (1 + x^{10}).(1 - x^{10}) = (1 + x^{10}).(1 + x^5).(1 - x^5)$; Primus istorum factorum $1 + x^{10}$ resolutus est in superioribus, reliqui duo resolventur per nunc tradenda.

TAB. VIII.

T A B. VIII.

Continens resolutionem binomiorum potestatum imparium.

1 | $1 \pm x = 1 \pm x.$
2 | $1 \pm x^3 = (1 \pm x).(1 \mp x + xx)$
3 | $1 \pm x^5 = (1 \pm x).(1 \mp x + xx \mp x^3 + x^4)$
4 | $1 \pm x^7 = (1 \pm x).(1 \mp x + xx \mp x^3 + x^4 \mp x^5 + x^6)$

Hi autem factores resolvuntur simili modo ut supra factum post Tab. III, vel quod commodius est: Fiat $x = yy$, hoc enim modo reducuntur formulæ ad exponentes pares dimensionum, habebitur nempe

1 | $1 \pm x = 1 \pm x = 1 \pm yy$
2 | $1 \pm x^3 = (1 \pm x).(1 \mp x + xx) = (1 \pm yy).(1 \mp yy + y^4)$
3 | $1 \pm x^5 = (1 \pm x).(1 \mp x + xx \mp x^3 + x^4) = (1 \pm yy).$
$(1 \mp yy + y^4 \mp y^6 + y^8)$

Ergo &c.

N°. CLX.

INVESTIGATIO & DEMONSTRATIO THEOREMATIS COTESIANI.

INter Opuscula postrema *Rogeri* COTESII apud *Cantabrigienses* Professoris, collecta & edita ab ejus Successore *Roberto* SMITH, reperitur aliquod Theorema ad Cyclometriam pertinens, quod SMITHIUS exposuit, sed sine demonstratione, verbis sequentibus.

„ Si quærantur factores Binomii $a^\lambda \pm x^\lambda$, indice λ existente TAB. LXXVIII.
„ quolibet integro; dividatur circuli circumferentia ABCD, N°. CLX.
„ cujus centrum O, in totidem partes æquales AB, BC, *Fig.* 1 & 2.
„ CD, DE, EF, &c. quot sint unitates in 2λ, & ab om-

 „ nibus

„ nibus divisionibus ad punctum quodvis P in OA radio, si „ opus producto, situm, ducantur rectæ AP, BP, CP, DP, „ EP, FP, &c; deinde positis $OA = a$, $OP = x$; con- „ tentum sub omnibus AP, CP, EP, &c. sumtis a divisio- „ nibus alternis per integrum circuitum, adæquabit $a^\lambda - x^\lambda$ vel „ $x^\lambda - a^\lambda$, prout P fuerit intra vel extra circulum: & conten- „ tum sub reliquis BP, DP, FP, &c. in locis reliquis al- „ ternis, adæquabit $a^\lambda + x^\lambda$. Exempli gratia, si λ sit 5; divi- „ datur circumferentia in 10 partes æquales, eritque $AP \times$ „ $CP \times EP \times GP \times IP = OA^5 - OP^5$, existente P in- „ tra circulum: Et $BP \times DP \times FP \times HP \times KP = OA^5$ „ $+ OP^5$. Similiter si λ sit 6; divisa circumferentia in 12 „ partes æquales, erit $AP \times CP \times EP \times GP \times IP \times LP$ „ $= OA^6 - OP^6$, existente P intra circulum: Et $BP \times$ „ $DP \times FP \times HP \times KP \times MP = OA^6 + OP^6$.

Hujus Theorematis, haud sane inelegantis, demonstrationem suppresserat COTESIUS, nec eam dederat SMITHIUS. Exhibuit postea aliquam PEMBERTONUS, eidem Libro *Cotesiano* * insertam, sed tam longam, tam intricatam, ut tædiosum sit examinare, utrum omnia recte se habeant, nullusque lateat paralogismus. Felicioribus vero auspiciis rem aggressus Clarissimus MOIVREUS, Vir profunde doctus atque in analyticis versatissimus, dedit hujus Theorematis eruendi viam expeditissimam, & quidem ad alia hujus generis longissime se porrigentem, quousque impar Adversarius penetrare non poterat. Methodus *Moivreana* petita est ex natura Serierum, ut vocat, recurrentium, quæ licet in obscurissimis disquisitionibus plerumque magno sint auxilio, nonnullis tamen ista operandi methodus non satis naturalis esse videtur. Quare statim suspicabar perveniri posse modo directo, & sine magno labore, ad veritatem Theorematis *Cotesiani*, ope Seriei universalis, quam olim dedi, pro dividendo arcu circulari in partes quotcun- que:

* In *Epistola ad amicum de* COTESII *inventis*, Lond. 1722. 4°.

que æquales. Etenim in *Actis Lipf.* anni 1701, p. 171. * illa Series confpicitur, ubi pofitis radio circuli $= 1$, chorda arcus dati $= a$, chorda arcus fubmultipli $= z$, chorda ejus complementi ad femicirculum $= \sqrt{(4 - zz)} = y$, erit [fupponendo arcum dividendum effe in partes numero n] æquatio generalis quæ fequitur $a = zy^{n-1} - \frac{n-2}{1} zy^{n-3}$
$+ \frac{n-3.n-4}{1.2} zy^{n-5} - \frac{n-4.n-5.n-6}{1.2.3} zy^{n-7} + \&c.$

Efto jam $a = 0$, hoc eft, fit vel tota circumferentia, vel dupla circumferentia, vel tripla, vel quadrupla, vel &c. fecanda in partes numero n; utpote in quibus fingulis cafibus fit $a = 0$; erit dividendo per z, hæc æquatio

$$0 = y^{n-1} - \frac{n-2}{1} y^{n-3} + \frac{n-3.n-4}{1.2} y^{n-5} - \frac{n-4.n-5.n-6}{1.2.3} y^{n-7}$$
$$+ \frac{n-5.n-6.n-7.n-8}{1.2.3.4} y^{n-9} - \&c.$$

cujus adeo radices y, feu $\sqrt{(4 - zz)}$ determinant non tantum z, feu chordam arcus fubmultipli, fed etiam chordas hujus arcus dupli, tripli, quadrupli, quintupli, fextupli, &c., quia finguli hi arcus conftituunt partes fimiles circumferentiæ, vel fimplæ, vel duplæ, vel triplæ, vel quadruplæ, vel quintuplæ, vel fextuplæ &c. Hoc eft, fi æquatio exprimatur per zz ejufque poteftates, concipiaturque Polygonum regulare laterum n circulo infcriptum; defignabunt radices æquationis quadratum, tum lateris, tum fingularum diagonalium.

Sit ex. gr. $n = 7$, hoc eft, fit Heptagonum circulo infcriptum, æquatio noftra univerfalis abit in hanc $0 = y^6 - 5y^4 + 6yy - 1$, & fubftituto $4 - zz$ pro yy, prodibit hæc altera $0 = z^6 - 7z^4 + 14zz - 7$, cujus tres radices zz indicabunt quadratum, tum lateris Polygoni, tum utriufque diagonalium: funt enim in Heptagono duo diagonalium refpective æqualium paria. Vocentur ergo quadratum lateris $= pp$, quadratum diagonalis minoris $= qq$, & quadratum diagonalis majoris $= rr$,

P 3 erit,

* N°. LXIX. pag. 387, *Tom. I.*

erit, ex natura æquationum, $pp+qq+rr=7$, $ppqq+pprr+qqrr=14$, & $ppqqrr=7$. Formetur Tabula ejusmodi æquationum valores ipsarum z determinantium, pro assumtione successiva numeri n; quæ ita se habebit pro imparibus, & pro paribus.

Pro numeris imparibus formabitur

T A B. I.

$$\text{Assumto numero}\left\{\begin{array}{l} n=3 \\ n=5 \\ n=7 \\ n=9 \\ n=11 \end{array}\right\}\text{prodibit}\left\{\begin{array}{l} zz-3=0 \\ z^4-5zz+5=0 \\ z^6-7z^4+14zz-7=0 \\ z^8-9z^6+27z^4-30zz+9=0 \\ z^{10}-11z^8+44z^6-77z^4+55zz-11=0 \end{array}\right.$$

Pro numeris paribus, formabitur hæc altera

T A B. II.

$$\text{Assumto numero}\left\{\begin{array}{l} n=4 \\ n=6 \\ n=8 \\ n=10 \\ n=12 \end{array}\right\}\text{prodibit}\left\{\begin{array}{l} zz-2=0 \\ z^4-4zz+3=0 \\ z^6-6z^4+10zz-4=0 \\ z^8-8z^6+21z^4-20zz+5=0 \\ z^{10}-10z^8+36z^6-56z^4+35zz-6=0. \end{array}\right.$$

Ex quibus patet numeros postremos [quibus pro scopo nostro opus habemus] semper æquales esse numeris n quibus respondent in imparibus, semisses vero esse numerorum n quibus respondent in paribus. Unde concludendum, in quolibet Polygono regulari imparium laterum productum ex quadrato lateris omnibusque quadratis diagonalium in semicirculo contentarum, seu, quod tantundem est, productum ex omnibus diagonalibus totius Polygoni duobusque lateribus, esse æquale potentiæ, tot vicibus sumtæ quot sunt latera, radii circuli Polygono circumscripti, cujus potentiæ exponens est numerus laterum minus unitate. Ita si numerus laterum Polygoni sit quilibet impar $2m+1$; voceturque radius circuli Polygono circumscripti

cumſcripti $= c$, erit factum illud ex diagonalibus omnibus & duobus lateribus $= (2m + 1) \times c^{2m}$.

Concluditur porro productum illud in Polygonis parium laterum, æquari potentiæ, dimidio tot vicibus ſumtæ quot ſunt latera, radii circuli Polygono circumſcripti, cujus exponens eſt numerus laterum demto binario. Poſito namque numero laterum $2m$, dictoque radio $= c$, erit productum $= m \times c^{2m-2}$.

Sciendum autem hic non computari diametrum pro diagonali, etſi omnium diagonalium ſit maxima; id quod ex eo venit, quia æquatio ſuperior $0 = y^{n-1} - \frac{n-2}{1} y^{n-3} + \frac{n-3 . n-4}{1 . 2} y^{n-5}$ &c, in caſu numerorum parium, diviſa fuit per y, unde & ipſa $y = 0$, ſeu $\sqrt{(4 - zz)} = 0$, quæ dat $z = 2$, quæque adeo eſt ex numero radicum, ſequeſtrata fuit. Quod itaque diameter etiam in numerum diagonalium referenda ſit, [uti certe referri debet,] oportet tantum multiplicare adhuc $m \times c^{2m-2}$ per $2c$, & ita productum totale erit $= 2m \times c^{2m-1}$. Unde generaliter, in numeris paribus æque ac imparibus, res eodem modo ſe habet, atque in forma Theorematis ita enunciari poteſt.

THEOREMA.

In Polygono regulari quocunque, cujus numerus laterum $= n$; *& radius circuli circumſcripti* $= c$; *factum ex omnibus diagonalibus & binis lateribus contiguis, tanquam etiam diagonalibus conſideratis, erit* $= n c^{n-1}$, *hoc eſt, æquale potentiæ radii* [*cujus exponens* $n - 1$] *tot vicibus ſumtæ quot ſunt unitates in* n.

Hoc Theorema viam ſternit ad demonſtrandum Theorema *Coteſianum*; quod nunc ſuſcipimus, præmittendo Lemma ſequens.

L E M M A.

TAB. LXXVIII. N°. CLX. Fig. 1. *Sit in circulo* ACE, *cujus centrum* O, *chorda qualibet* AC *ad extremitatem diametri* AE *ducta, sitque punctum* P *datum & invariabile in diametro, a quo tendat recta* PC: *dico fore* $PC^2 = AP^2 + \frac{OP}{OE} \times AC^2$.

D E M O N S T R A T I O.

Demisso perpendiculo CI, habetur $PC^2 = AC^2 + AP^2 - 2AP \times AI = AC^2 + AP^2 - \frac{2AP}{2AO} \times AI \times AE = AC^2 + AP^2 - \frac{AP}{AO} \times AC^2 = \frac{AO - AP}{AO} \times AC^2 + AP^2 = AP^2 + \frac{OP}{AO} \times AC^2 = AP^2 + \frac{OP}{OE} \times AC^2$. *Q. E. D.*

Coroll. I. Hinc etiam ducta CE chorda complementi ad semicirculum; erit $PC^2 = EP^2 - \frac{OP}{OE} \times CE^2 = AP^2 + \frac{OP}{OE} \times AC^2$.

Coroll. II. Proinde $(PC^2 - AP^2) \times \frac{OE}{OP} = AC^2$; ut & $(-PC^2 + EP^2) \times \frac{OE}{OP} = CE^2$.

Coroll. III. Nec non $(EP^2 - AP^2) \times \frac{OE}{OP} = AC^2 + CE^2 = AE^2 = 4OE^2$.

His ita demonstratis, sit ut in præcedentibus $AC = z$, $CE = y$, $OA = OE = 1$, $OP = x$; & præterea $PC = t$, $AP = 1 - x = g$; erit $zz = \frac{1}{x} \times (tt - gg)$. Hoc valore ipsius zz successive substituto in æquationibus Tabularum primæ & secundæ, prodibit, retentis primo & ultimo termino quibus opus habemus, ac neglectis intermediis in quibus variabilis

riabilis tt reperitur, pro Polygonis imparium & parium laterum Tabula sequens.

TAB. III.

Pro imparibus.

$$\text{Posito}\left\{\begin{array}{l} n=3 \\ n=5 \\ n=7 \\ n=9 \\ n=11 \end{array}\right\}\text{erit}\left\{\begin{array}{l} +\frac{1}{x}tt-\frac{1}{x}gg-3=0. \\ +\frac{1}{xx}t^4\ldots+\frac{1}{xx}g^4+\frac{5}{x}gg+5=0 \\ +\frac{1}{x^3}t^6\ldots-\frac{1}{x^3}g^6-\frac{7}{xx}g^4-\frac{14}{x}gg-7=0 \\ +\frac{1}{x^4}t^8\ldots+\frac{1}{x^4}g^8+\frac{9}{x^3}g^6+\frac{27}{xx}g^4+\frac{30}{x}gg+9=0 \\ +\frac{1}{x^5}t^{10}\ldots-\frac{1}{x^5}g^{10}-\frac{11}{x^4}g^8-\frac{44}{x^3}g^6-\frac{77}{xx}g^4-\frac{55}{x}gg-11=0 \end{array}\right.$$

TAB. IV.

Pro paribus.

$$\text{Posito}\left\{\begin{array}{l} n=4 \\ n=6 \\ n=8 \\ n=10 \\ n=12 \end{array}\right\}\text{erit}\left\{\begin{array}{l} +\frac{1}{x}tt-\frac{1}{x}gg-2=0 \\ +\frac{1}{xx}t^4\ldots+\frac{1}{xx}g^4+\frac{4}{x}gg+3=0 \\ +\frac{1}{x^3}t^6\ldots-\frac{1}{x^3}g^6-\frac{6}{xx}g^4-\frac{10}{x}gg-4=0 \\ +\frac{1}{x^4}t^8\ldots+\frac{1}{x^4}g^8+\frac{8}{x^3}g^6+\frac{21}{xx}g^4+\frac{20}{x}gg+5=0 \\ +\frac{1}{x^5}t^{10}\ldots-\frac{1}{x^5}g^{10}-\frac{10}{x^4}g^8-\frac{36}{x^3}g^6-\frac{56}{xx}g^4-\frac{35}{x}gg-6=0 \end{array}\right.$$

In duabus his Tabulis videre est, coëfficientes numerales esse eosdem qui conspiciuntur in Tab. I, & II, cujus quidem necessitas ex constructione ipsarum Tabularum statim apparet; hoc tantum discimine, quod ibi sint signa alternantia, hic vero contigua. Nunc in hoc substituantur valores ipsius gg, ejusque po-

poteſtatum, qui ſunt $gg = 1 - 2x + xx$, $g^4 = 1 - 4x + 6xx - 4x^3 + x^4$, $g^6 = 1 - 6x + 15xx - 20x^3 + 15x^4 - 6x^5 + x^6$, $g^8 = 1 - 8x + 28xx - 56x^3 + 70x^4 - 56x^5 + 28x^6 - 8x^7 + x^8$, $g^{10} = 1 - 10x + 45xx - 120x^3 + 210x^4 - 252x^5 + 210x^6 - 120x^7 + 45x^8 - 10x^9 + x^{10}$, & ſic porro. Quo facto mutabitur Tabula præcedens in hunc alteram.

T A B. V.

Pro imparibus

Poſito $\left\{\begin{array}{l} n=3 \\ n=5 \\ n=7 \\ \\ n=9 \\ \\ n=11 \\ \\ \end{array}\right\}$ erit $\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{x}gg + 3 = (1 + x + xx) : x \\ \frac{1}{xx}g^4 + \frac{5}{x}gg + 5 = (1 + x + xx + x^3 + x^4) : xx \\ \frac{1}{x^3}g^6 + \frac{7}{xx}g^4 + \frac{14}{x}gg + 7 \\ \quad = (1 + x + xx + x^3 + x^4 + x^5 + x^6) : x^3 \\ \frac{1}{x^4}g^8 + \frac{9}{x^3}g^6 + \frac{27}{xx}g^4 + \frac{30}{x}gg + 9 \\ = (1 + x + xx + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8) : x^4 \\ \frac{1}{x^5}g^{10} + \frac{11}{x^4}g^8 + \&c. \ldots . \\ = (1 + x + xx + \ldots . \ x^{10}) : x^5 \end{array}\right.$

T A B. VI.

Pro paribus.

Si $\left\{\begin{array}{l} n=4 \\ n=6 \\ n=8 \\ n=10 \\ \\ n=12 \end{array}\right\}$ erit $\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{x}gg + 2 = (1 + xx) : x \\ \frac{1}{xx}g^4 + \frac{4}{x}gg + 3 = (1 + xx + x^4) : xx \\ \frac{1}{x^3}g^6 + \frac{6}{xx}g^4 + \frac{10}{x}gg + 4 = (1 + xx + x^4 + x^6) : x^3 \\ \frac{1}{x^4}g^8 + \frac{8}{x^3}g^6 + \frac{21}{xx}g^4 + \frac{20}{x}gg + 5 \\ \quad = (1 + xx + x^4 + x^6 + x^8) : x^4 \\ \frac{1}{x^5}g^{10} + \frac{10}{x^4}g^8 + \ldots = (1 + xx + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10}) : x^5 \end{array}\right.$

Cum

Cum igitur in Tab. III, æquationum termini ultimi & invariabiles deſignent productum omnium radicum $\frac{1}{x}tt$, hoc eſt, omnium quadratorum linearum PC ex puncto fixo P ductarum in angulos ſingulos Polygoni in alterutro ſemicirculo contentos, diviſo quolibet quadrato per x, vel, quod idem eſt, productum linearum ipſarum ad ſingulos angulos totius Poligoni ductarum, exceptis tamen illis [vel una in Polygono imparium laterum, vel utraque in Polygono parium laterum] quæ ad angulos diametro contiguos ducuntur, diviſa interim unaquaque linea per $\sqrt{x}$, vel quod perinde eſt, diviſo producto ipſo per x elevatum ad ſemi-numerum omnium linearum ad angulos totius Polygoni [exceptis diametro contiguis] eductarum. Hinc ergo liquet, ſi omiſſis x, xx, x^3, &c. quæ dividunt tt, t^4, t^6, &c. ab una parte & ab altera parte ipſa illa producta, utpote utrobique ejuſdem dimenſionis, ſumantur producta illa, & æquentur quantitatibus iſtis cuique numero n competentibus $1+x+xx+x^3$ &c. pro imparibus, & $1+xx+x^4+x^6$ &c. pro paribus; fore, pro quolibet numero impare $2m+1$, productum omnium linearum in angulos ductarum, excepta ea quæ in angulum diametro contiguum ducitur, $=1+x+xx+x^3 \ldots +x^{2m}$, & pro quolibet numero pari $2m$, factum ex lineis in omnes Polygoni angulis ductis, exceptis iis quæ in utrumque angulum diametro contiguum ducitur, eſſe $=1+xx+x^4+x^6 \ldots +x^{2m-2}$. Ut vero valor habeatur duorum horum productorum completorum, quæ nempe fiunt multiplicando lineas eductas in angulos Polygoni prorſus omnes, nihil aliud agendum, quam ut, pro imparibus lateribus, factum ex lineis PC multiplicetur adhuc per eam quæ deeſt, nempe per PA ſeu $1-x$, & ita habebitur $(1+x+xx+x^3 \ldots\ldots +x^{2m}) \times (1-x) = 1-x^{2m+1}$; pro paribus autem, ut factum ex iiſdem lineis PC multiplicetur porro per ambas quæ deſunt, nempe per PA & PE, hoc eſt, per $1-x$ & $1+x$, ſeu

TAB. LXXVIII. N°. CLX. *Fig. 2.*

per $1 - xx$; ſicque obtinebitur $(1 + xx + x^4 + x^6 \ldots\ldots + x^{2m-2}) \times (1 - xx) = 1 - x^{2m}$. Ex qua utraque æquatione perſpicitur, quod ſi ad Polygoni regularis [laterum ſive parium ſive imparium] angulos ſingulos, ex puncto quodam in diametro per angulum quendam tranſeunte ſumto, ducantur totidem rectæ; erit exiſtente numero laterum vel angulorum quocunque $= n$, & diſtantia puncti $= x$, productum ex omnibus iſtis rectis $= 1 - x^n$. Id quod primam conſtituit partem Theorematis *Coteſiani*. Altera ex prima facillime fluit: Ecce quomodo. Diviſis biſariam ſingulis arcubus quos ſubtendunt latera Polygoni, novum concipiatur Polygonum duplo plurium laterum, ad cujus angulos ſingulos rurſus eductæ ſunt rectæ; harum ergo productum erit $= 1 - x^{2n}$; quod ſi dividatur per productum prius $1 - x^n$, prodibit productum linearum alternatim ſumtarum $= 1 + x^n$, quarum prima cadit perpendiculariter in latus primum prioris Polygoni. Quæ pars eſt altera Theorematis prædicti. *Q. E. D.*



PRO-

N°. CLXI.

P R O B L E M A.

Æquationes differentiales incompletas cujuscunque gradus reddere completas, hoc est, *eas transmutare in alias, in quibus nulla differentialis supponatur constans.*

Confer. TAYLOR *de Method. increm.* p. 8.

Posita dx constante,

Sit $dy = z\,dx$ erit $\frac{dy}{dx} = z$

$ddy = dzdx = t\,dx^2$ $\frac{dz}{dx} = t$

$d^3y = dtdx^2 = vdx^3$ $\frac{dt}{dx} = v$

$d^4y = dvdx^3 = rdx^4$ $\frac{dv}{dx} = r$

$d^5y =$ &c.

Differentiando, positis omnibus variabilibus, emerget

$$dz = d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dxddy - dyddx}{dx^2}$$

$$dt = d\left(\frac{dz}{dx}\right) = d\left(\frac{dxddy - dyddx}{dx^3}\right) = \&c.$$

$$dv = d\left(\frac{dt}{dx}\right) = d\left(\frac{1}{dx} \times d\left(\frac{dxddy - dyddx}{dx^3}\right)\right) = \&c.$$

$$dr = d\left(\frac{dv}{dx}\right) = d\left(\frac{1}{dx} \times d\left(\frac{1}{dx} \times d\left(\frac{dxddy - dyddx}{dx^3}\right)\right)\right) = \&c.$$

&c. = &c.

Hinc, pro incompletis dy, ddy, d^3y, &c. substituantur completa, ut sequitur.

Incompl. Compl.

$$dy = dy = dy$$

$$ddy = dzdx = (dxddy - dyddx) : dx$$

$$d^3y = dtdx^2 = dx^2 . d((dxddy - dyddx) : dx^3)$$

$$= (1dx^2d^3y - 3dxddxddy + 3ddx^2dy - 1dxdyd^3x) : dx^2$$

$$d^4y = dvdx^3 = dx^3 . d\left(\frac{1}{dx} . d((dxddy - dyddx) : dx^3)\right)$$

$$= \left(\begin{array}{l} dx^3d^4y - 6dx^2ddxd^3y + 15dxddx^2ddy - 15ddx^3dy \\ \quad - 4dx^2d^3xddy + 10dxddxd^3xdy \\ \quad - dx^2d^4xdy \end{array}\right) : dx^3$$

$$d^5y = drdx^4 = \&c.$$

SCHOLIUM.

Hujus Regulæ est usus in transformandis differentialibus constantibus in alias constantes. Ex. gr. Si dy debeat esse constans, hoc tantum agendum, ut deleantur termini in quibus reperiuntur ddy, d^3y, d^4y, &c. Ita quoque si quævis functio, ex differentialibus solis, vel ex differentialibus & finitis composita, fieri debeat constans, ex. gr. si desideretur ut fiat constans elementum curvæ, hoc est $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; nam ex hac suppositione sequitur $dxddx + dyddy = 0$; adeoque si in formulis nostris completarum pro ddy substituatur $-dxddx : dy$, & quod inde provenit, si in æquatione aliqua incompleta, ubi dx supponitur constans, substituatur porro pro ddy; ejusque differentiale pro d^3y, & ita deinceps quousque opus est, resultabit æquatio in qua erit $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ constans. Vel, quod eodem recidit, & clarius intelligitur, mutetur statim proposita æquatio incompleta, ubi dx constans, in æquationem completam; substituendo scilicet pro incompletis ddy, d^3y, &c. eorum respondentes completos, qui sunt $(dxddy - dyddx) : dx$, $(dx^2d^3y - 3dxddxddy + 3ddx^2dy - dxdyd^3x,) : dx^2$, &c. deinde in æquatione completa, quæ inde emergit, supponatur aliquod ex differentialibus compositum constans, ex. gr. quod supra assumsimus $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, &

& quod vocemus $= dv$, unde fluit $ddy = - dxddx : dy = - dxddx : \sqrt{(dv^2 - dx^2)}$, $d^3y = (- ddx^2 - dxd^3x) : dy$ &c. Hos itaque valores in æquatione completa oportet surrogare pro ddy, d^3y, &c. & inde lucrabimur novam æquationem, in qua constans erit dv, seu $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, & quæ proin propositæ [ubi dx erat constans] est æquivalens. Similiter, si velimus propositam mutare in aliam, in qua sit ex. gr. ydx seu elementum areæ constans, erit $dydx + yddx = 0$, adeoque $dy = - yddx : dx$; $ddy = (- dydxddx + yddx^2 - ydxd^3x) : dx^2 =$ [scribendo pro dy ejus valorem $- yddx : dx$] $(2yddx^2 - ydxd^3x) : dx^2$; $d^3y =$ &c. Vel, quod hic præstat, ut eliminemus ddx, d^3x, &c. erit $ddx = - dxdy : y$, $d^3x = (2dy^2dx - ydxddy) : yy$. Quod si igitur, in æquatione completa, substituamus pro ddy, d^3y, &c. eorum valores in ddx, d^3x, &c. vel pro ddx, d^3x, &c. eorum valores in dy, ddy, &c. expressos, acquiremus utroque modo æquationem in qua erit ydx constans, loco propositæ, ubi erat dy constans.

N°. CLXII.

REDUCTIO

Æquationis $y^m ddy = qx^n dx^p dy^{2-p}$ *ad æquationem differentialem primi gradus, ubi supponitur* $ddx = 0$.

Ponatur $y = tx^a$, adeoque $dy = x^a dt + atx^{a-1} dx$; & $ddy = x^a ddt + 2ax^{a-1} dxdt + (aa - a)tx^{a-2} dx^2$, quibus in proposita substitutis, mutabitur illa in hanc (A)... $t^m x^{am} (x^a ddt + 2ax^{a-1} dxdt + (aa - a)tx^{a-2} dx^2)$ $= qx$:

$= qx^n dx^p (x^a\, dt + atx^{a-1}\, dx)^{2-p}$. Posito autem $dx = xzdt$, erit ddx seu $o = xzddt + xdzdt + xzzdt^2$, unde $ddt = -dzdt : z - zdt^2$. Substituto hoc valore in A habebitur [rite procedendo] hæc altera æquatio (B).. $t^m\, x^{am+a}((2a-1)zdt^2 + (aa-a)tzzdt^2 - dzdt : z) = qx^{n+p+2a-pa}\, z^p\, dt^2 (1+atz)^{2-p}$. Ut nunc littera x evanescat, ejus exponentes sunt ponendi æquales, nempe $am+a = n+p+2a-pa$; unde emergit $a = (n+p) : (m+p-1)$, atque resultabit, dividendo per dt, æquatio differentialis primi gradus, constans tantum ex duabus indeterminatis z & t, earumque differentialibus primis, quæ erit hæc (C)...$(2a-1)\, t^m\, zzdt + (aa-a)t^{m+1}\, z^3 dt - t^m\, dz = qz^{p+1}\, dt\, (1+atz)^{2-p}$. Ubi si quocunque modo, per separationem indeterminatarum, vel aliter, haberi potest relatio inter z & t, habebitur etiam ea inter x & y. Facto enim $x = c^{\int zdt}$, & $y = tx^a = tx^{(n+p):(m+p-1)} = tc^{(n+p)\int zdt : (m+p-1)}$, obtinetur quæsitum.

COROLLARIUM I.

Si $m+p=1$, erit $a=\infty$, adeoque etiam $y = tx^a = tx^\infty = \infty$. Hinc in hoc casu Problema non solvitur per hanc methodum, sed solvi potest, si æquatio proposita ita mutatur, ut dy sit constans; quod fieri potest.

COROLLARIUM II.

Si $n+p=o$, hoc est, si $n=-p$, erit $y = tx^o = t$, & $a=o$. Unde inventa æquatio in hanc abit $-t^m\, zzdt - t^m dz = qz^{p+1}\, dt$, vel $-t^m dz = (t^m zz + qz^{p+1})\, dt$. Ubi si præterea $p=1$, fit æquatio separabilis & simul integrabilis, nem-

nempe hæc $-dz:zz = dt + qdt : tm$, quæ integrata dat $b + 1 : z = t + \frac{q}{1-m} t^{1-m}$, unde $z = (1-m) : ((1-m)t + qt^{1-m} + bm - b)$; quare æquatio proposita in hanc abiens $y^m ddy = qdxdy : x$ construi potest sumendo $y = t$, & $x = c^{\int((1-m)dt:((1-m)t+qt^{1-m}+bm-b))}$; vel simpliciter sumendo $x = c^{\int((1-m)dy:((1-m)y+qy^{1-m}+bm-b))}$.

Si exponens est logarithmicabilis, prodit æquatio algebraïca. Ex. gr. Si $m = -1$, erit $x = c^{\int(2dy:(2y+qyy-2b))}$, adeoque $lx = \int(2dy:(2y+qyy-2b))$ = alicui Logarithmo, excepto tamen casu quo $2b$ assumitur $= -1 : q$, hoc enim casu fit $\int(\frac{2}{q}dy : (yy + \frac{2}{q}y + \frac{1}{qq})) = -\frac{2}{q} : (y + \frac{1}{q})$ = quantitati algebraïcæ.

C O R O L L A R I U M III.

In eodem casu quo $n + p = 0$, si præterea $p = 2$, adeoque $n = -2$, & si $m = -1$; ita ut æquatio nostra generalis $y^m ddy = qx^n dx^p dy^{2-p}$ abeat in hanc $y\,ddy = qx^{-2}dx^2dy^0$ seu $xxddy = qydx^2$; mutata æquatio per Regulam dat $-t^{-1}dz = (t^{-1}zz + qz^3)dt$, vel $-dz : zz = (1 + qtz)dt$, quæ integrari potest sequenti modo: Ponatur $tz = v$, unde $t = v : z$ & $dt = (zdv - vdz) : zz$; quibus surrogatis, erit $dz : zz = (1+qv)(zdv - vdz) : zz$, vel $\frac{dz}{z} = \frac{1+qv}{-1+v+qvv}dv = \frac{1}{2} \times \frac{1+2qv}{-1+v+qvv}dv + \frac{1}{2} \times \frac{dv}{-1+v+qvv} = \frac{1}{2}(\frac{1+2qv}{-1+v+qvv}dv + \frac{dv}{(qv+\alpha)\cdot(v+\beta)}) = \frac{1}{2} \times (\frac{1+2qv}{-1+v+qvv}dv + \frac{\varepsilon dv}{qv+\alpha} + \frac{\eta dv}{v+\beta})$, unde habetur $lfz = \frac{1}{2}(l(-1+v+qvv) + \frac{\varepsilon}{q} l(v + \frac{\alpha}{q})$

$+\eta l(v+\beta))$; & $fz=(-1+v+qvv)^{\frac{1}{2}}\times(v+\frac{\alpha}{q})^{\epsilon:2q}\times(v+\beta)^{\frac{1}{2}\eta}$: vel propter $v=tz$, $fz=(-1+tz+qttzz)^{\frac{1}{2}}\times(tz+\frac{\alpha}{q})^{\epsilon:2q}\times(tz+\beta)^{\frac{1}{2}\eta}$, quæ est æquatio terminis finitis constans. Ergo &c. Pro constructione ponatur $f=1$, erit $z=(-1+v+qvv)^{\frac{1}{2}}\times(v+\frac{\alpha}{q})^{\epsilon:2q}\times(v+\beta)^{\frac{1}{2}\eta}$, & $dz=(tdv-vdt):tt$ [propter $v=tz$]; ergo etiam habebitur zdt in meris v & dv; adeoque etiam $x=c^{\int zdt}$ & $y=t$.

ALITER ET GENERALIUS PRO HOC CASU.

Ex æquatione (B) patet, existente $n+p=0$, faciendum esse $am+a=2a-pa$, quod cum dividi possit per a, ita ut tantum sit $m+p=1$; relinquitur utique a arbitrarium; adeoque, omni in casu ubi $n+p=0$, & $m+p=1$; id quod facit $p=1-m$ & $n=m-1$. Æquatio nostra inventa C. . . . . $(2a-1)t^{m}zzdt+(aa-a)t^{m+1}z^{3}dt-t^{m}dz=qz^{p+1}dt$ $(1+atz)^{2-p}$, quæ mutatur in hanc (D). . . . $(2a-1)t^{m}$ $zzdt+(aa-a)t^{m+1}z^{3}dt-t^{m}dz=qz^{2-m}dt(1+atz)^{1+m}$, permittit a liberum; quod proinde ita sumere licet, ut æquatio fiat integrabilis. In casu ergo proposito $y^{-1}ddy=qx^{-2}dx^{2}$, ubi $n+p=0$, $m=-1$, $n=-2$, $p-2$; lubet destruere, in æquatione D, terminum primum $(2a-1)t^{m}zzdt$, faciendo $2a-1=0$ seu $a=\frac{1}{2}$; hoc enim dat $-\frac{1}{4}z^{3}dt-t^{-1}dz=qz^{3}dt$, hoc est, reductione peracta, $-4dz:z^{3}$ $(4q+1)tdt$; quod integrando habetur $4:zz+b^{2}=(4q+1)tt$, seu $4=(4q+1)ttzz-bbzz$; unde $z=2:\sqrt{((4q+1)tt-bb)}$. Cum itaque $x=c^{\int zdt}$, hoc est, $lx=\int zdt$, seu $dx:x=zdt$, erit $\int(dx:x)=\int zdt=\int(2dt:\sqrt{((4q+1)tt-bb)})$; adeoque integrando per Logarithmos, erit $l\int x=\frac{2}{\sqrt{(4q+1)}}\times l(t+\sqrt{(tt}$

—

$-\frac{bb}{4q+1}))$ = [ponendo $\frac{bb}{4q+1}=ee$] $\frac{2e}{b}\times l(t+\surd(tt-ee))$; atque $fx=(t+\surd(tt-ee))^{2e:b}$. Porro quia $y=tx^{a}=tx^{1:2}=t\surd x$, prodibit $y=\frac{t}{\surd f}(t+\surd(tt-ee))^{e:b}$. Ut nunc æquatio habeatur per x & y expressa, eliciatur valor ipsius t, ope primæ æquationis $fx=(t+\surd(tt-ee))^{2e:b}$. Quod sic fit: $(fx)^{b:2e}=t+\surd(tt-ee)$, adeoque $(fx)^{b:2e}-t=\surd(tt-ee)$ quadrando $(fx)^{b:e}-2(fx)^{b:2e}t+tt=tt-ee$; hinc $t=((fx)^{b:e}+ee):2(fx)^{b:2e}$. Hoc valore substituto in altera æquatione $y=t\surd x$; prodibit $y=((fx)^{b:e}+ee)\surd x:2(fx)^{b:2e}$; vel $2yf^{b:2e}x^{b:2e-1:2}=f^{b:e}x^{b:e}+ee$, vel etiam $y=\frac{1}{2}f^{b:2e}x^{b:2e+1:2}+\frac{1}{2}eef^{-b:2e}x^{-b:2e+1:2}$; sed quia $b:e=\surd(4q+1)$, & $ee=bb:(4q+1)$, substituantur hi valores; eritque $y=\frac{1}{2}f^{\frac{1}{2}\surd(4q+1)}x^{\frac{1}{2}\surd(4q+1)+\frac{1}{2}}+\frac{bb}{8q+2}f^{-\frac{1}{2}\surd(4q+1)}x^{-\frac{1}{2}\surd(4q+1)+\frac{1}{2}}$.

Aut, quia f & b sunt arbitrariæ, possunt pro coëfficientibus $\frac{1}{2}f^{\frac{1}{2}\surd(4q+1)}$ & $\frac{bb}{8q+2}f^{-\frac{1}{2}\surd(4q+1)}$ poni duæ litteræ simplices a & c; & habebitur $y=ax^{\frac{1}{2}+\surd(q+\frac{1}{4})}+cx^{\frac{1}{2}-\surd(q+\frac{1}{4})}$.

COROLL. IV.

In fine *Coroll.* 2, ubi inventum est $lx=\int(2dy:(2y+qyy-2b))$, si sumatur $b=0$, erit $lx=\int(2dy:(2y+qyy))=lfy-l(+2qy)=l(fy:(2+qy))$, adeoque $x=fy:(2+qy)$, & reductis suppletisque homogeneis, $2x+qyx=fy$. Ex quo patet curvam esse posse Hyperbolam. Quod si vero relinquatur b arbitrarium, erit $lx=\int(2dy:(2y+qyy-2b)=\int(\frac{2}{q}dy:(yy+\frac{2}{q}y-\frac{2}{q}b))=\int\frac{\alpha dy}{y+f}+\int\frac{\beta dy}{y+g}=\alpha l(y+f)+\beta l(y+g)$; adeoque assumta nova arbitraria erit $nx=(y+f)^{\alpha}\times(y+g)^{\beta}$. Sed per Calculum inveniuntur $\alpha=1:\surd(1+2bq)$, $\beta=-1:\surd(1+2bq)$;

$f = \frac{1}{q} - \sqrt{(\frac{1}{qq} + \frac{2}{q}b)}$, $g = \frac{1}{q} + \sqrt{(\frac{1}{qq} + \frac{2}{q}b)}$. Hinc æquatio generalissima $nx = (y + \frac{1}{q} - \sqrt{(\frac{1}{qq} + \frac{2}{q}b)})^{1:\sqrt{(1+2bq)}}$ $\times (y + \frac{1}{q} + \sqrt{(\frac{1}{qq} + \frac{2}{q}b)})^{-1:\sqrt{(1+2qb)}}$, vel quod eodem recidit, debite reducendo $(nx)^{\sqrt{(1+2bq)}} \times (y + \frac{1}{q} + \sqrt{(\frac{1}{qq} + \frac{2}{q}b)}) = y + \frac{1}{q} - \sqrt{(\frac{1}{qq} + \frac{2}{q}b)}$, vel demum omnia multiplicando per q, & ponendo a pro $n^{\sqrt{(1+2bq)}}$, erit $ax^{\sqrt{(1+2bq)}}$ $\times (qy + 1 + \sqrt{(1+2bq)}) = qy + 1 - \sqrt{(1+2bq)}$; quæ ergo generaliter satisfacit huic æquationi $ddy : y = qdxdy : x$. Porro quia q afficitur per arbitrariam b, potest $\sqrt{(1+2bq)}$ considerari ut arbitrarium: vocetur ergo c, & sic æquatio inventa abit in hanc simplicissimam $ax^c(qy + c + 1) = qy - c + 1$.

Nota. Potest casus propositus $xddy = qydxdy$ sine applicatione ad Regulam generalem (quæ applicatio est operosa) facilius solvi hoc modo. $\int xddy = xdy - \int dxdy = xdy - ydx + adx$; hoc ergo $= \int qydxdy = \frac{1}{2}qyydx$; & ita res redacta est ad differentiales primas. Reliqua per indeterminatarum separationem peraguntur. Posito $a = 0$, prodit casus particularis $2x + qyx = fy$. Simili modo casus proponendi in *Coroll.* 5, 6 & 7, ad differentias primas reducuntur, sine recursu ad Regulam nostram generalem. Sit enim relinquendo m in tota sua extensione, $y^m ddy = qdxdy : x$, erit $xddy = qy^{-m}dxdy$; idque ut prius integrando, prodit $\int xddy = xdy - ydx = \frac{q}{1-m}y^{1-m}dx + adx$. Quo reducto fit $(1-mdy) : (qy^{1-m} + (1-m)y + (1-m)a) = dx : x$. Cætera absolvuntur ut in *Coroll.* 5, pro casu $m = 2$.

S C H O L I U M.

Interdum non patet quomodo æquatio ad differentiales primas reducta separationem admittat; sed ut supra monuimus, mutari potest æquatio, ante illam reductionem, ut quibusdam in casibus

casibus perveniri possit ad differentiales primas, sine recursu ad Regulam, si nimirum ex invariabili dx fiat variabilis, & vicissim ex variabili dy fiat invariabilis. Sic generalis nostra æquatio $y^m ddy = qx^n dx^p dy^{2-p}$ transformatur hoc modo in hanc; $-y^m ddx = qx^n dx^{p+1} dy^{1-p}$. Si $m = 1$, & $p = 0$, habetur pro priori, $yddy = qx^n dy^2$, quæ ægre reducitur per Regulam, sed posita dy invariabili, transformatur in hanc $-yddx = qx^n dxdy$, quæ per consuetam integrationem dat $-ydx + xdy = \frac{q}{n+1} x^{n+1} dy + ady$. &c. separabilem.

COROLL. V.

Si in æquatione *Coroll.* 2. $y^m ddy = qdxdy : x$, habeatur $m = 2$, ita ut resolvenda jam sit $yyddy = qdxdy : x$, erit nunc $lx = \int \frac{-dy}{-y + qy^{-1} + b} = \int \frac{ydy}{yy - by - q} = \int \frac{\alpha dy}{y+f} + \int \frac{6dy}{y+g} = \alpha l(y+f) + 6l(y+g)$, adeoque assumpta nova arbitraria n, erit $nx = (y+f)^\alpha \times (y+g)^6$. Sed hic per calculum reperiuntur $\alpha = (-\frac{1}{2}b + \sqrt{(\frac{1}{4}bb + q)}) : 2\sqrt{(\frac{1}{4}bb + q)}$, $\beta = (\frac{1}{2}b + \sqrt{(\frac{1}{4}bb + q)}) : 2\sqrt{(\frac{1}{4}bb + q)}$, $f = -\frac{1}{2}b + \sqrt{(\frac{1}{4}bb + q)}$, $g = -\frac{1}{2}b - \sqrt{(\frac{1}{4}bb + q)}$; unde æquatio generalissima pro hoc casu erit $nx = (y - \frac{1}{2}b + \sqrt{(\frac{1}{4}bb + q)})^{(-\frac{1}{2}b + \sqrt{(\frac{1}{4}bb + q)}):2\sqrt{(\frac{1}{4}bb+q)}}$ $\times (y - \frac{1}{2}b - \sqrt{\frac{1}{4}bb + q}))^{(\frac{1}{2}b + \sqrt{(\frac{1}{4}bb + q)}):2\sqrt{(\frac{1}{4}bb+q)}}$ vel etiam $(nx)^{2\sqrt{(\frac{1}{4}bb+q)}} = (y - \frac{1}{2}b + \sqrt{(\frac{1}{4}bb + q)})^{-\frac{1}{2}b + \sqrt{(\frac{1}{4}bb+q)}}$ $\times (y - \frac{1}{2}b - \sqrt{(\frac{1}{4}bb + q)})^{\frac{1}{2}b + \sqrt{(\frac{1}{4}bb+q)}}$, vel adhuc aliter multiplicando primum factorem membri posterioris per $(y - \frac{1}{2}b + \sqrt{(\frac{1}{4}bb + q)})^b$, deinde quod provenit, per alterum factorem actu etiam multiplicando, tandemque productum per $(y - \frac{1}{2}b + \sqrt{(\frac{1}{4}bb + q)})^b$ iterum dividendo; quo rite

obſervato, prodibit $nx^{2\sqrt{(\frac{1}{4}bb+q)}} = (yy - by - q)^{\frac{1}{2}b+\sqrt{(\frac{1}{4}bb+q)}}$ $\times (y - \frac{1}{2}b + \sqrt{(\frac{1}{4}bb+q)})^{-b}$. Ut fractiones in exponentibus tollantur, eorum ſumantur dupla; eritque $nx^{2\sqrt{(bb+4q)}}$ $= (yy - by - q)^{b+\sqrt{(bb+4q)}} \times (y - \frac{1}{2}b + \sqrt{(\frac{1}{4}bb+q)})^{-2b}$; verum etiam, ut exponentium irationalitas abeat, poſſum arbitrariam b ita ſumere ut $bb+4q$ evadat quadratum perfectum: ſit itaque $b = e - q : e$, unde ſit $bb + 4q = ee + 2q + qq : ee$ & $\sqrt{(bb+4q)} = e + q : e$; quibus ergo ſubſtitutis, habebitur $nx^{2e+2q:e} = (yy - (e - q:e)y - q)^{2e} \times (y + q:e)^{-2e+2q:e}$; vel multiplicando exponentes per $\frac{1}{2}e$, erit $nx^{ee+q} = (yy - (e - q:e)y - q)^{ee} \times (y + q:e)^{-ee+q}$; & fractionibus ſublatis in factoribus, multiplicando æquationem per e^q, prodibit $ne^q x^{ee+q} = (eyy - (ee - q)y - eq)^{ee} \times (ey + q)^{-ee+q}$; & [quoniam $eyy - eey + qy - eq = (y - e) \times (ey + q)$, & propter arbitrariam n, pro ne^q ſcribi poteſt a], orietur tandem æquatio ſimpliciſſima hæc $ax^{ee+q} = (y-e)^{ee} \times (ey+q)^q$, reſpondens generaliter huic $yyddy = qdxdy : x$. Quod ſi aſſumatur arbitraria $ee = q$, prodibit $axx = (yy - q)\sqrt{q}$, vel pro arbitraria a ſcribendo $c\sqrt{q}$, reſultat $cxx = yy - q$, æquatio ad Hyperbolam; quæ ergo inter infinitas alias curvas ſatisfacit æquationi propoſitæ $yyddy = qdxdy : x$.

COROLL. VI.

Sit porro in æquatione *Coroll.* 2, $y^m ddy = qdxdy : x$, ſit $m = \frac{1}{2}$; adeo ut reſolvenda veniat $ddy\sqrt{y} = qdxdy : x$; erit $lnx = \int \frac{dy}{y + 2q\sqrt{y} - b} =$ [poſito $zz = y$] $\int \frac{2zdz}{zz + 2qz - b}$

$= \int$

$= \int \frac{\alpha dz}{z+f} + \int \frac{\beta dz}{z+g} = \alpha l(z+f) + \beta l(z+g)$; proinde $nx = (z+f)^{\alpha} \times (z+g)^{\beta}$. Dat autem calculus $f = q - \sqrt{(qq+b)}$, $g = q + \sqrt{(qq+b)}$, $\alpha = (-q + \sqrt{(qq+b)}) : \sqrt{(qq+b)}$, $\beta = (q + \sqrt{(qq+b)}) : \sqrt{(qq+b)}$. Hinc fluit $nx = (z+q-\sqrt{(qq+b)})^{(-q+\sqrt{(qq+b)}) : \sqrt{(qq+b)}} \times (z+q+\sqrt{(qq+b)})^{(q+\sqrt{(qq+b)}) : \sqrt{(qq+b)}}$, vel elevando utrumque ad $\sqrt{(qq+b)}$, erit $(nx)^{\sqrt{(qq+b)}} = (z+q-\sqrt{(qq+b)})^{-q+\sqrt{(qq+b)}} \times (z+q+\sqrt{(qq+b)})^{q+\sqrt{(qq+b)}}$. Quia vero b arbitrarium, erit ipsum $\sqrt{(qq+b)}$ arbitrarium; ponatur ergo $\sqrt{(qq+b)} = e$. Unde emergit $(nx)^e = (z+q-e)^{-q+e} \times (z+q+e)^{q+e}$; resubstituendo pro z ejus valorem $\sqrt{y}$, & scribendo a pro n^e, prodit tandem æquatio inter x & y, quæ hæc est $ax^e = (\sqrt{y}+q-e)^{-q+e} \times (\sqrt{y}+q+e)^{q+e}$; complectens omnes possibiles curvas huic æquationi $ddy\sqrt{y} = qdxdy : x$ respondentes.

COROLL. VII.

Liceat denique addere hoc *Corollarium*, quo relinquitur m in tota sua extensione: sed ponatur arbitraria $b = 0$, voceturque $1 - m = h$, erit pro casu *Coroll.* 2. $lnx = \int (hdy : (hy + qy^h)) = \int (hy^{-h} dy : (hy^{1-h} + q)) = \frac{1}{1-h} l(hy^{1-h} + q)$. Hinc ergo assumpto a pro n^{1-h} provenit $ax^{1-h} = hy^{1-h} + q$, hoc est $ax^m = (1-m)y^m + q$, quæ quidem pro qualibet m respondet æquationi $y^m ddy = qdxdy : x$, sed non omnes possibiles curvas complectitur.

RE-

REDUCTIO

æquationis $y^m ddy = qx^n dx^p dy^{2-p}$
ad genus Parabolarum.

Sit æquatio formulæ propositæ respondens $y = \alpha x^\beta$; proinde $dy = \alpha\beta x^{\beta-1} dx$, & $ddy = (\alpha\beta\beta - \alpha\beta)x^{\beta-2} dx^2$. His valoribus in proposita surrogatis, orietur $(\alpha^{m+1}\beta\beta - \alpha^{m+1}\beta)$ $x^{\beta m+\beta-2} dx^2 = q\alpha^{2-p}\beta^{2-p} x^{n+p-2+2\beta-\beta p} dx^2$. Ut ambo membra identificentur, æquandi sunt coëfficientes, ut & exponentes, nimirum:

A . . . $\alpha^{m+1}\beta\beta - \alpha^{m+1}\beta = q\alpha^{2-p}\beta^{2-p}$.
B . . . $\beta m + \beta - 2 = n + p - 2 + 2\beta - \beta p$.

Ex æquatione B habetur $\beta = (n+p):(m+p-1)$, quo substituto pro β in æquatione A, resultabit $\alpha = \left(\frac{q.(n+p)^{1-p} \times (m+p-1)^p}{n-m+1}\right)^{1:(m+p-1)}$ & hoc modo fiet $y = \alpha x^\beta = \left(\frac{q.(n+p)^{1-p} \times (m+p-1)^p}{n-m+1}\right)^{1:(m+p-1)}$ $x^{(n+p):(m+p-1)}$. Adeoque $(n-m+1)\,y^{m+p-1} = (q.(n+p)^{1-p} \times (m+p-1)^p)\,x^{n+p}$ Q. E. F.

COROLL. I.

Pro casu speciali $yyddy = xdx^2$, ubi $m = 2$, $n = 1$, $p = 2$, $q = 1$, habetur $0y^3 = 3x^3$; proinde $x = 0$, pro qualibet y.

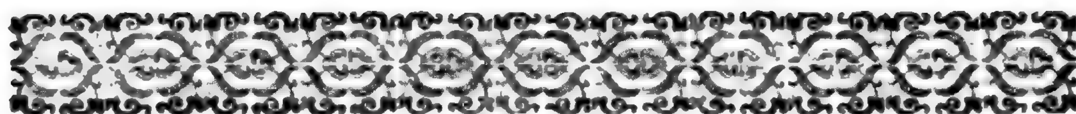
COROLL. II.

Si $m+p = 1$, erit $(n - m + 1) = 0\,x^{n+p} = 0$. Quod est contradictio, nisi forsan $n - m + 1 = 0$, seu $n + 1 = m$; adeoque $n + 1 + p = 1$, unde $p = -n$.

COROLL. III.

Si $n+p = 0$, erit $(n - m + 1)y^{m+p-1} = 0$; proinde $y = 0$ pro qualibet x.

PROBLE-



N°. CLXIII.

PROBLEMA.

Rectificare Curvam datam, per aliam formulam quam per $\int \sqrt{(dx^2+dy^2)}$.

SOLUTIO.

SIT curva ABC primo rectangula, hoc est, cujus tangentes in punctis extremis A & C sint sibi invicem perpendiculares. Sint AF vel NB $= x$, FB vel AN $= y$, arcus AB $= s$, radius osculi in B seu BM $= r$. Sit applicata ultima KC vel AE $= b$; sit EG perpendicularis ad tangentem BH, adeoque parallela ipsi BM. TAB. LXXVIII. N°. CLXIII Fig. 1.

Erit HN $= xdy : dx$, unde HE $= xdy : dx + b - y$. Porro $ds : dx =$ BH : BN $=$ HE : EG; unde EG $= (xdy + (b - y) dx) : ds$. Fiat nunc MB $[r]$: EG $[(xdy + (b - y)dx) : ds]$ $= ds$ ad quartam, erit hæc quarta $= (xdy + (b - y)dx) : r$. Atqui per naturam Reptoriarum [alibi demonstratam a me] ejus integrale, per totam curvam ABC sumtum, dat ipsam longitudinem curvæ ABC, seu totam s; quod est Theorema habens in quibusdam exemplis elegantes proprietates.

EXEMPLUM I.

Sit curva ABC Elastica notissima, seu Lintearia, cujus natura hæc est, ut sit $y = \int (xxdx : \sqrt{(1 - x^4)})$, nominando scilicet ultimam applicatam KC vel AE $= b$, & ultimam abscissam AK vel EC $= 1$. Notum est etiam quemlibet arcum AB esse $\int (dx : \sqrt{(1 - x^4)})$; invenitur vero $r = 1 : 2x$, qui-

bus substitutis, prodit $(xdy+(b-y)dx):r=(2x^4dx+2x(b-y)dx\sqrt{(1-x^4)}):\sqrt{(1-x^4)}=2x^4dx:\sqrt{(1-x^4)}+2xdx(b-y)$. Integretur, quoad fieri potest; eritque pro arcu A B, quod sequitur; $2\int(x^4dx:\sqrt{(1-x^4)})+bxx-yxx+\int xxdy=$ [ob $xxdy=x^4dx:\sqrt{(1-x^4)}$] $3\int(x^4dx:\sqrt{(1-x^4)})+xx(b-y)$; unde tota curva ABC [ubi $b=y$] erit $=3\int(x^4dx:\sqrt{(1-x^4)})$, adeoque evadente $x=1$, habebimus hanc proprietatem, ut sit $\int(dx:\sqrt{(1-x^4)})=3\int(x^4dx:\sqrt{(1-x^4)})$.

Exemplum II.

Sit nunc curva A B C generalius expressa per $y=\int(x^n dx:\sqrt{(1-x^{2n})})$; reliquis positis ut prius; erit quilibet arcus AB $=\int(dx:\sqrt{(1-x^{2n})})$, & reperietur $r=1:nx^{n-1}$. Hisce substitutis in generali $(xdy+(b-y)dx):r$, prodibit $(xdy+(b-y)dx):r=nx^{2n}dx:\sqrt{(1-x^{2n})}+nx^{n-1}dx(b-y)$. Quod integratum, quoad fieri potest, dabit arcum AB $=n\int(x^{2n}dx:\sqrt{(1-x^{2n})})+bx^n-yx^n+\int x^n dy$ $=$ [ob $x^n dy=x^{2n}dx:\sqrt{(1-x^{2n})}$] $(n+1)\int(x^{2n}dx:\sqrt{(1-x^{2n})})+(b-y)x^n$. Unde existente $b=y$, evanescet secundus terminus $x^n(b-y)$; eritque tota curva ABC $=(n+1)\int(x^{2n}dx:\sqrt{(1-x^{2n})})$; proinde evadente $x=1$, erit hæc proprietas, ut sit semper $\int(dx:\sqrt{(1-x^{2n})})=(n+1)\int(x^{2n}dx:\sqrt{(1-x^{2n})})$.

Corollarium.

In casu quo $n=2$, incidimus in exemplum præcedens: sed si $n=1$, erit $\int(dx:\sqrt{(1-xx)})=2\int(xxdx:\sqrt{(1-xx)})$, quod utrumque dependet a circulo; & examinando per communem viam, deprehendentur ambo membra, in suppositione $x=1$, desinere

desinere in quadrantes circulorum æqualium, id quod generalem nostram methodum mirifice confirmat.

Sit nunc curva ABC obliquangula, hoc est, sit angulus ACE acutus; manente interim angulo CAE recto. TAB. LXXVIII. N°. CLXXIII. *Fig.* 2 & 3.

Pro hoc casu, ex puncto C ducta sit tangens CL, in eamque normalis EL. Ex dato angulo acuto ECL & ex data longitudine CE, dabitur utique CL, quæ dicatur $= t$.

Jam ad faciendum angulum ACE rectum, concipiatur ad extremitatem C adjungi arculum radii infinite parvi, qui centrum habeat in recta EC, ipsique C quam proximum, ita ut coalescat cum curva ABC; faciatque hoc pacto angulum rectum cum CA, nempe angulum KCE. Res ista talem habet faciem ut videre est in *Figura* 3; ubi ABC est curva proposita, ad cujus extremitatem C, adjunctus concipitur arculus circuli Cc, cujus radius infinite parvus CO vel cO, ita ut centrum O sit in ultima applicata cE, quæ ab ipsa CE distare non censetur; sicuti pariter ABc ab ipsa ABC longitudine non differt. Sic itaque AcE jam est rectus, cum antea alter ACE esset acutus; adeoque jam considerabimus ABCc tanquam curvam in casu *Fig.* 1. Ut autem habeatur summa omnium elementorum $(xdy + (b-y)dx) : r$ pro toto arcu ABCc, addenda ei est summa eorum quæ pertinent ad arculum circularem Cc, quæ ut facile intelligitur æqualis est ipsi tangenti CL, hoc est $= t$. Hinc longitudo arcus ABC seu ABC$c = t + \int((xdy + (b-y)dx) : r)$.

EXEMPLUM.

Sit ABC iterum Elastica, non integra quidem, sed tantum ejus portio, cujus altitudo vel ultima applicata KC, vel AE, nominetur iterum b; abscissa vero ultima AK, vel EC, quæ antea erat $= 1$, nunc sit $= a$; erit, ex natura Elasticæ, tangens CL seu $t = a\sqrt{(1-a^4)}$; adeoque longitudo curvæ ABC seu ABCc, hoc est, $t + \int((xdy + (b-y)dx):r) = a\sqrt{(1-a^4)} + 3\int(x^4\,dx : \sqrt{(1-x^4)})$; ubi notandum integrationem instituendam

tuendam esse, non per totam unitatem, sed tantum per ejus portionem a; atque ita habebimus, evadente $x=a$, hanc proprietatem, ut sit $\int(dx:\sqrt{(1-x^4)})=a\sqrt{(1-a^4)}+3\int(x^4dx:\sqrt{(1-x^4)})$. Similiter in aliis procedendum.

Coroll. I.

Si a sumitur = toti unitati, evanescit $a\sqrt{(1-a^4)}$, eritque tantum $\int(dx:\sqrt{(1-x^4)})=3\int(x^4dx:\sqrt{(1-x^4)})$, ut fieri par est; relabimur enim in primum casum supra explicatum.

Coroll. II.

Hinc in omni casu, modo a sit minor unitate, erit $\int(dx:\sqrt{(1-x^4)})-3\int(x^4dx:\sqrt{(1-x^4)})$, hoc est, $\int((dx-3x^4dx):\sqrt{(1-x^4)})=a\sqrt{(1-a^4)}$; adeoque integrabilis, in casu quo x evadit $=a$.

N°. CLXIV.

DE TRANSFORMATIONIBUS ET RECTIFICATIONIBUS CURVARUM.

PROBLEMA I.

Curvas parabolicas cujusvis gradus transformare in alias alius generis curvas algebraicas, ejusdem longitudinis.

SIT numerus potestatis, a qua denominatur Parabola, $=n$; parameter $=1$; unde æquatio ad Parabolam $x^n=y$; ideoque elementum curvæ $=\sqrt{(nnx^{2n-2}dx^2+1dx^2)}$. Jam ut habeantur duæ aliæ coordinatæ quam x^n & x, oportet quadratum

tum elementi curvæ $nnx^{2n-2}dx^2 + 1dx^2$ disponere in duo alia quadrata, quorum latera sunt integrabilia; hæc autem quadrata sunt, $nnx^{2n-2}dx^2 - 2nx^{n-1}dx^2 + dx^2$ & $+ 2nx^{n-1}dx^2$; quorum radices sunt, $\pm nx^{n-1}dx \mp dx$ & $\pm \sqrt{2n}\, x^{n-1}dx^2$; earum ergo integralia $\pm x^n \mp x$ & $\pm \frac{2}{n+1}x^{(n+1):2}\sqrt{2n}$ erunt coordinatæ curvæ novæ ipsi Parabolæ longitudine æqualis.

In Parabola communi, ubi $n = 2$, erunt novæ coordinatæ $\pm xx \mp x$ & $\frac{4}{3}x^{3:2}$, unde si ponatur $xx - x = s$ & $\frac{4}{3}x^{3:2} = t$, reperietur, pro natura curvæ novæ, hæc æquatio [sumta a pro constante ad implendas homogeneas] $81t^4 = \pm 432astt + 144aatt \pm 256as^3$.

P R O B L E M A II.

Idem præstare pro curvis hyperbolicis cujusvis gradus, ad asymtoton.

Sit numerus potestatis, a qua denominatur Hyperbola $= n$; latus constans $= 1$; unde æquatio ad Hyperbolam, $y = 1 : x^n$; ideoque elementum curvæ $= \sqrt{(nnx^{-2n-2}dx^2 + 1dx^2)}$. Reliqua faciendo ut supra, reperietur, pro coordinatis novæ curvæ ipsi Hyperbolæ longitudine æqualis, $+ x^{-n} + x$, & $\frac{2}{1-n}x^{(1-n):2}\sqrt{2n}$.

S C H O L I U M.

In Hyperbola communi regula nostra cessat; altera enim ordinata curvæ novæ evadit infinita: unde nihil habetur. Ad hunc defectum resarciendum, en alium modum. Quadratum elementi curvæ, $x^{-4}dx^2 + 1dx^2$, distribui poterit in duo alia quadrata, si ponamus radicem unius esse $- x^{-2}dx + mx^p dx$, ideoque quadratum $x^{-4}dx^2 - 2mx^{p-2}dx^2 + mmx^{2p}dx^2$; si

auferatur a $x^{-4}dx^2 + 1dx^2$, remanebit $2mx^{p-2}dx^2 - mmx^{2p}dx^2 + 1dx^2$, quod ut fiat quadratum perfectum, oportet duplum rectangulum inter radices partium signo + affectarum æquari parti signo — affectæ, id est $2x^{\frac{1}{2}p-1}\sqrt{2m} = mmx^{2p}$; adeoque, ut tam dimensiones quam coëfficientes ipsius x utrobique sint eædem, erunt $\frac{1}{2}p - 1 = 2p$ & $2\sqrt{2m} = mm$; unde discimus sumendum esse $p = -\frac{2}{3}$ & $m = 2$; ergo radices duorum quadratorum quæsitorum erunt $-x^{-2}dx + 2x^{-\frac{2}{3}}dx$ & $-2x^{-\frac{4}{3}}dx + 1dx$, quarum itaque integralia $x^{-1} + 6x^{1:3}$ & $6x^{-1:3} + x$, seu, usurpando expressiones communes, $1:x + 6\sqrt[3]{x}$ & $6:\sqrt[3]{x} + x$, dabunt coordinatas curvæ novæ ipsi Hyperbolæ ordinariæ longitudine æquales.

NB. Hæc Regula etiam porrigitur ad Parabolas & Hyperbolas in genere, cujusvis sint gradus.

PROBLEMA III.

Invenire curvam algebraïcam, cujus partes sint proportionales segmentis circuli.

Posito radio circuli $= 1$, & abscissa super diametro ex centro sumta $= x$, erit elementum spatii circularis, seu differentia duorum semi-segmentorum $= dx\sqrt{(1 - xx)}$; hoc ergo in elementum curvæ alicujus transformandum est, quod sic facio; quadratum elementi $1dx^2 - xxdx^2$ distribuatur in duo quadrata, latera habentia integrabilia; sumendo pro uno $1dx^2 - 2mxxdx^2 + mmx^4dx^2$, & pro altero $2mxxdx^2 - xxdx^2 - mmx^4dx^2$, [hæc enim simul faciunt $1dx^2 - xxdx^2$]; eorum autem latera sunt $\pm 1dx \mp mxxdx$ & $xdx\sqrt{(2m - 1 - mmxx)}$, quorum integralia $\pm x \mp \frac{1}{3}mx^3$, & $\frac{2m - 1 - mmxx}{3mm}\sqrt{(2m - 1 - mmxx)}$, erunt coordinatæ quæsitæ.

PRO-

PROBLEMA IV.

Data portione curvæ parabolicæ communis; invenire aliam curvam algebraicam, cum qua juncta illa portio parabolica sit rectificabilis.

Conf. Num. XLIX, Tom. I, *pag.* 251.

Esto proposita portio parabolica AB, vertex A, semi-parameter AD; centro A & semiaxe transverso AD descripta Hyperbola æquilatera DE, facit [ut notum est] spatium ADEC æquale rectangulo sub recta DA & curva AB; huicque per consequens proportionale. Si ergo etiam ad complementum hujus spatii, nempe ad DFE, invenitur curva proportionalis, erit utique inventa, una cum data AB, proportionalis toti spatio, seu rectangulo CF; adeoque rectificabilis. Id autem sic efficitur: Ponatur AD $= a$, DF $= x$; erit FE $= \sqrt{(2ax + xx)}$ & quadratum different. spatii DFE $= 2axdx^2 + xxdx^2$, quod manifeste distribuitur in duo quadrata $2axdx^2$ & $xxdx^2$ latera habentia $dx\sqrt{2ax}$ & xdx integrabilia; quippe quæ sunt $\frac{2}{3}x\sqrt{2ax}$ & $\frac{1}{2}xx$. Si igitur fiat nova curva AG, cujus coordinatæ AH, HG sint $xx:2a$ & $2x\sqrt{2ax}:3a$, erit composita GAB rectificabilis, nempe æqualis rectangulo CF diviso per AD. TAB. LXXVIII. N°. CLXIV. *Fig.* 1.

SCHOLIUM.

Ut habeatur natura curvæ AG, ponatur AH, seu $xx:2a = r$, & HG seu $2x\sqrt{2ax}:3a = t$; reperietur hæc æquatio $512ar^3 = 81t^4$, quæ docet curvam AG esse Parabolam cubico-biquadraticam, cujus parameter $= \frac{512}{81}a = 6\frac{26}{81}a = 3\frac{13}{81}$ parametri Parabolæ propositæ. Poterit jam, omissa Hyperbola DE, Problema confici. Est enim BI normalis ad Parabolam æqualis ipsi FA, ideoque centro I, radio IL subtangente, æquali nimirum semi-parametro DA, descriptus arcus LK relinquet BK $= x =$ DF; quocirca si ad parametrum Parabolæ & ad BK sumatur tertia proportionalis AH; erit, ducta applicata, arcus AG quæsitus, qui cum AB æquatur lineæ rectæ IM,

quæ habetur prolongando CB, cui occurrit recta IM ad BI perpendicularis; erit enim $IM = \frac{IB \times BI}{LI} = \frac{AC \times CE}{AD}$.

PROBLEMA V.

Invenire curvam algebraïcam, cum qua datus arcus circuli sit rectificabilis.

TAB. LXXXVIII. N°. CLXIV. Fig. 2.

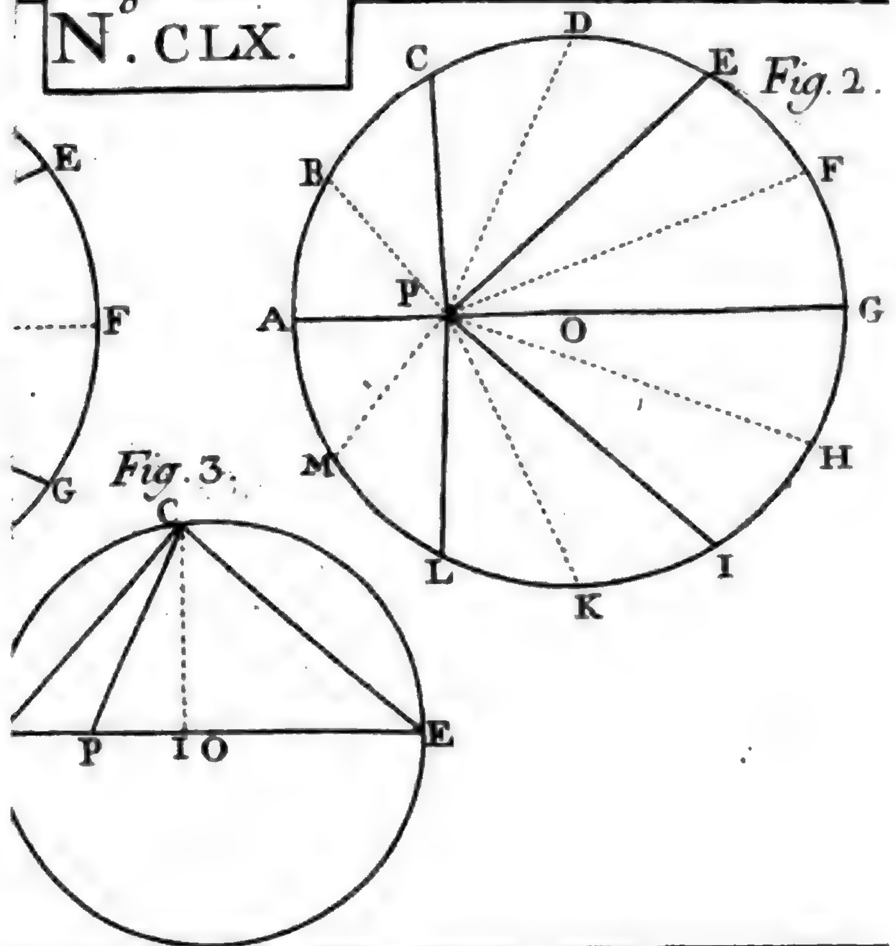
Sit semi-circulus EAF, centrum C, perpendicularis CA, arcus datus AB: qui multiplicatus per $\frac{1}{2}$ CA producit sectorem CAB. Ductis AH & BG parallelis diametro occurrentibus perpendiculari EH; quæremus curvam algebraïcam, quæ multiplicata per $\frac{1}{2}$ CA producat spatium AHGB: evidens enim est illam curvam satisfacturam, quippe quæ cum arcu AB conjuncta, & multiplicata per $\frac{1}{2}$ CA, producit rectilineum CAHGBC. Illam autem invenimus hoc modo: Sit $CA = a$, $CD = x$, erit differentiale spatii AHGB $= (ax - xx)\, dx : \sqrt{(aa - xx)}$, adeoque elementum curvæ quæsitæ $= (2x - 2xx : a)\, dx : \sqrt{(aa - xx)}$; cujus quadratum $(4xx - \frac{8x^3}{a} + \frac{4x^4}{aa})\, dx^2 : (aa - xx)$ distribuendum est duas partes latera habentes integrabilia. Ponantur pro lateribus quæsitis $(mx\sqrt{(1:a)} + nxx\sqrt{(1:a^3)})\, dx : \sqrt{(a - x)}$, & $(px\sqrt{(1:a)} + qxx\sqrt{(1:a^3)})\, dx : \sqrt{(a + x)}$; horumque quadrata $(mmxx : a + 2mnx^3 : aa + nnx^4 : a^3)\, dx^2 : (a - x)$ & $(ppxx : a + 2pqx^3 : aa + qqx^4 : a^3)\, dx^2 : (a + x)$ in unam summam collecta

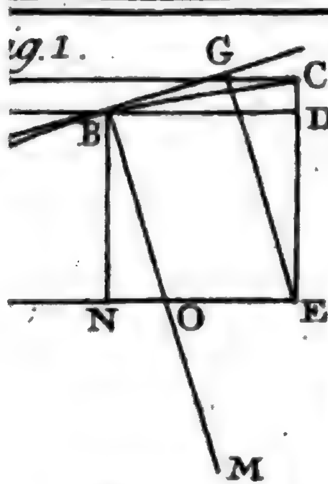
$$\left.\begin{array}{l} + mmxx + 2mnx^3 : a + nnx^4 : aa \\ \quad\quad + mmx^3 : a + 2mnx^4 : aa + nnx^5 : a^3 \\ + ppxx + 2pqx^3 : a + qqx^4 : aa \\ \quad\quad - ppx^3 : a - 2pqx^4 : aa - qqx^5 : a^3 \end{array}\right\} dx^2 : (aa - xx)$$

debent æquari quadrato elementi curvæ quæsitæ $(4xx - 8x^3 : a + 4x^4 : aa)\, dx^2 : (aa - xx)$; ideoque si omisso denominatore communi $aa - xx$, æquationes instituantur inter terminos pari utrobique dimensione ipsius x affectos, nempe $mm + pp = 4$

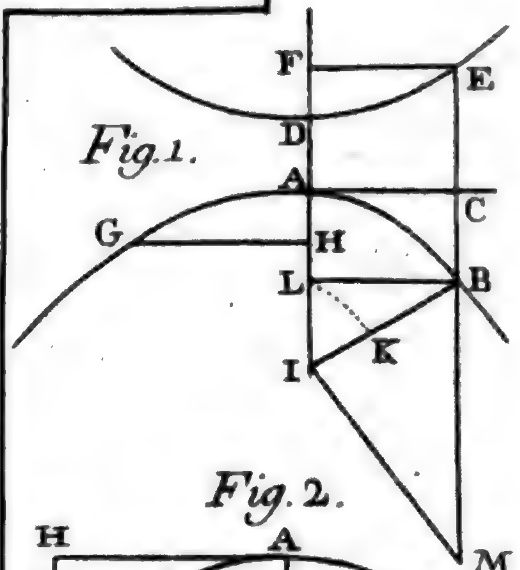
2mn

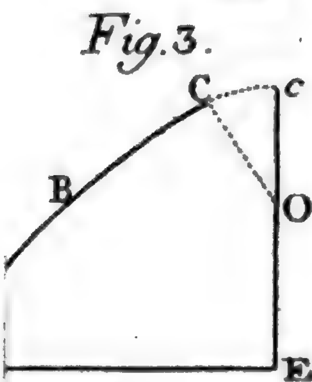
N°. CLX.

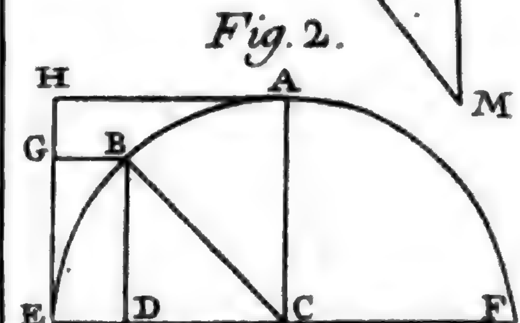

Fig. 2.
Fig. 3.
A
B
C
D
E
F
G
H
I
K
L
M
O
P

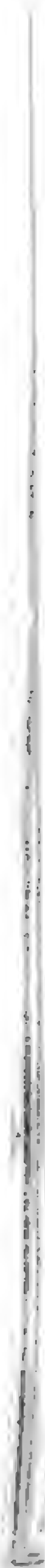

B
C
D
E
G
M
N
O

N°. CLXIV.


Fig. 1.
A
B
C
D
E
F
G
H
I
K
L
M


Fig. 3.
B
C
c
O
E


Fig. 2.
H
A
G
B
E
D
C
F



$2mn + mm + 2pq — pp = — 8$, $nn + 2mn + qq — 2pq = 4$, & $nn — qq = 0$, quibus reductis incipiendo a poſtrema æquatione, reperietur tandem hæc æquatio $n^8 + 24n^4 + 16 = 8n^6 + 32nn$. Quæ ut porro reduci poſſit, ſubtrahendum eſt ab utroque membro $32n^4$ & remanebit $n^8 — 8n^4 + 16 = 8n^6 — 32n^4 + 32nn$; extracta utrobique radice, provenit $n^4 — 4 = (2n^3 — 4n)\sqrt{2}$; diviſo utroque per $nn — 2$, habebitur $nn + 2 = 2n\sqrt{2}$, adeoque $n = \sqrt{2}$; unde ſi per calculum quærantur valores reliquarum litterarum, patebit omnes inter ſe & ipſi n fore æquales; nimirum $q = p = m = n = \sqrt{2}$; hoc tamen cum diſcrimine ut ſi n & q ſint affirmativæ, reliquæ m & p debeant eſſe negativæ, vel vice verſa; $q = — p = — m = n = \pm\sqrt{2}$; erunt itaque $(\mp x\sqrt{(2:a)} \pm xx\sqrt{(2:a^3)})dx : \sqrt{(a — x)}$ & $\mp x\sqrt{(2:a)} \pm xx\sqrt{(2:a^3)}dx : \sqrt{(a + x)}$ differentiales coordinatarum curvæ quæſitæ, quarum ergo integrales $(\pm 4aa \pm 2ax \mp 6xx)\sqrt{(2a — 2x)} : 15a\sqrt{a}$, & $(\pm 12aa \mp 6ax \pm 2xx)\sqrt{(2a + 2x)} : 5a\sqrt{a}$ dabunt ipſas coordinatas, adeoque etiam ipſam curvam algebraicam quæſitam. *Q. E. F.*

Hæc ergo curva, una cum arcu AB, erit æqualis ſpatio CAHGB diviſo per $\frac{1}{2}a$, æquali $2a — \frac{2a + x}{a}\sqrt{(aa — xx)} =$ lineæ rectæ. Unde in caſu CD = CE, erit compoſitum ex arcu, ſeu quadrante AE, & curva, æquale diametro.

ALITER.

Sit jam ED $= x$; erit, per prius dicta, quadratum elementi curvæ quæſitæ $(4xx — 8x^3 : a + 4x^4 : aa)dx^2 : (2ax — xx)$; quod ut diſtribui poſſit in duas partes latera habentes integrabilia, ponatur pro lateribus quæſitis $(mx\sqrt{(1:a)} + nxx\sqrt{(1:a^3)})dx : \sqrt{(2a — x)}$ & $(px\sqrt{(1:a)} + qxx\sqrt{(1:a^3)})dx : \sqrt{x}$, quorum quadrata ſi in unam colligantur ſummam provenit

$$\frac{\begin{matrix} 2ppxx + 4pqx^3 : a + 2qqx^4 : aa \\ — ppx^3 : a — 2pqx^4 : aa — qqx^5 : a^3 \\ + mmx^3 : a + 2mnx^4 : aa + nnx^5 : a^3 \end{matrix}}{2ax — xx} dx^2 = \frac{4xx — 8x^3 : a + 4x^4 : aa}{2ax — xx} dx^2$$

 inſti-

institutis æquationibus inter terminos homogeneos, pervenitur ad hanc æquationem $n^4 + 2n^3\sqrt{2} + 4nn + 4n\sqrt{2} + 4 = 0$, cujus radix est $n = -\sqrt{2}$; reliquis factis, ut supradictum, reperietur iterum $q = -p = -m = n = \pm\sqrt{2}$. Erunt itaque $(\mp x\sqrt{(2:a)} \pm xx\sqrt{(2:a^3)})dx : \sqrt{(2a - x)}$ & $(\mp x\sqrt{(2:a)} \pm xx\sqrt{(2:a^3)})dx : \sqrt{x}$ differentiales coordinatarum curvæ quæsitæ, quarum ergo integrales $(\mp 8aa \mp 2ax \mp 2xx)\sqrt{(4a - 2x)} : 5a\sqrt{a}$ & $(\mp 10ax \pm 6xx)\sqrt{2x} : 15a\sqrt{a}$ dabunt coordinatas ipsas, hoc est curvam quæsitam, quæ cum arcu BE erit = spatio CBGE diviso per $\frac{1}{2}a = \frac{a+x}{a}\sqrt{(2ax - xx)} =$ lineæ rectæ. Unde in casu ED = EC, erit arcus, seu quadrans AE, cum curva, æqualis diametro, ut ante.

N°. CLXV.

DE EVOLUTIONE

SUCCESSIVA ET ALTERNANTE

Curvæ cujuscunque in infinitum continuata, tandem Cycloidem generante;

SCHEDIASMA CYCLOMETRICUM.

TAB. LXXVIII. N°. CLXV.

Sit curva quælibet ADB, cujus tangentes in A & B ad se invicem perpendiculares, atque ideo oppositis coordinatis parallelæ; productis itaque axe CA & tangente BF in infinitum, evolvi intelligatur ADB, incipiendo evolutionem in A; quæ inde describitur AEF, evolvatur quoque incipiendo a fine F, & inde descripta FGH porro evolvatur initio facto ab H, & sic fiat in infinitum alterna evolutio, inchoando quamlibet evolutionem a puncto in quo præcedens finitur. Dico post evolutiones in infinitum continuatas, curvas tunc postremo generatas fore Cycloides identicas, qualiscunque fuerit primitiva curva ADB, ex qua reliquæ generantur. Et quidem tam

tam promte convergunt ad Cycloidem, ut, post paucas evolutiones, ab ea sensibiliter non discrepent generatæ per evolutionem.

Hujus rei veritas attente consideranti facile patebit.

Sit nunc ADB quadrans circuli, cujus longitudo dicatur $= a$, radius CA vel CB $= 1$; dicantur etiam AEF $= b$, HIK $= c$, MNO $= e$, QRS $= f$, &c. Ex puncto quolibet D ducta tangente DE, agantur etiam tangentes EG GI, IL, LN, &c. quæ alternatim ad se invicem erunt parallelæ, DE, GI, LN &c. ut & EG, IL, LP &c. constituuntque angulos rectos in, E, G, I, L &c.

Ponatur AD $= z$, erit $1 : dz =$ ED : dAE $=$ GE : dHG $=$ IG : dHI $=$ LI : dMC $=$ NL : dMN $=$ &c. Sunt autem ex natura evolutionis, rectæ ED, IG, NL, &c. æquales arcubus respective sumtis AD, HG, ML, &c. Et rectæ GE, LI, PN, &c. $=$ FE, KI, ON &c. hoc est $= b -$ AE, $c -$ HI, $e -$ MN &c. Hinc invenitur AE $= \frac{zz}{1.2}$, HG $= bz - \frac{z^3}{1.2.3}$ HI $= \frac{bzz}{1.2} - \frac{z^4}{1.2.3.4}$, ML $= cz - \frac{bz^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5}$, MN $= \frac{czz}{1.2} - \frac{bz^4}{1.2.3.4} + \frac{z^6}{1.2.3..6}$, QP $= ez - \frac{cz^3}{1.2.3} + \frac{bz^5}{1.2.3.4.5} - \frac{z^7}{1.2.3...7}$, QR $= \frac{ezz}{1.2} - \frac{cz^4}{1.2.3.4} + \frac{bz^6}{1.2.3..6} - \frac{z^8}{1.2.3....8}$ &c. His in ordinem digestis, sequentes duas formo Tabellas, quarum prior servit pro curvis, quæ tangunt inferiorem parallelam CQ, altera pro iis, quæ tangunt superiorem BS.

TAB. I.

$$AE = \frac{zz}{1.2}$$

$$HI = \frac{bzz}{1.2} - \frac{z^4}{1.2.3.4}$$

$$MN = \frac{czz}{1.2} - \frac{bz^4}{1.2.3.4} + \frac{z^6}{1.2.3..6}$$

$$QR = \frac{ezz}{1.2} - \frac{cz^4}{1.2.3.4} + \frac{bz^6}{1.2.3..6} - \frac{z^8}{1.2.3....8}$$

&c. = &c.

TAB. II.

$$AD = z$$

$$HG = bz - \frac{z^3}{1.2.3}$$

$$ML = cz - \frac{bz^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5}$$

$$QP = ez - \frac{cz^3}{1.2.3} + \frac{bz^5}{1.2.3.4.5} - \frac{z^7}{1.2.3...7}$$

&c. = &c.

Abeunte D in B, fiet $z = a$; quo substituto ubique, habebitur AEF seu b, HIK seu c, MNO seu e, QRS seu f, &c. earumque evolutæ, ADB, HGF, MLK, QPO &c. unde sequentes duæ conduntur Tabulæ.

TAB. III.

$$AEF = b = \frac{aa}{1.2}$$

$$HIK = c = \frac{baa}{1.2} - \frac{a^4}{1.2.3.4}$$

$$MNO = e = \frac{caa}{1.2} - \frac{ba^4}{1.2.3.4} + \frac{a^6}{1.2.3..6}$$

$$QRS = f = \frac{eaa}{1.2} - \frac{ca^4}{1.2.3.4} + \frac{ba^6}{1.2.3..6} - \frac{a^8}{1.2.3....8}$$

&c. $= g =$ &c.

TAB. IV.

TAB. IV.

$ADB = a$

$HGF = ba - \frac{a^3}{1.\,2.\,3}$

$MLK = ca - \frac{ba^3}{1.\,2.\,3} + \frac{a^5}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}$

$QPO = ea - \frac{ca^3}{1.\,2.\,3} + \frac{ba^5}{1.\,2.\,3.\,4.\,5} - \frac{a^7}{1.\,2.\,3\ldots 7}$

&c. = &c.

Quod si jam appropinquare lubeat ad determinandam veram rationem diametri ad circumferentiam Circuli, sumo aliquam ex curvis TAB. III determinatis, tanquam veram Cycloïdem considerando, utpote a qua post paucas evolutiones nihil fere discrepat; deinde substituo successive valores ipsarum b, c, e &c. donec perveniam ad curvam quam seligo, ex. gr. ad QRS, quæ post septimam evolutionem producitur; & sic oriuntur longitudines singularum curvarum per quadrantes circulares expressæ, ut videre est in sequenti Tabella.

TAB. V.

$AEF = b = aa \times \frac{1}{1.\,2}$

$HIK = c = a^4 \times \frac{5}{1.\,2.\,3.\,4}$

$MNO = e = a^6 \times \frac{61}{1.\,2.\,3..\,6}$

$QRS = f = a^8 \times \frac{1385}{1.\,2.\,3\ldots.\,8}$

Cum itaque QRS habeatur pro semi-Cycloide, cujus basis est erecta perpendicularis $QT = CB = 1$, & proinde ST diameter circuli ejus generatoris, cujus diametri duplum = QRS; erit QT : 2ST [QRS] = ut semicircumferentia ad 2 diametros = ADB : 2AC. Adeoque $1 : a^8 \times \frac{1385}{1.2.3\ldots.8} = a : 2$; unde

unde ſequitur $a^9 = \frac{2 \times 1.2.3.4 \ldots 8}{1385} = \frac{16128}{277}$; atque extracta radice nonæ poteſtatis, fit $a = \frac{135}{86}$, ſeu $4a = \frac{270}{43}$, hoc. eſt, circumferentia continet radium $6\frac{12}{43}$, ipſumque adeo diametrum $3\frac{6}{43}$ vicibus, quod monſtrat rationem paulo minorem *Archimedea*, quæ eſt $3\frac{1}{7}$, vel $3\frac{6}{42}$. Per logarithmos calculus eſt facilior.

S C H O L I U M.

Poteſt autem facilius indagari ratio inter circumferentiam circuli & diametrum, ſine extractione radicum, & ſine comparatione Cycloidis: Conſiderando nimirum, poſt evolutiones multoties repetitas, tandem longitudines curvarum utriuſque ordinis convergere ad ſenſibilem æqualitatem. Quocirca ſi æquatio inſtituatur inter curvas utriuſque ordinis, ſat bene a prima remotas, quarum una ex altera generatur, ex. gr. QRS ex QPO, dabitur ſtatim ratio inter quadrantem circularem ejuſque radium quam proxime; etenim valor generatæ expreſſus per *a* ad poteſtatem elevatam cujus exponens æqualis eſt numero curvarum, ſemper una tantum dimenſione major eſt, quam valor curvæ generantis, ſeu immediate præcedentis.

Condenda eſt in hunc finem Tabula VI, ex ſupputatione curvarum Tab. IV, exhibitarum; eaque ita ſe habet, ut monſtrat Tabula ſequens.

T A B. V I.

$$ADB = a$$

$$HGF = ba - \frac{a^3}{1.2.3} = a^3 \times \frac{2}{1.2.3}$$

$$MLK = ca - \frac{ba^3}{1.2.3} + \frac{a^5}{1.2.3.4.5} = a^5 \times \frac{16}{1.2.3.4.5}$$

$$QPO = ea - \frac{ca^3}{1.2.3} + \frac{ba^5}{1.2.3.4.5} - \frac{a^7}{1.2.3 \ldots 7} = a^7 \times \frac{272}{1.2.3 \ldots 7}.$$

Ponamus

Ponamus itaque QRS = QPO, & habebimus $a^8 \times \frac{1385}{1.2.3...8}$ $= a^7 \times \frac{272}{1.2.3...7}$; unde dividendo per a^7, & reducendo numeros ad unam partem, obtinemus ſtatim $a = \frac{2176}{1385}$, adeoque $2a$ $= \frac{4352}{1385}$, & ſic erit ſemicircumferentia ad radium, ſive tota circumferentia ad diametrum, ut 4352 ad 1385. Ut pateat quam parum abludat a proportione *Archimedea*, fiat ut 22 ad 7, ita 4352 ad quartum, qui erit $1384\frac{8}{11}$, hoc eſt $\frac{3}{11}$ unitatis minor quam 1385, adeoque noſtra analogia tantillo minor eſt, quam *Archimedea*. Scimus autem *Archimedeam* [utpote juſto majorem] in exceſſu peccare; noſtra igitur proprius ad veram accedit.

Si quis vellet Tabulas noſtras 5^{am} & 6^{am} per aliquot adhuc gradus continuare, perveniret ſtatim ad numeros rationis incredibili modo veris appropinquantis.

Volumus autem utramque Tabulam una curva augere, quod, quomodo fiat, facile patet ex lege progreſſionis litterarum *b*, *c*, *e*, *f*, *g*, &c. atque lubet binas iſtas Tabulas conflare in unam Tab. VII extenſam ad decimam curvam a quadrante circuli ADB incluſive ſumpto. Ubi notandum, curvam ipſam ADB vocari I; AEF, II; HGF, III; HIK, IV, MLK, V; & ita ſequentes. Tabula VII, quæ inde formatur, hæc eſt.

TAB.

TAB. VII.

Curva I $= a$

..... II $= b = \frac{aa}{1.2}$

..... III $= ba - \frac{a^3}{1.2.3}$

..... IV $= c = \frac{baa}{1.2} - \frac{a^4}{1.2.3.4}$

..... V $= ca - \frac{ba^3}{1.2.3} + \frac{a^5}{1.2.3.4.5}$

..... VI $= e = \frac{caa}{1.2} - \frac{ba^4}{1.2.3.4} + \frac{a^6}{1.2.3...6}$

..... VII $= ea - \frac{ca^3}{1.2.3} + \frac{ba^5}{1.2.3.4.5} - \frac{a^7}{1.2.3..7}$

... VIII $= f - \frac{eaa}{1.2} - \frac{ca^4}{1.2.3.4} + \frac{ba^6}{1.2.3..6} - \frac{a^8}{1.2.3...8}$

... IX $= fa = \frac{ea^3}{1.2.3} + \frac{ca^5}{1.2.3.4.5} - \frac{ba^7}{1.2.3...7} + \frac{a^9}{1.2.3...9}$

X $= g = \frac{faa}{1.2} - \frac{ea^4}{1.2.3.4} + \frac{ca^6}{1.2.3...6} - \frac{ba^8}{1.2.3...8} + \frac{a^{10}}{1.2.3...10}$

XI $= ga - \frac{fa^3}{1.2.3} + \frac{ea^5}{1.2.3.4.5} - \frac{ca^7}{1.2.3...7} + \frac{ba^9}{1.2.3...9} - \frac{a^{11}}{1.2.3...11}$

XII $= h = \frac{gaa}{1.2} - \frac{fa^4}{1.2.3.4} + \frac{ea^6}{1.2.3...6} - \frac{ca^8}{1.2.3...8} + \frac{ba^{10}}{1.2.3...10} - \frac{a^{12}}{1.2.3...1}$

Generatio & continuatio hujus Tabulæ fiet manifesta, modo attendatur ad progressionem litterarum, *b*, *c*, *e* &c. & unius cujusque constructio ex præcedentibus. Aliquid laboris requiritur ad supputandos singularum litterarum valores; reperi autem [salvo errore calculi] fore eos, ut sequitur in hoc adjecto laterculo.

TAB.

TAB. VIII.

Curva $\text{I} = a = a(1)$

.... $\text{II} = b = a^2(\frac{1}{1.2})$

.... $\text{IV} = c = a^4(\frac{5}{24}) = a^4(\frac{5}{1.2.3.4})$

.... $\text{VI} = e = a^6(\frac{61}{1.2.3...6})$

.... $\text{VIII} = f = a^8(\frac{1385}{1.2.3....8})$

.... $\text{X} = g = a^{10}(\frac{50521}{1.2.3....10})$

.... $\text{XII} = h = a^{12}(\frac{2702765}{1.2.3.....12})$.

Ex his facile ſupputantur curvæ intermediæ numerorum imparium: Erunt namque ordine, ut ſequens monſtrat laterculus.

TAB. IX.

Curva $\text{III} = a^3(\frac{2}{1.2.3})$

.... $\text{V} = a^5(\frac{16}{1.2.3.4.5})$

.... $\text{VII} = a^7(\frac{272}{1.2.3...7})$

.... $\text{IX} = a^9(\frac{7936}{1.2.3.....9})$

.... $\text{XI} = a^{11}(\frac{353792}{1.2.3......11})$

Diſponendo nunc ambos laterculos ſecundum ordinem curvarum, prodit

TAB. X.

Curva I $= a\,(1)$

.... II $= a^2\,(\frac{1}{1.2})$

.... III $= a^3\,(\frac{2}{1.2.3})$

.... IV $= a^4\,(\frac{5}{1.2.3.4})$

.... V $= a^5\,(\frac{16}{1.2.3.4.5})$

.... VI $= a^6\,(\frac{61}{1.2.3\ldots6})$

.... VII $= a^7\,(\frac{272}{1.2.3\ldots7})$

.... VIII $= a^8\,(\frac{1385}{1.2.3\ldots\ldots8})$

.... IX $= a^9\,(\frac{7936}{1.2.3\ldots\ldots9})$

.... X $= a^{10}\,(\frac{50521}{1.2.3\ldots\ldots10})$

.... XI $= a^{11}\,(\frac{353792}{1.2.3\ldots\ldots11})$

.... XII $= a^{12}\,(\frac{2702765}{1.2.3\ldots\ldots12})$

.... XIII $= a^{13}\,(\frac{22368256}{1.2.3\ldots\ldots13})$

.... XIV $= a^{14}\,(\frac{199360981}{1.2.3\ldots\ldots14})$

Videamus nunc, quam promte convergant longitudines curvarum ad æqualitatem, & inde appropinquetur mira celeritate ad veram rationem inter quadrantem circuli & radium; id quod fit æquando successive singularum valores cum valore proxime insequentis. Ponatur itaque

I =

I = II. hoc est, $a = aa\,(\frac{1}{1.2})$. unde $a:1$ seu ratio quadrantis ad radium $= 2:1$, justo major.

II = III. h. e. $a^2(\frac{1}{2}) = a^3(\frac{2}{1.2.3})$: unde $a:1 = 3:2$, justo minor.

III = IV. h. e. $a^3(\frac{2}{1.2.3}) = a^4(\frac{5}{1.2.3.4})$. unde $a:1 = 8:5$..major.

IV = V. h. e. $a^4(\frac{5}{1.2.3.4}) = a^5(\frac{16}{1.2.3.4.5})$. unde $a:1 = 25:16$..minor.

V = VI. h. e. $a^5(\frac{16}{1.2.3.4.5}) = a^6(\frac{61}{1.2.3....6})$. unde $a:1 = 96:61$..major.

VI = VII. h. e. $a^6(\frac{61}{1.2.3....6}) = a^7(\frac{272}{1.2.3....7})$. unde $a:1 = 427:272$..minor.

VII = VIII. h. e. $a^7(\frac{272}{1.2.3....7}) = a^8(\frac{1385}{1.2.3..8})$. unde $a:1 = 2176:1385$..major.

VIII = IX. h. e. $a^8(\frac{1385}{1.2.3..8}) = a^9(\frac{7936}{1.2.3..9})$. unde $a:1 = 12456:7936$..minor.

IX = X. h. e. $a^9(\frac{7936}{1.2.3.9}) = a^{10}(\frac{50521}{1.2.3...10})$. unde $a:1 = 79360:50521$..major.

X = XI. h. e. $a^{10}(\frac{50521}{1.2.3..10}) = a^{11}(\frac{353792}{1.2.3...11})$. unde $a:1 = 555731:353792$..minor.

XI = XII. h. e. $a^{11}(\frac{353792}{1.2.3..11}) = a^{12}(\frac{2702765}{1.2.3..12})$. unde $a:1 = 4245504:2702765$.major.

XII = XIII. h. e. $a^{12}(\frac{2702765}{1.2.3...12}) = a^{13}(\frac{22368256}{1.2.3....13})$. unde $a:1 = 35135945:22368256$.min.

XIII = XIV. h. e. $a^{13}(\frac{22368256}{1.2.3....13}) = a^{14}(\frac{199360981}{1.2.3....14})$. unde $a:1 = 313155584:199360981$.maj.

&c. = &c.

Sumendo antecedentium quadrupla, habebimus rationes appropinquantes circumferentiæ ad radium, vel faciendo, ut quilibet consequens ad quadruplum antecedentis, ita radius, qui ponatur = 10, 000, 000, ad quartum, qui dabit numerum partium circumferentiæ, ad verum celeriter accedentem. Fiat itaque

1°.	1 : 8 = 10, 000, 000 : 80, 000, 000, qui numerus justo major est.
2°.	2 : 12 = 10, 000, 000 : 60, 000, 000, qui justo minor est.
3°.	5 : 32 = 10, 000, 000 : 64, 000, 000, justo major.
4°.	16 : 100 = 10, 000, 000 : 62, 500, 000, justo minor.
5°.	61 : 384 = 10, 000, 000 : 62, 950, 820, justo major.
6°.	272 : 1708 = 10, 000, 000 : 62, 794, 117, justo minor.
7°.	1385 : 8704 = 10, 000, 000 : 62, 844, 766, justo major.
8°.	7936 : 49860 = 10, 000, 000 : 62, 827, 621, justo minor.
9°.	50521 : 317440 = 10, 000, 000 : 62, 833, 277, justo major.
10°.	353792 : 2222924 = 10, 000, 000 : 62, 831, 381, justo minor.
11°.	2702765 : 16982016 = 10, 000, 000 : 62, 832, 011, justo major.
12°.	22368256 : 140543780 = 10, 000, 000 : 62, 831, 800, justo minor.
13°.	199360981 : 12524622336 = 10, 000, 000 : 62, 831, 871, justo major.

N°. CLXVI.

PROBLEMA.

In superficie quacunque curva ducere lineam inter duo puncta brevissimam.

SOLUTIO *.

TAB. LXXIX. N°. CLXVI. *Fig.* 1.

SIT AE = x, EB = y, & a puncto B erigi intelligatur recta Bb = z, normalis ad planum AEB & superficiei curvæ occurrens in b, & detur æquatio quævis exprimens relationem trium coordinatarum x, y, z, qua relatione natura superficiei determinatur.

Esto jam linea quæsita $l\,b\,c$, a cujus singulis punctis l, b, c cadere intelligantur in subjectum planum AEB normales lL, bB, cC, formantes projectionem [curvæ quæsitæ] LBC. Concipiatur planum lBb, cujus sectio communis cum plano AEB, quæ

* *Hanc Solutionem communicavit Auctor cum Cl.* KLINGENSTIERNA *in Universitate* Upsalensi *Matheseos Professore sub finem Anni* 1728, *quam ipse* KLINGENSTIERNA *postea ita in chartam conjecit, ut hic extat.*

quæ eſt recta IB, tangat projectam LBC in elemento BC, quare planum IBb curvam quæſitam lbc ſtringet in elemento bc.

Concipiatur etiam planum bGI ſuperficiem curvam tangens in b, & occurrens plano AEB in communi ſectione GI, ac plano IBb in communi ſectione bI, quæ [quia utrumque planorum bGI & IBb curvam quæſitam ſtringit in elemento bc] erit productio ejuſdem elementi bc, adeoque curvam in hoc elemento continget. Producatur BE, donec ſectioni IG occurrat in G, & a puncto G demittatur ad BI normalis GH, quæ proinde perpendicularis erit ad planum IBb. A puncto H demittatur in rectam bI normalis Hb, & a puncto b in rectam cC normalis be. His factis, dicatur $EF = BD = dx$, $DC = dy$, $BC = be = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = ds$, $ce = dz$, ſubtangens BG, quæ ex natura ſuperficiei datur in x, y & z, $= T$.

Fundamentum Solutionis ſequentis in eo conſiſtit, quod planum per tria curvæ quæſitæ puncta infinite propinqua tranſiens, rectum ſit ad planum quod ſuperficiem curvam tangit. Quærendi itaque ſunt duo anguli: unus quem planum contingens bGI facit cum plano IBb; alter vero, quem planum per tria curvæ quæſitæ puncta tranſiens facit cum eodem plano IBb. Inventis his angulis, ſtatuenda eſt eorum ſumma æqualis angulo recto, & habebitur æquatio Problemati ſatisfaciens.

Hunc in finem ita procedendum: Ob ſimilitudinem triangulorum CBD, BGH, eſt $CB\,[ds] : BD\,[dx] = BG\,[T] : GH$; unde $GH = T\,dx : ds$.

Ob ſimilitudinem eorundem triangulorum BCD, GBH, eſt $BC\,[ds] : CD\,[dy] = GB\,[T] : BH$; unde $BH = T\,dy : ds$.

Ob ſimilitudinem triangulorum ceb, bBI, eſt $ce\,[dz] : eb\,[ds] = bB\,[z] : BI$; unde $BI = z\,ds : dz$.

Ex $BI\,[z\,ds : dz]$ ſubtrahatur $BH\,[T\,dy : ds]$, & relinquitur $IH = z\,ds : dz - T\,dy : ds$.

Ob ſimilitudinem triangulorum bce, IHb, eſt $bc\,[\sqrt{(ds^2 + dz^2)}] : ce\,[dz] = IH\left[\frac{z\,ds}{dz} - \frac{T\,dy}{ds}\right] : Hb$; unde H$b$

$=[\frac{zds}{dz} - \frac{Tdy}{ds}] \times dz : \sqrt{(ds^2 + dz^2)} = (zds^2 - Tdydz) : ds\sqrt{(ds^2 + dz^2)}$.

Jam quia GH normalis est ad planum IB*b* & H*b* normalis ad rectam *b*I, quæ est sectio communis planorum IB*b* & *b*GI, erit triangulum H*b*G in plano ad utrumque planorum IB*b* & *b*GI recto; adeoque ob angulum GH*b* rectum, *b*H : HG = radius : tang. anguli inclinationis H*b*G. Sumta itaque unitate pro radio, erit tangens anguli inclinationis $HbG = \frac{HG}{Hb}$ $= \frac{Tdx\sqrt{(ds^2 + dz^2)}}{zds^2 - Tdydz}$.

Angulus alter, quem planum per tria curvæ quæsitæ *l b c* puncta infinite propinqua transiens facit cum plano IB*b*, ita investigatur.

TAB. LXXIX N°. CLXVI. *Fig.*2,& 3. In projecta LBC [*Fig.* 2, concipienda est ut portio infinite parva superficiei cylindroïdicæ, plicatæ in linea *b*B, ita ut LB & BC sint duo elementa curvæ LBC, quæ est basis cylindroïdis] sint tria puncta L, B, C, quorum distantiæ LB, BC sint æquales & infinite parvæ; sintque in curva quæsita *lbc* tria puncta correspondentia *l*, *b*, *c*, per quæ transeat dictum planum. Producantur LB ad $\mathfrak{C}$ [*Fig.* 3], & *lb* ad β, ut fiant $B\mathfrak{C} = BC$, & $b\beta = bc = bp$, factisque reliquis, ut in figura, & positis $LB = BC = ds$ constantibus, erit $fe = -ddz$, & ob similitudinem triangulorum *bce*, *fcp*, $bc\, [\sqrt{(ds^2 + dz^2)}] : be\, [ds] = fc\, [-ddz] : cp$; unde $cp = -dsddz : \sqrt{(ds^2 + dz^2)}$. Ut inveniatur $p\beta$, seu quæ ipsi æqualis censeri debet, $C\mathfrak{C}$, sit [*Fig.* 3] curva projecta LBC, $BC = ds$, $BD = dx$, $CD = dy$, tangens ad B recta $B\mathfrak{C}$, in quam a puncto C cadat normalis $C\mathfrak{C}$ & a puncto $\mathfrak{C}$ in CD normalis $\mathfrak{C}O$.

Ob similitudinem triangulorum BCD, $\mathfrak{C}CO$, erit BD $[dx] : BC\, [ds] = CO\, [ddy] : C\mathfrak{C}$. Ergo $C\mathfrak{C} = dsddy : dx = p\beta$.

Jam quia *cp* & $c\beta$ normales sunt ad *bc*, quæ est communis sectio plani IB*b* seu CB*b*, & plani per tria puncta *l*, *b*, *c*, transeuntis, erit triangulum $cp\beta$ in plano ad utrumque istorum pla-

planorum recto, adeoque ob angulum $cp\beta$ rectum, erit $cp:p\beta$ = radius : tang. anguli inclinationis $pc\beta$. Sumta itaque unitate pro radio, erit tangens anguli inclinationis $pc\beta$, $= \frac{p\beta}{cp}$

$$= \frac{ds\,ddy:dx}{-ds\,ddz:\sqrt{(ds^2+dz^2)}} = \frac{-ddy\sqrt{(ds^2+dz^2)}}{dx\,ddz}.$$

Quoniam igitur, per fundamentum Solutioni præmissum, angulus $pc\beta$ + angulo $Hh G$ [*Fig.* 1] = angulo recto; erit productum tangentium istorum angulorum = quadrato radii = 1. Unde ducta tangente anguli $pc\beta$, modo inventa, $-ddy\sqrt{(ds^2+dz^2)}:dxddz$ in tangentem anguli HhG, quæ supra inventa erat $Tdx\sqrt{(ds^2+dz^2)}:(zds^2-Tdydz)$, habetur æquatio Problemati satisfaciens; $\frac{Tdx\sqrt{(ds^2+dz^2)}}{zds^2-Tdydz} \times \frac{-ddy\sqrt{(ds^2+dz^2)}}{dx\,ddz} = 1$, vel $(ds^2+dz^2)\,Tddy = (Tdzdy - zds^2)\,ddz$.

SCHOLIUM I. *

Hic est animadvertendum, quod Cl. KLINGENSTIERNA omisit, posse scil. superficiem curvam datam etiam considerari sectam planis parallelis ipsi AE per puncta B transeuntibus & plano AEB perpendicularibus, quæ sectiones facient in superficie curva, alias lineas curvas datas, quarum subtangentes ad singula puncta B spectantes dicantur $= \theta$. Unde mutatis T in θ, dy in dx, & ddy in ddx, prodibit hæc alia æquatio Problemati satisfaciens $(ds^2+dz^2)\,\theta\,ddx = (\theta dzdx - zds^2)\,ddz$; aut quia $-dxddx = dyddy$, prodibit multiplicando per $-Tdx:dy$, $(ds^2+dz^2)\,\theta\,Tddy = (-\theta Tdzdx^2:dy + Tzdxds^2:dy)\,ddz$. Est autem, quod facile demonstrari potest generaliter pro quacunque curva in superficie ad lubitum descripta, semper $\frac{\theta dy + Tdx}{\theta T} = \frac{dz}{z}$, adeoque $\theta Tdz = \theta zdy + Tzdx$; unde substituto valore ipsius θTdz, in æquatione ultimo inventa, resultabit $(ds^2+dz^2)\,\theta\,Tddy = (-\theta zdx^2 - Tzdx^3:dy + Tzdx$ TAB. LXXIX N°. CLXVI. *Fig.* 1.

* *Scholii hujus, ut & sequentium sunt ipsius Authoris verba.*

$Tzdxds^2:dy)ddz =$ [substituendo dy^2 pro $ds^2 - dx^2$] ; $(-\theta dx^2 + Tdydx)zddz$. Ponantur porro loco θT & z, eorum proportionales $\theta dy + Tdx$ & dz; abit æquatio in hanc $(ds^2+dz^2) \times (\theta dy + Tdx)ddy = (-\theta dx^2 + Tdydx)dzddz$, hoc est, $\frac{dzddz}{ds^2+dz^2} = \frac{\theta dy + Tdx}{-\theta dx + Tdy} \times \frac{ddy}{dx}$, vel $= \frac{\theta ddx - Tddy}{\theta dx - Tdy}$.

Nota. Eadem æquatio immediate deducitur etiam ex primo inventa $(ds^2 + dz^2)Tddy = (Tdzdy - zds^2)ddz$. Hanc enim multiplicando per θ, & postea pro θTdz substituendo ejus valorem $\theta zdy + Tzdx$, oritur $(ds^2 + dz^2)\theta Tddy = (\theta zdy^2 + Tzdydx - \theta zds^2)ddz =$ [ob $dy^2 - ds^2 = -dx^2$] huic $(-\theta dx^2 + Tdydx)zddz$, scriptoque $\theta dy + Tdx$ & dz pro θT & z, quibus sunt proportionales; habebitur $(ds^2 + dz^2) \times (\theta dy + Tdx)ddy = (-\theta dx^2 + Tdydx)dzddz$, & proinde $\frac{dzddz}{ds^2+ds^2} = \frac{\theta dy + Tdx}{-\theta dx + Tdy} \times \frac{ddy}{dx} = \frac{\theta ddx - Tddy}{\theta dx - Tdy}$, ut ante.

Pro tribus coordinatis x, y, z, scribatur t, x, y; sitque æquatio naturam superficiei curvæ exprimens, ut facit Cel. EULERUS *, hæc $Pdx = Qdy + Rdt$; erit [ponendo $dt = 0$] $Pdx = Qdy$, adeoque $P : Q = dy : dx = y : T$, unde $T = Qy : P$; ponendo nunc $dx = 0$, erit $Qdy = -Rdt$, id est, $-R : Q = dy : dt = y : \theta$, hinc $\theta = -Qy : R$. Quare in formula mea $\frac{dzddz}{ds^2+dz^2} = \frac{\theta ddx - Tddy}{\theta dx - Tdy}$, si pro x, y, z, T, θ, scribatur respective $t, x, y, Qy : P, -Qy : R$, & pro ds, quod mihi constans supponitur, ponatur $\surd(dt^2 + dx^2)$, prodibit $\frac{Pddt + Rddx}{Pdt + Rdx} = \frac{dyddy}{dt^2+dx^2+dy^2}$.

Si in æquatione mea priori $(ds^2 + dz^2)Tddy = (Tdzdy - zds^2)ddz$ litteræ *Eulerianæ* adhibeantur, & pro T scribatur $Qy : P$, emergit æquatio paulo simplicior $\frac{Qddx}{Qdxdy - Pdt^2 - Pdx^2} = \frac{ddy}{dt^2 + dx^2 + dy^2}$.

In

* *Comment. Acad. Petrop.* Tom. III. pag. 110 seqq.

In altera vero, modo supra exposita, $(ds^2 + dz^2)\,\theta ddx = (\theta dz dx - z ds^2)\,ddz$, adhibitis rursus litteris *Eulerianis*; ut pro θ scribendo $-Qy : R$, resultat æquatio parum differens a præcedente $\frac{Q\,ddt}{Qdt\,dy + Rdt^2 + Rdx^2} = \frac{ddy}{dt^2 + dx^2 + dy^2}$.

Quod si conferantur membra priora harum duarum æquationum, redibit æquatio naturam superficiei curvæ exprimens, $Pdx = Qdy + Rdt$, plane ut fieri oportuit: sunt enim illæ duæ æquationes æquivalentes.

SCHOLIUM II.

Methodus hactenus explicata solvendi Problema de Linea brevissima ducenda in superficie data, inservit etiam Solutioni aliorum hujusmodi Problematum difficiliorum, ad quæ communes methodi mere analyticæ ægrius forsan, aut plane non pertingent. Ex. gr. proponatur hoc

PROBLEMA.

Ducere in superficie data lineam curvam, cujus in puncto quolibet planum osculans datam habeat inclinationem ad planum tangens superficiem datam in eodem puncto.

Voco autem *planum osculans*, quod transit per tria curvæ quæsitæ puncta infinite sibi invicem propinqua.

SOLUTIO.

Si inclinationis angulus sit omnino rectus, coincidit hoc Problema cum præcedente: est enim curva quæsita ipsa brevissima, pro qua dedimus æquationem. Sit vero nunc angulus ille inclinationis obliquus, cujus tangens data sit $= n$. Constat ex Theoremate meo in *Actis Lips.* 1722, mens. Jul. publicato *, si duorum angulorum tangentes sint a & b, fore tangentem eorum summæ $= (a+b) : (1 - ab)$, sumta nimirum unitate pro si-

* N°. CXXVII. pag. 527, 528. *Tom. II.*

nu toto, seu tangente anguli semirecti. Quandoquidem igitur angulus noster inclinationis ostensus est, in Solutione præcedenti, constare ex duabus partibus, quarum una pro tangente habet $Tdx\sqrt{(ds^2+dz^2)} : (zds^2 - Tdydz)$ quæ vocetur $= a$, alterius vero tangens $-ddy\sqrt{(ds^2+dz^2)} : dxddz$, quæ dicatur b; quibus substitutis in $(a+b) : (1-ab)$, & quod provenit æquando ipsi n, habebitur $\left(\frac{Tdx\sqrt{(ds^2+dz^2)}}{zds^2 - Tdydz} + \frac{-ddy\sqrt{(ds^2+dz^2)}}{dxddz}\right) : \left(1 + \frac{Tddy \times (ds^2+dz^2)}{zds^2ddz - Tdydzddz}\right) = n$, seu $\frac{Tdx\sqrt{(ds^2+dz^2)}}{zds^2 - Tdydz} + \frac{-ddy\sqrt{(ds^2+dz^2)}}{dxddz}$
$= \frac{nzds^2ddz - nTdydzddz + nTddy \times (ds^2+dz^2)}{zds^2ddz - Tdydzddz}$.

Reducto priori membro ad communem denominatorem, & posterioris utroque termino per dx multiplicato, ita ut utrumque membrum etiam habeat communem denominatorem; quo proin neglecto, orietur $(Tdx^2ddz - zds^2ddy + Tdydzddy) \times \sqrt{(ds^2+dz^2)} = nzds^2dxddz - nTdydxdzddz + nTdxddy \times (ds^2+dz^2)$. Quæ æquatio si tractetur ut supra factum in *Nota* post *Scholium* I, eruetur, operatione rite peracta, hæc altera æquatio: $(\theta dxdyddz + Tdx^2ddz - \theta dxdzddy \pm Tdzdyddy)\sqrt{(ds^2+dz^2)} = n\theta dx^2dzddz - nTdxdydzddz + (n\theta dyddy + nTdxddy) \times (ds^2+dz^2)$. Utraque igitur harum duarum æquationum satisfacit Problemati.

COROLLARIUM.

Dantur casus speciales, in quibus æquatio supra inventa $(ds^2+dz^2)Tddy = (Tdzdy - zds^2)ddz$ ad differentias primas reduci potest. Sit v. gr. superficies curva data ejus naturæ, ut omnes illius sectiones, planis ad rectam AE normalibus factæ, sint lineæ rectæ ordinatis EB parallelæ, cujus generis superficies *Cylindroidicæ* appellari possunt. Hoc casu subtangens T evadit infinita; adeoque zds^2 infinite parva, respectu $Tdzdy$. Deleta itaque zds^2, & reliquis æquationis terminis per T divisis, oritur æquatio $(ds^2+dz^2)ddy = dzdyddz$; unde $ddy : dy = dzddz : (ds^2+dz^2)$; & multiplicando per 2, $2ddy : dy = 2dzddz : (ds^2+dz^2)$, sumtis

ſumtiſque integralibus per Logarithmos $lndy^2 = l(ds^2 + dz^2)$, factoque tranſitu ad numeros, $ndy^2 = ds^2 + dz^2$. Quoniam in hoc caſu z datur per x & conſtantes, ponatur $dz = pdx$, intelligendo per p quantitatem utcunque datam in x & conſtantibus, & pro ds^2 ſcribatur ejus valor $dx^2 + dy^2$, & mutatur æquatio inventa in hanc: $ndy^2 = dx^2 + dy^2 + ppdx^2$ vel $(n - 1) dy^2 = (1 + pp) dx^2$, extractaque radice quadrata $dy\sqrt{(n - 1)} = dx\sqrt{(pp + 1)}$. Jam manifeſtum eſt, membrum hujus æquationis poſterius $dx\sqrt{(pp + 1)}$ deſignare elementum arcus curvæ, cujus coordinatæ ſunt x & $\int pdx$, ſeu z; id eſt curvæ generatricis Cylindroidis. Si itaque arcus ille dicatur A, erit $dy\sqrt{(n-1)} = dx\sqrt{(pp + 1)} = dA$, ſumtiſque integralibus $y\sqrt{(n - 1)} = A$; id eſt ordinata curvæ projectionis eſt ad arcum curvæ generatricis Cylindroidis ut 1 ad $\sqrt{(n - 1)}$, ſeu in ratione conſtante; quod aliunde non difficulter colligitur, & bonitatem Solutionis præcedentis confirmat.

SCHOLIUM III.

Poteſt perveniri modo elegantiori ad æquationem noſtram ſupra inventam $\frac{dz\,ddz}{ds^2 + dz^2} = \frac{\theta ddx - Tddy}{\theta dx - Tdy}$, ſine operoſa ſupputatione anguli inclinationis H*b*G quem nimirum facit planum tangens ſuperficiem curvam *b*IG cum plano *b*BI. Hunc in finem, adhibita imaginatione, conſulendæ ſunt ambæ Figuræ 1&2, ubi ſubjectum planum in quo eſt curva projectionis LBC vocabo *horizontale*; planum vero ſtringens curvam quæſitam in elemento *bc*, nempe *b*IB, plus ultra continuatum nominabo *verticale*; planum denique tranſiens per tria puncta proxima *c b l*, hoc eſt, planum trianguli $c\beta b$, dicam, ut prius, *Planum oſculans*. Nunc quia planum oſculans debet eſſe perpendiculare ad planum tangens ſuperficiem curvam, & quia $c\beta$ eſt perpendicularis ad utriuſque plani communem ſectionem $b\beta$, erit lineola $c\beta$ perpendicularis ad ipſum planum tangens ſuperficiem. Quod ſi itaque $c\beta$ continuetur deorſum verſus, donec occurrat

TAB. LXXIX. N°. CLXVI. *Fig.* 1,& 2.

Y 2 plano

TAB. LXXIX. N°. CLXVI. *Fig.* 4. plano horizontali in puncto P, a quo si ad extremitates subtangentium G & M, ducantur rectæ PG & PM, habentur duo triangula PcG & PcM, rectangula in puncto sublimi c; est enim planum McG tangens superficiem, ad quod normalis est cP; adeoque ang. PcG = recto = ang. PcM. Hinc $PG^2 - cG^2 = Pc^2 = PM^2 - cM^2$. Est vero $cG^2 = CG^2 + cC^2$ & $cM^2 = CM^2 + cC^2$, quibus valoribus substitutis & deleto communi Cc^2, erit $PG^2 - CG^2 = PM^2 - CM^2$. Ductis nunc PR parallela ipsi MC, seu perpendiculari ad GC productam [angulus quippe GCM est rectus], & PS parallela ipsi GC, seu perpendiculari ad MC productam; est utique $PG^2 - CG^2 = PC^2 + 2\,CG \times CR$, & $PM^2 - CM^2 = PC^2 + 2CM \times CS$, unde $CG \times CR = CM \times CS$, & $CS : CR = CG : CM$, hoc est, latera parallelogrammi rectanguli RS sunt ipsis subtangentibus reciproce proportionalia. Ex quo fluit quod tangens anguli RCP [$\frac{RP}{RC} = \frac{CS}{CR}$] = $\frac{CG}{CM} = \frac{T}{\theta}$.

Porro intelligatur in *Fig.* 2, in plano verticali latusculum pc continuari deorsum in planum horizontale cui occurrat in puncto V [*Fig.* 4]. Erit ductis cV & CV; 1°. cVP triangulum rectangulum in V & simile ipsi $cp\beta$, quia utraque PV & $p\beta$ sunt horizontales in communi plano jacentes, adeoque parallelæ; est enim planum cVP nihil aliud quam continuatio plani $cp\beta$. 2°. CV est continuatio elementi BC, seu tangens curvæ projectionis LBC. Ut itaque inveniatur angulus RCV, hoc est [in *Fig.* 1] angulus BCD, cujus tangens $= \frac{BD}{DC} = \frac{dx}{dy}$; sic procedo. Angulus CVP est rectus, quod probe imaginando facile patet, & cum cVP sit etiam rectus, erit, ob commune latus PV, tangens anguli VcP ad tangentem VCP ut VC ad Vc = [ob triangulum rectangulum cCV simile triangulo rectangulo, *Fig.* 2, bec] $ec : bc = dz : \surd(ds^2 + dz^2)$. Quia itaque

itaque tangens anguli VcP seu $pc\beta = \frac{p\beta}{pc} =$ [ut supra inventum] $-ddy\sqrt{(ds^2+dz^2)} : dxddz$, habemus tangentem anguli $VCP = -ddy(ds^2+dz^2) : dzdxddz$. Jam vero ex cognitis tangentibus duorum angulorum RCP & VCP invenitur, ope Theorematis mei in *Act. Lips.* 1722 * exhibiti, tangens anguli ex illis compositi RCV, seu ejus qui huic ad verticem est oppositus BCD; quique pro tangente habet $\frac{dx}{dy}$, nempe erit tangens anguli $RCV = \frac{T}{\theta} + \frac{-ddy(ds^2+dz^2)}{dzdxddz} : \left(1 + \frac{Tddy.(ds^2+dz^2)}{\theta dzdxddz}\right)$ seu $= \frac{Tdzdxddz - \theta ddy.(ds^2+dz^2)}{\theta dzdxddz + Tddy.(ds^2+dz^2)}$, adeoque $\frac{dx}{dy} = \frac{Tdzdxddz - \theta ddy.(ds^2+dz^2)}{\theta dzdxddz + Tddy(ds^2+dz^2)}$, quæ reducta dat $\frac{dzddz}{ds^2+dz^2} = \frac{\theta dy + Tdx}{-\theta dx + Tdy} \times \frac{ddy}{dx}$, vel [ob $\frac{ddy}{dx} = -\frac{ddx}{dy}$] $= \frac{\theta ddx - Tddy}{\theta dx - Tdy}$; ut per priorem modum.

Coroll. I.

In casu Cylindroidum, ubi alterutra subtangentium, ex. gr. CM, existit infinita, habebit CR ad RP rationem infinitam, hoc est, angulus RCP evanescit, unde tantum faciendum est $\frac{dx}{dy} =$ tangenti anguli $VCP = \frac{-ddy.(ds^2+dz^2)}{dzdxddz}$; id quod statim dat $\frac{dzddz}{ds^2+dz^2} = \frac{-dyddy}{dx^2}$, seu $= \frac{ddx}{dx}$. Quæ est eadem æquatio quæ habetur in superiori Corollario, nisi quod hic sit x quod ibi est y. Reliqua perficiuntur ut ibi.

Coroll. II.

In casu Conoïdum, ubi Cc est axi parallela, per quam & per ipsam axem transeunt plana cCG, plana autem basi parallela formant in superficie curva circulos; unde hic iterum subtangentes CM evadunt infinitæ. Quare etiam faciendum est

* N°. CXXVII, pag. 527, Tom. II.

TAB. LXXIX. N°. CLXVI. *Fig.* 5. [vid. *Fig.* 5] $\frac{BD}{CD}$ = tangenti anguli VCP. Est vero hic [sumta $-dz$, quia, crescentibus x & y, ipsa z decrescere supponitur] $ec : bc$ [$= -dz : \sqrt{(ds^2 + dz^2)}$] = tangens anguli V$c$P : tangent. anguli VCP. Sed tangens anguli VcP, seu $pc\beta$, [$= \frac{p\beta}{pc}$] = [ut inferius docebitur] $\frac{(yddx + 2dydx) \times \sqrt{(ds^2 + dz^2)}}{-dyddz}$. Hinc ergo tangens anguli VCP $= \frac{(yddx + 2dydx).(ds^2 + dz^2)}{dydzddz} = \frac{BD}{CD} = \frac{ydx}{dy}$; ex cujus reductione emergit $\frac{dzddz}{ds^2 + dz^2} = \frac{yddx + 2dydx}{ydx}$. Integrando per logarithmos, indeque transeundo ad numeros, prodit $yydx = b\sqrt{(ds^2 + dz^2)}$. Adeo ut hic pariter non opus sit operosa illa inventione anguli plani tangentis superficiem & plani verticalis.

Applicatio ejusdem methodi ad Superficies Conoidicas, seu tales, quæ conversione curvæ cujuscunque datæ circa axem positione datum generantur.

TAB. LXXIX. N°. CLXVI. *Fig.* 5. Sit vertex Conoidis, a; curva quæsita lbc. A vertice a, & singulis curvæ quæsitæ punctis l, b, c, &c. cadere intelligantur in subjectum planum ad axem Conoidis aA rectum, perpendiculares aA, lL, bB, cC &c. formantes (*Fig.* 5) projectionem verticis A, & projectionem curvæ quæsitæ LBC. Centro A, radio arbitrario AK = 1, describatur in dicto plano ad axem Conoidis aA recto circulus KEF, & ducantur rectæ ABE, ACF, projectæ LBC occurrentes in punctis infinite propinquis B, C, & peripheriæ KEF in E, F. Concipiatur planum IBb, cujus sectio communis cum plano BAK, quæ est recta IB, tangat projectam LBC in elemento BC; quare planum ipsum IBb curvam quæsitam lbc stringet in elemento bc. Concipiatur etiam planum bGI Conoidem tangens in b, & occurrens plano BAK in communi sectione GI, ac plano IBb in communi sectione bI, quæ quia utrumque planorum bGI & IBb curvam quæsitam stringit in elemento bc, erit productio

ductio ejusdem elementi bc, adeoque curvam in hoc elemento continget. Producatur AE donec sectioni IG occurrat in G, eritque angulus AGI rectus. A puncto G demittatur ad rectam BI normalis GH, quæ proinde perpendicularis erit ad planum I B b; a puncto H demittatur in rectam bI normalis Hb, & jungatur Gb; tandemque a puncto c demittatur in bB normalis ce. Quibus factis, dicatur arcus KE $= x$, EF $= dx$, AB $= y$, DC $= dy$, BD $= ydx$, BC $= \surd(dy^2 + yydx^2) = ds$, B$b = z$, $be = - dz$, subtangens BG ex natura Conoidis data, $= T$.

Ob similitudinem Triangulorum CDB, BHG, erit CB [ds] : BD [ydx] $=$ BG [T] : GH, unde GH $= Tydx : ds$.

Ob similitudinem triangulorum CDB, IHG, erit CD [dy]: BD [ydx] $=$ GH [$\frac{Tydx}{ds}$] : HI, unde HI $= Tyydx^2 : dsdy$.

Ob similitudinem triangulorum bec, HbI, erit bc [$\surd(ds^2 + dz^2)$] : be [$- dz$] $=$ HI [$\frac{Tyydx^2}{dsdy}$] : Hb; unde H$b = - Tyydx^2dz : dsdy \surd(ds^2 + dz^2)$.

Jam quia GH normalis est ad planum IBb, & Hb normalis ad rectam bI, quæ est sectio communis planorum IBb & bGI, erit triangulum HbG in plano ad utrumque planorum IBb & bGI recto, adeoque ob angulum GHb rectum, bH : HG $=$ radius : tang. anguli inclinationis HbG. Sumta itaque unitate pro radio, erit tangens anguli inclinationis HbG $= \frac{HG}{Hb} = \frac{Tydx : ds}{- Tyydx^2dz : dsdy \surd(ds^2 + dz^2)} = \frac{-dy\surd(ds^2 + dz^2)}{ydxdz}$.

Angulus alter, quem planum per tria curvæ quæsitæ lbc puncta infinite propinqua transiens facit cum plano IBb, ita investigatur. [Vid. *Fig.* 7 & 6, quæ concipienda est instar *Fig.* 2 portio infinite parva superficiei cylindroidicæ].

In projecta LBC, sint tria puncta L, B, C, quorum distantiæ LB, BC, sint æquales & infinite parvæ; sintque in curva quæsita lbc tria correspondentia puncta l, b, c, per quæ transeat dictum planum. Producantur LB ad $\mathfrak{C}$, & lb ad β, ut

TAB. LXXIX. No. CLXVI. *Fig.* 6 & 7

ut fiant Bβ = BC, & $b\beta = bc = bp$. Factis reliquis ut in Figura, positisque LB = BC = ds constantibus, erit $lg = bm = -dz$, & $me = fc = -ddz$.

Ob similitudinem triangulorum fmb, cpf, est $bf[\sqrt{(ds^2+dz)}]$: $fm[ds] = fc[-ddz]:cp$. Unde $cp = -dsddz:\sqrt{(ds^2+dz^2)}$.

Ut inveniatur $p\beta$, seu quæ ipsi æqualis esse censeri debet, Cβ, sit in *Fig.* 7. curva projecta LBC, centrum A, tangens ad C recta CP, & tangens ad B recta BO, in quas a centro A cadant perpendiculares AP & AO, & in OB productam normalis Cβ.

Ob similitudinem triangulorum BCD, BAO, est CB [ds]: BD [ydx] = BA [y]: AO; unde AO = $yydx:ds$, sumtisque differentiis, posita ds constante, dAO, seu oP = $(yyddx + 2ydxdy):ds$.

Ob similitudinem eorundem triangulorum BCD, BAO, est BC [ds]: CD [dy] = AB [y]: BO; unde BO = $ydy:ds$.

Ob similitudinem triangulorum BoP, BCβ, est Bo seu $\beta o[\frac{ydy}{ds}]$: oP$[\frac{yyddx+2ydxdy}{ds}]$ = BC [ds]: Cβ. Est itaque C$\beta = p\beta = (ydsddx + 2dxdyds):dy$.

Jam quia cp & $c\beta$ [*Fig.* 6] normales sunt ad bc, quæ est communis sectio plani IBb, seu CBb, & plani per tria puncta l, b, c, transeuntis, erit triangulum $cp\beta$ in plano ad utrumque istorum planorum recto, adeoque, ob angulum $cp\beta$ rectum, erit $cp : p\beta$ = radius: tang. anguli inclinationis $pc\beta$. Sumta itaque unitate pro radio, erit tangens anguli inclinationis $pc\beta = \frac{p\beta}{cp} =$

$$\frac{(ydsddx + 2dxdyds):dy}{-dsddz:\sqrt{(ds^2+dz^2)}} = (yddx + 2dydx)\sqrt{(ds^2+dz^2)}: -dyddz.$$

Quoniam itaque angulus $pc\beta$ + angulus HbG = angulo recto, erit productum tangentium = quadrato radii = 1; unde ducta tangente modo inventa anguli $pc\beta$, $(yddx + 2dydx).\sqrt{(ds^2+dz^2)}: -dyddz$, in tangentem anguli H$b$G, quæ supra inventa erat $-dy\sqrt{(ds^2+dz^2)}:ydxdz$; habetur æquati-

tio $(yddx + 2dydx).(ds^2 + dz^2) : ydxdzddz = 1$, vel $\frac{yddx + 2dydx}{ydx} = \frac{dzddz}{ds^2 + dz^2}$, vel $\frac{yyddx + 2ydydx}{yydx} = \frac{1}{2} \times \frac{2dzddz}{ds^2 + dz^2}$. Sumtisque integralibus per Logarithmos, $lyydx = lb + l\sqrt{(ds^2 + dz^2)}$; factoque ad numeros transitu, $yydx = b\sqrt{(ds^2 + dz^2)}$; quæ æquatio exprimit naturam projectionis LBC.

Quia z per naturam Conoidis datur in y & constantibus, ponatur $dz = pdy$, intelligendo per p quamcunque functionem ipsius y. In æquatione inventa $yydx = b\sqrt{(ds^2 + dz^2)}$, pro dz scribatur pdy, & pro ds^2 substituatur ejus valor $dy^2 + yydx^2$, quo facto habebitur $dx = \frac{bdy}{y}\sqrt{\frac{1 + pp}{yy - bb}}$; in qua æquatione, quia separatæ sunt indeterminatæ, construi potest curva projectionis LBC per quadraturas; quo peracto, si e singulis punctis L, B, C, &c. erigantur normales, Ll, Bb, Cc, &c, superficiei Conoidicæ datæ occurrentes in punctis l, b, c, &c, signabitur in dicta superficie curva quæsita lbc. *Q. E. F.*

Exemplum Primum.

Si Conoides datum fuerit superficies plana, plano projectionis ABK parallela, erit z constans, adeoque $dz = pdy = 0$; consequenter $p = 0$, & æquatio generalis $dx = \frac{bdy}{y}\sqrt{\frac{1 + pp}{yy - bb}}$ mutatur in hanc, $dx = \frac{bdy}{y\sqrt{(yy - bb)}}$, vel [multiplicando per b] $bdx = \frac{bbdy}{y\sqrt{(yy - bb)}}$. Membrum posterius $\frac{bbdy}{y\sqrt{(yy - bb)}}$ est elementum arcus circuli, cujus radius $= b$ & secans $= y$; qui arcus si dicatur A, erit [posito radio AK (*Fig.* 5.) qui arbitrarius & pro unitate sumtus est, $= b$] $x = A$. Quia igitur y semper est secans anguli x vel A, patet lineam quæsitam esse rectam, quæ circulum, cujus radius est b, tangit. TAB. LXXIX. No. CXVI. *Fig.* 5.

EXEMPLUM II.

Sit Conoides datum Conus, cujus axis sit ad radium baseos ut n ad 1, eritque $z = ny$, $dz = pdy = ndy$, adeoque $p = n$, & æquatio ad projectam $dx = \frac{bdy\sqrt{(1+nn)}}{y\sqrt{(yy-bb)}}$, seu $\frac{bdx}{\sqrt{(1+nn)}} = \frac{bbdy}{y\sqrt{(yy-bb)}}$; sumtisque integralibus $\frac{bx}{\sqrt{(1+nn)}} = \int\frac{bbdy}{y\sqrt{(yy-bb)}}$ = arcui circuli, cujus radius b, & secans y. Qui si dicatur A, habetur $bx:\sqrt{(1+nn)} = A$, vel [posito iterum AK = 1 = b] $x:\sqrt{(1+nn)} = A$. Hæc æquatio ita construi potest.

TAB. LXXX. N°. CLXVI. *Fig.* 8. Centro A [*Fig.* 8,] radio AL = b describatur circulus LEF, quem tangat in L recta LD. E centro A educta utcunque secante AED, quæ circumferentiæ LEF occurrat in E, & tangenti LD in D, capiatur angulus LAF ad angulum LAE ut $\sqrt{(1+nn)}$ ad 1, & producatur AF quantum opus in B. Centro A, radio AD, describatur arcus circuli DB rectæ AFB occurrens in B. His factis, erit punctum B ad projectam quæsitam LBC.

COROLLARIUM.

Si $\sqrt{(1+nn)}$ fuerit numerus rationalis, erit curva projectionis LBC algebraica. Id quod evenit, quoties sumto pro r numero quocunque, integro vel fracto, fuerit $n = (1-rr): \pm 2r$ vel $n = \pm 2r:(1-rr)$; quemadmodum patet, ponendo per methodum *Diophanteam* $\sqrt{(1+nn)} = r+n$, & $\sqrt{(1+nn)} = 1+rn$.

EXEMPLUM III.

Sit Conoides datum Sphæra, cujus radius $= a$, & centrum in A. Per naturam Sphæræ $z = \sqrt{(aa-yy)}$, adeoque $dz = -ydy:\sqrt{(aa-yy)}$ & $p = -y:\sqrt{(aa-yy)}$. Quo valore

lore in æquatione generali ſubſtituto, mutatur illa in hanc, $dx = abdy : y\sqrt{(yy - bb)}. \sqrt{(aa - yy)}$ *.

Ut membrum poſterius $abdy : y\sqrt{(yy - bb)}. \sqrt{(aa - yy)}$ ad formam ſimpliciorem reducatur, ponatur $y = ab : u$, adeoque $dy = - abdu : uu$, & invenietur, factis ſubſtitutionibus, $abdy : y\sqrt{(yy - bb)} \sqrt{(aa - yy)} = - udu : \sqrt{(aa - uu)}. \sqrt{(uu - bb)}$. Ponatur porro $uu = cv$, & $2udu = cdv$, quibus ſubſtitutis, habebitur $- udu : \sqrt{(aa - uu)}. \sqrt{(uu - bb)} = - \frac{1}{2} dv : \sqrt{(aa : c - v)}. \sqrt{(v - bb : c)} = - \frac{1}{2} dv : \sqrt{(- aabb : cc + (aa + bb) v : c - vv)}$. Ulterius ſit $- v + (aa + bb) : 2c = t$, & $- dv = dt$, ſubductoque calculo invenietur $- \frac{1}{2} dv : \sqrt{(- aabb : cc + (aa + bb) v : c - vv)} = \frac{1}{2} dt : \sqrt{((aa - bb)^2 : 4cc - tt)}$ Hinc, ex æquo, $dx = \frac{1}{2} dt : \sqrt{((aa - bb^2) : 4cc - tt)}$, & multiplicando utrumque membrum per $(aa - bb) : c$, $(aa - bb) dx : c = (aa - bb) dt : 2c\sqrt{((aa - bb)^2 : 4cc - tt)}$, ſumtiſque integralibus $(aa - bb) x : c = \int (\frac{aa - bb}{2c} dt : \sqrt{((\frac{aa - bb}{2c})^2 - tt)}$ $=$ arcui circuli, cujus radius $= (aa - bb) : 2c$ & ſinus rectus $= t$; qui arcus ſi dicatur A, habetur $(aa - bb) x : 2c = A$, vel [ponendo radium arbitrarium AK [1] = radio $(aa - bb) : 2c$] $2x = A$.

* Ex ea æquatione immediate deduci poteſt [inſuper habito intricatiſſimo qui hic ſequitur calculo] curvam quæſitam breviſſimam in ſuperficie ſphærica eſſe circulum maximum. Quia enim membrum poſterius $abdy : y\sqrt{(yy - bb)}. \sqrt{(aa - yy)}$ eſt proportionale differentiali arcus circuli maximi, cujus ſinus eſt $n\sqrt{(aa - yy)} : y$ [ubi per n intelligo $ab : \sqrt{(aa - bb)}$], ſicuti experiri volenti patebit; ac quia ipſum $n\sqrt{(aa - yy)} : y$ proportionale eſt tangenti arcus meridiani inter punctum b & E [Vid. *Fig.* 5,] intercepti; curva breviſſima cbl in ſuperficie ſphærica debet eſſe ejus naturæ, ut ſinus arcus KE ſit ad tangentem arcus Eb in conſtanti ratione. Liquet autem ex Trigonometria ſphærica hoc competere cuilibet circulo maximo, qui in puncto K oblique ſecat circulum KE pro baſi ſumtum. Eſt enim ubique ut ſinus totus ad tangentem obliquitatis, ita ſinus arcus indeterminati KE ad tangentem arcus correſpondentis Eb. Ergo curva breviſſima in ſuperficie ſphærica eſt arcus circuli maximi. *Q. E. D.*

TAB. LXXX. N°. CLXVI. *Fig* 9.

Ad ductum hujus calculi curva projectionis quæsita hoc modo construeretur: Centro A, radio $AK = (aa - bb) : 2c$, descripto circulo KEF, eductaque utcunque recta AE, fiat arcus $KF = 2KE$, eritque FG a puncto F ad radium AK normaliter ducta $= t$. Hinc si in AE, producta si opus, capiatur $AB = y =$ [per constructionem] $ab : u =$ [constr.] $ab : \sqrt{cv}$ $=$ [constr.] $ab : \sqrt{(\frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}bb - ct)}$, erit punctum B in curva projectionis quæsita. Sed cum curva hæc sit algebraïca, quemadmodum ex constructione patet, convenit æquationem algebraïcam inter coordinatas rectangulas AH, HB, investigare. Dicantur in hunc finem $AH = p$, $HB = q$. Ob angulum FAK bisectum per rectam ANE, est $FA + AG$ $[(aa - bb) : 2c + \sqrt{((aa - bb)^2 : 4aa - tt)}] : FG[t] = AG[\sqrt{((aa - bb)^2 : 4cc - tt)}] : GN$; unde $GN = t\sqrt{((aa - bb)^2 : 4cc - tt)} : ((aa - bb) : 2c + \sqrt{((aa - bb)^2 : 4cc - tt)})$. Ob similitudinem triangulorum AGN, AHB, est $AG[\sqrt{((aa - bb)^2 : 4cc - tt)}] :$ $GN[t\sqrt{((aa - bb)^2 : 4cc - tt)} : ((aa - bb) : 2c + \sqrt{((aa - bb)^2 : 4cc - tt)})] = AH[p] : HB[q]$; unde ductis in se mediis & extremis, ac dividendo utrumque productum per $\sqrt{((aa - bb)^2 : 4cc - tt)}$, habebitur $q = pt : ((aa - bb) : 2c + \sqrt{((aa - bb)^2 : 4cc - tt)})$; proinde $q\sqrt{((aa - bb)^2 : 4cc + tt)} = pt - aaq : 2c + bbq : 2c$. Si utrumque hujus æquationis membrum ad quadratum evehatur, invenietur, deletis quæ se destruunt, $ct = (aa - bb)pq : (pp + qq)$. Ob triangulum rectangulum AHB, erit AB^2 $(yy = aabb : (\frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}bb - ct)) = AH^2\,[pp] + HB^2\,[qq]$, quod reducendo dat $ct = \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}bb - aabb : (pp + qq)$; unde habetur æquatio relationem coordinatarum p & q exprimens: $(aa - bb)pq : (pp + qq) = \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}bb - aabb : (pp + qq)$, seu $pp + qq = 2((aa - bb)pq + aabb) : (aa + bb)$; quæ æquatio pertinet ad Ellipsin DBE, cujus semiaxis major $AD = a$, minor $AE = b$, coordinatæ rectangulæ $AH = p$, $HB = q$, existente angulo DAH semirecto.

TAB. LXXX. N°. CLXVI. *Fig.* 10.

Demissa enim BC normali ad AD, dictisque $AC = x$, $BC = y$, erit $x + y = q\sqrt{2}$, & $x - y = p\sqrt{2}$, & exterminando q & p, ex æquatione

N.° CLXV.

K
F
X
B
L
G
D
I
E
Y
A
C

LXVI.

p
g
f
c
b
e
l
Fig. 2.
L
B
C
Fig. 3.
C
O
6
B
D
L
a
l
i
b
Fig. 5.
c
e
K
A
L
D
B
C
h
H
E
F
G
I
V
A
Fig. 7.
O
L
e
P
D
C
B
6

tione $pp + qq = 2((aa - bb)pq + aabb) : (aa + bb)$, habetur $aayy + bbxx = aabb$.

SCHOLIUM.

Æquatio generalis $dx = \frac{bdy}{y} \sqrt{\frac{1 + pp}{yy - bb}}$ probe convenit cum Solutione Cel. *Jac.* BERNOULLI in *Act. Erud. Lipſ.* an. 1698, p. 227 publicata. Si enim in ejus formula $\int (atdx : xx \sqrt{(xx - aa)})$, pro x ſcribatur y, & pro a, b, erit illa $\int btdy : yy \sqrt{(yy - bb)}$, ubi pro t ſcribatur ejus valor $y\sqrt{(dy^2 + dz^2)} : dy$, & pro dz, ut ſupra, pdy, habetur $\int \frac{bdy}{y} \sqrt{\frac{1 + pp}{yy - bb}}$.

Sed hanc ſolutionem Vir laudatus alio ſine dubio fundamento deduxit. Si enim methodum habuiſſet ad omnis generis ſuperficies curvas ſeſe extendentem, utique generalem ſolutionem Problematis a Fratre provocatus dediſſet. Methodus ſequens ad Problema generaliter conceptum ægre extenditur, quamvis pro Conoidibus ſatis ſit expedita.

Sit Conoides datum ACEBDA, cujus axis AB rectus ſit ad baſin circularem ECD, ſitque linea quæſita KPIG. Superficies ACEA dividatur in ſectores infinitos, ducendo meridianos APN, AI*f*, AGF, &c. infinite propinquos, & a punctis P, I, G, &c. ubi hi meridiani ſecant curvam KPIG, ducantur tangentes PL, IL, GL, &c. occurrentes axi AB in punctis L, L, L, &c. infinite parum a ſe invicem diſtantibus; unde duo puncta quævis L, L, ubi duæ tangentes viciniſſimæ, v. g. GL & IL axi occurrunt, pro uno eodemque haberi poſſunt, & conſequenter figura LGIL pro triangulo haberi, quod ſimiliter de reliquis LIPL, &c. intelligendum eſt. TAB. LXXX. N°. CLXVI. *Fig.* 11. & 12.

Planum trianguli GLI concipiatur circa IL tanquam axem aliquantulum elevari, donec cum triangulo ſequente ILP conſtituat unum idemque planum GLP. Planum hoc GLP ſimiliter elevari intelligatur circa rectam PL ut axem, donec cum triangulo ſequente in eodem plano exiſtat, atque hoc

tamdiu continuetur, donec LGIPKL in planum sit reducta [Vid. *Fig.* 12]. His ita factis, manifestum est lineam KOPIG in planum reductam fore lineam rectam quippe in plano brevissimam. Hinc per naturam lineæ rectæ angulus GLI æqualis est differentiæ angulorum LIK, LGK; angulus ILP = LPK — LIK, &c. id est, angulus quem tangentes proximæ, v. g. GL & IL comprehendunt in puncto axis L, ubi concurrere censendæ sunt, æqualis est differentiæ anguli LGI vel LIP, quem tangens LG vel LI facit cum curva KPIG in G vel I.

Ex hoc fundamento natura curvæ KPIG ita investigatur. Per punctum quodcunque in curva assumtum G, [*Fig.* 11] ducatur pars circuli paralleli Gg, meridianis AGF & AIf intercepta. A punctis G & g ducantur ad axem AB normales GH, gH, & a punctis F, f ad centrum baseos B rectæ FB, fB. Dicatur radius baseos BC = BF = 1, applicata GH = x, arcus circumferentiæ baseos CF = z, cujus elementum fF = dz, arculus meridiani Ig = ds, & tangens GL vel IL = t.

Ob similitudinem sectorum BFf, HGg, est BF [1] : HG [x] = Ff [dz] : Gg. Ergo Gg = xdz. Hinc angulus GLI = Gg : GL = $xdz : t$.

Anguli LIG complementum ad semicirculum est angulus GIg, cujus tangens est ad radium ut Gg ad gI; quare posito radio = BC = 1, erit tangens anguli GIg, seu quod idem est, signo tantum mutato, tangens anguli LGI = — Gg : gI = — $xdz : ds$. Ergo elementum anguli LGI = — $d(\frac{xdz}{ds}) : (1 + \frac{xxdz^2}{ds^2})$. Sed per fundamentum supra adstructum, angulus GLI = elemento anguli LGI, ergo habetur æquatio $\frac{xdz}{t} = -d(\frac{xdz}{ds}) : (1 + \frac{xxdz^2}{ds^2})$ seu quia $x : t = dx : ds$, $\frac{dxdz}{ds} = -d(\frac{xdz}{ds}) : (1 + \frac{xxdz^2}{ds^2})$.

Pro integranda hac æquatione, ponatur $xdz : ds = v$, & facta

facta substitutione habebitur $vdx : x = - dv : (1 + vv)$, seu $- dx : x = dv : (v + v^3) = (dv + 3vvdv) : (v + v^3) - 3vdv : (1 + vv)$; sumtisque integralibus per Logarithmos $l(a : x) = l(v + v^3) - \frac{3}{2} l(1 + vv) = lv - \frac{1}{2} l(1 + vv)$, unde $a : x = v : \sqrt{(1 + vv)}$, & $a : \sqrt{(xx - aa)} = v =$ [substituto ejus valore] $xdz : ds$; tandemque $dz = ads : x\sqrt{(xx - aa)}$.

IDEM PROBLEMA.

Ducere lineam brevissimam in superficie curva quavis data.
Per methodum de maximis & minimis.

SOLUT. Concipiantur in plano horizontali A E C, ex singulis curvæ quæsitæ punctis a, b, c, demitti perpendiculares aA, bB, cC in puncta A, B, C. &c. quæ forment curvam projectionis, cujus duo elementa contigua quævis repræsententur per A B, B C. Per A & B ductæ sint A E, B D tanquam elementa abscissarum, & E B, D C prioribus perpendiculares tanquam elementa applicatarum curvæ projectionis. Porro punctum B in elemento E B prolongato fluere intelligatur in locum proximum Ϭ, cui respondeat in superficie curva punctum β; secetur autem ipsa superficies per planum verticale transiens per rectam E B F, sectio illa formabit curvam, quæ, ob datam superficiem, & ipsa curva dabitur. Sit itaque subtangens puncto B vel E [quod perinde est quia B E est elementum infinite parvum, subtangens vero finita] respondens $= T$: Et dicantur A E $= f$, B D $= g$, E B $= m$, D C $= n$, elementum verticalis Bb, hoc est, Bb — A$a = c$, elementum verticalis Cc, hoc est Cc — B$b = e$; Erit elementum curvæ quæsitæ $ab = \sqrt{(ff + mm + cc)}$, & $bc = \sqrt{(gg + nn + ee)}$. Debet itaque $\sqrt{(ff + mm + cc)} + \sqrt{(gg + nn + ee)}$ esse minimum: quare differentiando [positis A E, & B D seu f & g constantibus] habetur $\frac{mdm + cdc}{\sqrt{(ff + mm + cc)}} + \frac{ndn + ede}{\sqrt{(gg + nn + ee)}} = 0$. Unde quia $m + n$, ut & $c + e$ sunt constantes, proinde $dn = - dm$ & $de =$ TAB. LXXX. N°. CLXVI. *Fig.* 13.

—

$-dc$, erit $\frac{m\,dm+c\,dc}{\sqrt{(ff+mm+cc)}}=\frac{n\,dm+e\,dc}{\sqrt{(gg+nn+ee)}}$. Ut vero *dm* & *dc* eliminari possint, quærenda est eorum ratio, quod sic fit: Dicatur B$b=z$, liquet esse $T: z=$ B$\mathfrak{C}$ seu dm: $\mathfrak{C}\beta-$ Bb seu dc; adeoque $dc=z\,dm:T$; quod substituendo in æquatione inventa, eamque per *dm* dividendo, & multiplicando per *T*, prodibit $\frac{mT+cz}{\sqrt{(ff+mm+cc)}}=\frac{nT+ez}{\sqrt{(gg+nn+ee)}}$, ubi nondum reperitur uniformis progressus ab elementis A E, & E B ad elementa B D, D C, quia utrique æquationis membro communia sunt *T* & *z*; quocirca eam dispono hunc in modum $T\times\left(\frac{n}{\sqrt{(gg+nn+ee)}}-\frac{m}{\sqrt{(ff+mm+cc)}}\right)=z\times\left(\frac{-e}{\sqrt{(gg+nn+ee)}}+\frac{c}{\sqrt{(ff+mm+cc)}}\right)$. Hic in factoribus infinitesimalibus manifesta observatur uniformitas; uterque enim denotat differentiam fractionum uniformium ex similibus elementis compositarum scribendo itaque pro *n*, *g*, *e*, has, quas repræsentant, *dy*, *dx*, *dz*, habebimus $T\times d\left(\frac{dy}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}\right)=z\times-d\left(\frac{dz}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}\right)$, in qua æquatione nihil adhuc constans suponitur, ideoque liberum est aliquod elementum ad lubitum assumere tanquam invariabile. Assumamus ergo quod in Scripto *Klingenstierniano* assumsi constans $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, seu *ds*, ut æquatio exprimatur hoc modo $T\times d\left(\frac{dy}{\sqrt{(ds^2+dz^2)}}\right)=z\times-d\left(\frac{dz}{\sqrt{(ds^2+dz^2)}}\right)$ quæ fractionibus actu differentiatis, in hanc abit $\frac{dz\,ddz}{ds^2+dz^2}=\frac{T\,ddy+z\,ddz}{T\,dy+z\,dz}$, æquivalentem ei quam dedi in Additionibus ad prædictum scriptum, ut calculare volenti patebit. Quod si vero pro constanti assumatur ipsum A B, seu elementum curvæ quæsitæ, hoc est, $\sqrt{(ds^2+dz^2)}$, æquatio emergit simplicissima, nempe hæc: $T\,ddy=-z\,ddz$. Sed quæ nihilominus ad differentias primas generaliter reduci nequit.

A N I-

N°. CLXVII.

ANIMADVERSIONES
in. *Cl.* Georgii CHEYNÆI
Fluxionum Methodum inversam,
Editam *Londini* 1703.

Pag. 2. PRima [methodus regrediendi ad Fluentes, ubi Fluxiones vinculo adficiuntur] *coincidit cum ea qua* NEWTONUS *utitur.*

Hæc methodus etiam a nobis aliisque frequenter in usum vocatur, & cuivis in hisce leviter versato obvia est, neque adeo NEWTONO peculiaris censeri debet.

Ibid. *Sit, v. gr. Fluxio data* $dz^{\theta} \times \dot{z}(e+fz^{\eta})^{\lambda}$; *pone* $y = (e+fz^{\eta})^{\lambda}$ *&c.* Conferatur cum pag. 12.

Cum palam sit Fluentem hujus Fluxionis $x^{m}dx \times (a+bx)^{n}$ semper terminis numero finitis exprimi posse, modo *m* sit numero integro & positivo, vel nihilo æqualis; Auctoris exemplum facile ad nostram formulam reducitur, ponendo $z^{\eta} = x$, habebitur enim $Dz^{\theta}dz \times (e+fz^{\eta})^{\lambda} = \frac{D}{\eta}x^{(\theta-\eta+1):\eta}dx \times (e+fx)^{\lambda}$; unde statim patet Fluentem quæsitam fore terminabilem, si $(\theta-\eta+1):\eta$ vel, addita unitate, si $(\theta+1):\eta$ est numero integro & affirmativo æqualis. Alio modo quæsita Fluens fiet terminabilis, si quantitas sub vinculo dividatur per z^{η}, & multiplicetur iterum quæ extra vinculum per $z^{\eta\lambda}$; sic enim erit $Dz^{\theta}dz \times (e+fz^{\eta})^{\lambda} = Dz^{\theta+\eta\lambda}dz \times (ez^{-\eta}+f)^{\lambda}$, quæ posterior, tractata ut ante factum, ad nostram formulam reducitur, ponendo nunc $z^{-\eta} = x$; nam sic prodibit $Dz^{\theta+\eta\lambda}dz \times (ez^{-\eta}+f)^{\lambda} = -\frac{D}{\eta}x^{(-\theta-1-\lambda\eta-\eta):\eta}dx \times (ex+f)^{\lambda}$;

ergo iterum si $(\theta + 1 + \lambda\eta + \eta) : -\eta$ vel, addita unitate, si $(\theta + 1 + \lambda\eta) : -\eta$ est numero integro & positivo æqualis; erit Fluens quæsita terminabilis. Atque hæ duæ conditiones a nobis facile negotio erutæ, $(\theta + 1) : \eta$ & $(\theta + 1 + \lambda\eta) : -\eta$, quibus Fluens quæsita terminis numero finitis exprimitur, si nimirum numeri illi, vel alteruter, sunt integri & affirmativi, sunt ipsissimæ illæ ab Auctore post longas ratiocinationes & operationes inventæ. Vid. pag. 12. Quod si vero neuter ex numeris istis sit numerus integer & affirmativus, tunc quantitas $(e + fx)^{\lambda}$ vel $(ex + f)^{\lambda}$ in Seriem solvenda est, & postea facile obtinebitur Fluens per Seriem infinitam.

Pag. 5. *Ad hoc exemplum procedendum in trinomialibus ..... Sit iterum Fluxio data* $dz^{\theta}\dot{z} \times (e + fz^{\eta} + gz^{2\eta})^{\lambda}$; *ponatur* $y = (e + fz^{\eta} + gz^{2\eta})^{\lambda}$.

Fluxiones trinomiales facile reducuntur ad binomiales, ponendo primo $z^{\eta} = x$, id quod facit $Dz^{\theta} dz \times (e + fz^{\eta} + gz^{2\eta})^{\lambda} = \frac{D}{\eta} x^{(\theta + 1 - \eta) : \eta} dx \times (e + fx + gxx)^{\lambda}$; deinde tollendo secundum terminum quantitatis sub vinculo, nempe ponendo $x = y - f : 2g$; quo facto erit $\frac{D}{\eta} x^{(\theta + 1 - \eta) : \eta} dx \times (e + fx + gxx)^{\lambda} = \frac{D}{\eta} (y - f : 2g)^{(\theta + 1 - \eta) : \eta} dy \times (-ff : 4g + e + gyy)^{\lambda}$; nunc ergo si $(\theta + 1) : \eta$ est numerus integer & positivus, poterit Fluxio distribui in tot Fluxiones binomiales quot sunt unitates in $(\theta + 1 - \eta) : \eta$; quod si vero numerus ille non sit integer vel non positivus, quantitates, quæ extra vinculum, & quæ intra illud, in Series conjiciendæ sunt, ex quibus duabus Seriebus inter se multiplicatis Fluentes terminorum elicitæ, dabunt Seriem novam pro Fluente quæsita.

Pag. 6. *Secunda methodus, quæ in hoc consistit, ut conjiciatur in Seriem pars Fluxionis datæ, inque eam ducatur pars vinculo exclusa; indeque... ad Fluentes fiat retrogressus* &c.

Hæc methodus etiam mihi dudum fuit familiaris, eamque olim com-

communicavi cum *Marchione* HOSPITALIO, in *Lectionibus* meis in usum ejus conscriptis super Calculo differentialium & integralium.*

Pag. 8. *Prodibit quotus, qui....... dabit Fluentem quæsitam, una cum abrumpendi conditionibus.*

Has abrumpendi conditiones in hac terribili Serie non video; quæcunque Series abrumpitur, oportet ut, termino aliquo in ea existente nullo, sequentes omnes pariter in nihilum recidant; hoc autem idem in hac Serie accidere nullum apparet indicium.

Pag. 10. *Potuisse* [in æquatione assumpta cum coefficientibus indeterminatis, cujus Fluxio cum proposita Fluxione comparatur] *exponentes terminorum extra vinculum assumi diversos ab hic assumptis, modo semper exponens primi termini non fuisset assumptus minor quam* $\theta - \eta + 1$.

Fallitur hic Cl. Auctor: potest enim exponens primi termini quantumvis minor assumi, quam $\theta - \eta + 1$, modo interim exponens vinculi debite augeatur; id quod Auctor non animadvertisse videtur. Ita si, ex. gr. pro exponente primi termini assumatur $\theta - 2\eta + 1$, & pro exponente vinculi $\lambda + 2$, resultabunt utique [contra quod Auctor putat] termini cum primo termino Fluxionis datæ comparandi. Ut rei veritas pateat; esto ergo assumta æquatio hæc, $Adz^{\theta - 2\eta + 1} + Bdz^{\theta - 3\eta + 1} + Cdz^{\theta - 4\eta + 1}$ &c. $\times (e + fz^{\eta})^{\lambda + 2} =$ Fluenti quæsitæ. Hujus assumtæ æquationis capiatur Fluxio, & ita postea exprimatur, ut exponens vinculi sit λ, quod fit multiplicando Fluxionem ipsius $Adz^{\theta - 2\eta + 1} + Bdz^{\theta - 3\eta + 1} + Cdz^{\theta - 4\eta + 1}$ &c. per quadratum ipsius $e + fz^{\eta}$, id est per $ffz^{2\eta} + 2efz^{\eta} + ee$, ipsum vero $Adz^{\theta - 2\eta + 1} + Bdz^{\theta - 3\eta + 1} +$ &c. per $fz^{\eta} + e$; Erit Fluxione æquata cum Fluxione data, eaque reducta

$$\left.\begin{matrix}(\theta - 2\eta + 1) \times Adff \\ (\lambda + 2) \times \eta \times Adff\end{matrix}\right\} z^{\theta} \left\{\begin{matrix}+(\theta - 3\eta + 1) \times Bdff \\ +(\theta - 2\eta + 1) \times 2Adef \\ +(\lambda + 2) \times \eta \times Bdff \\ +(\lambda + 2) \times \eta \times Adef\end{matrix}\right\} z^{\theta - \eta} \left\{\begin{matrix}+(\theta - 4\eta + 1) \times Cdff \\ +(\theta - 3\eta + 1) \times 2Bdef \\ +(\theta - 2\eta + 1) \times Adee \\ +(\lambda + 2) \times \eta \times Cdff \\ +(\lambda + 2) \times \eta \times Bdef\end{matrix}\right\} z^{\theta - 2\eta}, \text{ \&c.} =$$

* N°. CXLIX Lect. XLIX. pag. 526. *Tom. III.*

$= dz^{\theta}$; comparatis terminis homologis erit $A = 1 : (\theta + \lambda\eta + 1) ff.$ $B = (2\theta + \lambda\eta - 2\eta + 2) \times A e : (-\theta - \lambda\eta + \eta - 1) f$, $C =$ &c.

Pag. 14. *Te minime latet* $\phi(x+1) = \frac{\dot{x}}{x+1}$. *Est enim* $l(x+1) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 +$ *&c. adeoque* $\phi\, l(x+1) = \dot{x} - x\dot{x} + x^2\dot{x}$ *&c.* $= \dot{x} \times (1 + x - x^2 -$ *&c.*$) = \dot{x} \times \frac{1}{x+1} = \frac{\dot{x}}{x+1}$.

Hoc non opus habet tanta demonstratione per Series, immediate enim fluit ex natura Logarithmicæ, ut ego jam olim ostendi. Vid. *Act. Erud.* 1697, pag. 127 in fine *.

Pag. 15. *Sit Fluxio universalis data* $r\, x^m l^n x\, \dot{x}$

Hujus Fluxionis Fluentem, jam ante plures annos per varias methodos inveni, quas tum temporis cum Ampl. LEIBNITIO, aliisque, communicavi. Cæterum pleraque quæ in hac pagina & sequentibus habentur de exponentialibus, videntur ex meis promanasse quæ in *Act. Lips.* 1697, m. Martii de hac materia publicavi †. Exempla enim mea fere omnia hic ab Auctore nostro repetuntur, ut & ipsa hæc Series $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} -$ &c. pro quadratura particularis alicujus spatii curvæ hujus $x^x = y$.

Pag. 25 & 26. *Si pars transcendentalis Fluxionis data fractio fuerit, v. g.* $\frac{p\dot{z}}{qz}$ [*ubi* p *&* q *significant quantitates ex* z *& cognitis quomodocunque, & sine vinculis aut radicalitatibus, compositas;*] *in qua Fluxio indeterminatæ* z *in omnes terminos numeratoris ducitur; res semper ad Logarithmos & exponentiales redit: semper enim est* $F : \frac{p\dot{z}}{qz} = \frac{p}{q}\, lz = lz^{\frac{p}{q}}$.

Perfunctorie hæc nimis tractantur; debuisset Cl. Auctor ostendere, quomodo fractiones rationales Fluxionum ad Logarithmos & exponentiales reducuntur; neque sufficit dicere, quod

* N°. XXXVI. pag. 181, 182. *Tom. I.* † N°. XXXVI. pag 179. *Tom. I.*

quod F: $\frac{\dot{p}z}{qz} = \frac{pz}{qz}lz$; si enim per *p* & *q* utrobique easdem quantitates intelligat, assertum non est verum: Si vero *p* & *q* in Fluente aliæ sint intelligendæ quam *p* & *q* in Fluxione, dicendum ergo fuisset, quomodo illæ ex hisce datis inveniantur: deinde falsum quoque est quod hujusmodi Fluxiones semper ad Logarithmos & exponentiales reducantur; interdum enim ad arcus Circuli redeunt, qui utique ad Logarithmos [reales] reduci non possunt, quinimo interdum habent Fluentes finitas determinabiles absolute. Sed hanc materiam Ampl. LEIBNITIUS & ego jam occupavimus, & methodos nostras dedimus in *Actis Lips.* 1702, m. Maii, & 1703, m. Januar.*

Pag. 34. *Ut vero eorum usum in exponentialibus secundi gradus..... ostendam, sit æquatio* $a^y = x^{x^x}$.

De hisce ego primus egi, quantum scio, in citat. Act. 1697, mens. Mart. †

Pag. ead. *Erit* $y\,l\,a = x^x\,l\,x$. *Item* $l(x^x l x) = l(y l a)$. *Sed* $l(x^x l x) = x l x + l l x$. *Item* $l(y l a) = l y + l : l a$. *Quare* $l y = \frac{x l x + l : l a}{l : l a}$.

Errat hic Cl. Auctor; nam cum sit $xlx + l : lx = ly + l : la$, erit utique $ly = xlx + l : lx - l : la$, vel, si mavis, $ly = xlx + l : \frac{lx}{la}$; non vero $ly = \frac{xlx + l : lx}{l : la}$. Omnia igitur quæ sequuntur, ad hoc Problema $a^y = x^{x^x}$ pertinentia, sunt etiam erronea, adeoque corrigi debent.

Pag. 37. *Verba ipsius* NEWTONI *ut pote commodissima ex loco citato prius huc transferam.*

Quod revera verba NEWTONI transtulerit tantum, ipsas vero operationes non inspexerit attente, ex eo patet, quod errores, sive typographicos, sive calculi, apud WALLISIUM

* N°. LXX. pag. 393. *Tom. I.* † N°. XXXVI. pag. 179. *Tom. I.*

commiſſos ipſe nunc repetierit, neque eos correxerit, quos ſic corriges: pag. 40, l. 9; pag. 41, l. 5; & pag. 42, l. 1; pro az^{λ} ſcrib. az^{ν}. pag. 42, l. 6; pro $+ zr$ ſcrib. $- zr$, & pro $\frac{3zzr}{8d}$ ſcrib. $\frac{3zzr}{4d}$.

Pag. 46. *Altera* NEWTONI *Methodus*..... *coincidit cum ea publicata a Cl.* LEIBNITIO, Actis Lipſiæ, Aprilis 1693, *hoc eſt, ad minimum* 17 *annis poſtquam erat a* NEWTONO *reperta.*

Non qui primus reperit, ſed qui primus publicavit, laudem a publico primus meretur: interim quaſi vero & ipſe Cl. LEIBNITIUS non diu antea repertam habere potuiſſet hanc Methodum, antequam eam publicaſſet. Nulla eſt igitur conſequentia: *Methodus hac* 17 *annis reperta eſt a* NEWTONO, *antequam a* LEIBNITIO *publicata*; *Ergo* NEWTONUS *prior eſt inventor* LEIBNITIO. Quid ſi enim LEIBNITIUS eam inveniſſet 18 annis priuſquam publicaſſet? eſſet utique primus Inventor & primus Publicator.

Pag. 50. *Methodus a Cl. Viro* Joh. BERNOULLIO Actis Lipſiæ 1694 * *prodita, qua Fluxionis data Fluens per Seriem infinitam, generalem quidem, terminis tamen plerumque maxime implicitis, obtinetur.*

Non video terminos per methodum meam multo magis implicitos obtineri quam per alias Methodos ab Auctore recenſitas, quarum tamen nulla tam generalis eſt quam mea; imo in nonnullis caſibus ſimpliciores reddit terminos. Sed quæcunque ſit methodi meæ implicatio, miror quod Auctor noſter non eadem uſus ſit facilitate in excuſanda hac implicatione meæ Methodi per ipſius univerſalitatem, qua uſus eſt circa aliquam Methodum ſui popularis Cl. CRAIGII, quam, cum plerumque in *calculi molem immanem* deducat, laudat tamen, quod *laborem penſet methodi ipſius univerſalitas*; licet in univerſalitate meæ multum cedat. Vid. pag. 123. Sic quod in me extraneo

* N°. XXI. pag. 125. *Tom. I.*

neo displicet & extenuatur, idem illud in conterraneo placet & extollitur.

Ibid. *Seriem ipsam generalem sic investigabis; sit* $\dot{z}y$ *expressio generalis pro Fluxionibus primis quibuscunque &c.*

Alias præterea habeo vias ad illam investigandam, quæ etiam valent pro Fluxionibus superioribus: de his, ante 9 & 10 annos, communicavi cum Ampl. LEIBNITIO.

Pag. 52. *Fietque* $y = \frac{ax}{r} + \frac{axx}{rr} + \frac{ax^3}{r^3} + \frac{ax^4}{r^4}$ &c.

Hæc Series eodem modo expressa habetur in *Actis Lips.* 1694, pag. 438. Sed vitiata est per typothetam, corrigi itaque debet, ut eam jam correxi in *Actis* anni sequentis pag. 96 in *Erratis*; nempe sic $y = \frac{ax}{r} + \frac{axx}{2rr} + \frac{ax^3}{3r^3} + \frac{ax^4}{4x^4}$ &c. Auctor itaque repetendo eundem errorem, ostendit se exemplum ex *Actis* nude exscripsisse, neque calculum ipsum perfecisse.

Pag. ead. *Sit jam* $\dot{z}yv$ *expressio generalis pro transcendentibus vel exponentialibus primi gradus (ubi* y *est quantitas algebraïca ex indeterminatis & constantibus quomodocunque composita,* v *vero quantitas geometrice irrationalis quacunque).*

Non opus est pro hoc casu novum inire calculum ad novam Seriem fabricandam, jam enim continetur in mea quam dedi pro $\int y\,dz$. Nam adeo generalis est, ut per y non tantum quantitas algebraïca ex indeterminatis & constantibus quomodocunque composita, sed etiam talis intelligi possit, quæ partim ex constantibus & indeterminatis algebraïcis, partim ex geometrice irrationalibus utcunque sit composita. Sic itaque pro applicatione universalis expressionis ydz ad hunc casum $\int yv\,dz$; aliud nihil faciendum est, quam ut in mea Serie universali $\int ydz = zy - \frac{z^2 dy}{1.2.dz} + \frac{z^3 ddy}{1.2.3.dz^2} - \frac{z^4 d^3y}{1.2.3.4.dz^3} +$ &c. loco y, dy, d^2y, d^3y, &c. ponantur eorum valores, qui hic sunt yv, $vdy + ydv$, $vddy + 2dydv + yddv$, $vd^3y + 3dvddy + 3ddvdy + yd^3v$, &c. ex quorum substitutione provenit statim Series quam Auctor habet; & hoc per se adeo manifestum est, ut

mirer

mirer eum, præter omnem neceſſitatem, voluiſſe aliunde quærere quod ante oculos erat jam pene factum.

Pag. 56. *Iiſdem methodis quantitatem quamcunque ad poteſtatem indeterminatam elevabis.*

Ego aliam methodum magis naturalem habeo ad poteſtatem indeterminatam elevandi quantitatem quamcunque & hæc methodus non eget neque Logarithmis neque infiniteſimalibus; ſed illam per Algebram ordinariam ex natura numerorum figuratorum erui, & jam ante 12 annos communicavi cum *Marchione* HOSPITALIO *, antequam adhuc ſcirem tale quid a NEWTONO aliove præſtitum eſſe.

P. 59. *Omnia hæc hactenus tradita ſunt, niſi paucula exempla Methodorum* Newtonianarum. . . . . . *Omnia in hiſce, vel per hanc [aut non abſimiles methodos] ab aliis [intra hoſce, viginti quatuor annos proxime elapſos] edita, eſſe ſolum eorundem ab Ipſo diu antea cum amicis vel publico communicatorum repetitiones, aut non difficilia Corollaria.*

Hæc in laudem Ampliſſimi NEWTONI, Magiſtri & popularis ſui, merito dixit; modo id non ſit in extenuationem aliorum & Exterorum imprimis: vereor ne plus NEWTONO tribuat, quam ipſe ſibi arrogaturus ſit NEWTONUS. Alias miſeri nos omnes ſumus, quibus nihil nec inventi, nec poſthac inveniendi, reliquit; aut qui quicquid fecimus, aliud nihil fecimus, quam nectere repetitiones quaſdam, aut ad ſummum non difficilia Corrollaria quædam eorum quæ diu antea NEWTONUS cum amicis ſuis communicaverat. Certe ſi vel maxime hoc feciſſemus, an ideo minus quam NEWTONUS horum inventorum Auctores dicendi eſſemus; quippe qui cum non fuerimus ex numero illorum amicorum, quibuſcum communicavit; nec ipſe niſi ante paucos annos ſua reperta publicaverit; neceſſe habuimus illa noſtro marte & noſtra induſtria eruere; adeo ut hac in parte nihil NEWTONO debeamus: quamvis ceterum de publico eum præclare meritum lubentes confiteamur.

Pag. 63.

* N°. CXLIX, Lect. XLVIII, pag. 522, *Tom. III.*

Pag. 63. *Ille enim* [CRAIGIUS] *primus omnium (quod sciam) publico harum* [Transcendentium quadraturarum] *exempla impertivit , in* Phil. Transf. Dec. 1697.

Harum Exemplum etiam ego, eodem anno 1697, eodemque mense Decembri in *Ephemeridibus Gallicis* †, & ex illis postea excerptum in *Actis Lipsiens.* 1698, pag. 54 l. 4, publico impertivi, postquam, diu ante, hujusmodi curvæ transcendentales a me aliisque fuissent consideratæ: adeo ut Cl. CRAIGIUS non primus omnium earum exempla publicaverit.

Pag. 65. *Fluentes... a Fluxionibus per sectiones præcedentes data, interdum determinata quantitate a vera deficiunt, interdum eandem determinata quantitate excedunt.... Rem ipsam sic explorabis; pone ipsam Fluentem per methodos supra traditas repertam* $= 0$, *& habebis signum ; iterumque pone indeterminatam quantitatem qua Fluens illa exprimitur* $= 0$, *& obtinebis ipsam quantitatem demendam vel addendam Fluenti reperta, prout signum innuerit.*

Omnino superfluum est ponere Fluentem $= 0$, neque signum ullo modo ab ista positione dependet: quid si enim ex ea ambo signa prodeant, utrum tunc eligendum erit? Sumamus Exemplum ipsum tertium Auctoris, ubi $-\frac{30abx^{3:2}+75bc}{28aa} \times (c - ax^{3:2})^{2:5} = A$ [prout nimirum ab Auctore scribitur; sed male; invenio enim $\frac{-30abx^{2:3}-75bc}{28aa}(c - ax^{2:3})^{2:5} = A$.] Posito itaque $A = 0$, verum quidem est, quod tunc diviso per $(c - ax^{3:2})^{2:5}$ proveniat $x = +(75c:30a)^{2:3}$; sed etiam non minori jure dividi potest per $(-30abx^{3:2}+75bc):28aa$ & tunc provenit $x = +(c:a)^{2:3}$; nam per substitutionem hujus valoris, æque ac illius, degenerat A in nihilum. Quod si nunc hæc duo signa diversa essent, ut revera sunt, si ponatur vera æquatio $\frac{-30abx^{2:3}-75bc}{28aa}(c - ax^{2:3})^{2:5} = A = 0$;

† N°. XL, pag. 209, Tom. I.

nam uno modo obtinebitur $x = -(75c : 30a)^{3:2}$, & altero $x = +(c : a)^{3:2}$. Utrum ergo nunc signum +, an − eligetur? Unde patet criterium Auctoris, ad explorandum quid addendum demendumve sit areæ, ut vera obtineatur, nihil omnino valere, utpote sæpissime sibi ipsi non constans; quod magis ex ipsa conclusione Auctoris patescit, quando colligit, *Quare vera quadratura, erit* $A = \frac{-30abx^{3:2} + 75bc}{28aa}(c - ax^{3:2})^{2:5} + \frac{75bc^{7:5}}{28aa}$; posito enim $x = 0$ [in quo casu area evanescere deberet,] provenit tamen $A = +\frac{75bc^{7:5}}{28aa} + \frac{75bc^{7:5}}{28aa}$, quod est manifeste absurdum. Verus autem modus explorandi quid Fluenti inventæ addendum demendumve sit, ad habendam veram aream, in hoc consistit, ut *ponatur indeterminata quantitas qua Fluens illa exprimitur* = 0, *& qua inde provenit quantitas adjiciatur sub signo contrario ad Fluentem repertam.* Secundum hanc Regulam, tertium exemplum Auctoris ita est corrigendum: $\frac{-30abx^{2:3} - 75bc}{28aa} \times (c - ax^{2:3})^{2:5} = A$; pone indeterminatam $x = 0$, fietque $A = -\frac{75bc^{7:5}}{28aa}$, quod dat quantitatem sub signo [contrario] + addendam Fluenti antea repertæ. Quare vera quadratura erit $A = \frac{-30abx^{2:3} - 75bc}{28aa} \times (c - ax^{2:3})^{2:5} + \frac{75bc^{7:5}}{28aa}$. Eodem modo vera quadratura exempli secundi, a variis erroribus Auctoris repurgata, hæc est: $A = \left(\frac{3x^2}{10d^2e^2} + \frac{9ccx}{35a^2e^4} + \frac{27c^4}{140d^2e^6}\right) \times (e^2x - c^3)^{4:3} - \frac{27c^8}{140d^2e^6}$.

Pag. 67, 68. *Sit Fluxio infinitesimalis* $z^r \dot{z} \times (e + fz^{\pm\eta} + gz^{\pm 2\eta} + hz^{\pm 3\eta}$ &c.$)^m$.... *Si jam velis ut indices termi-*

norum

norum extra vinculum in Fluente augendo procedant, existentibus terminorum sub vinculo in Fluxione data indicibus affirmativis, capiendus in æquatione assumenda primi termini extra vinculum Index $r+1$, *secundi* $r+1+\eta$, *&c. Sin existentibus &c.*

Hæc restrictio plane est superflua; potest enim in quocunque casu capi in æquatione assumenda primi termini extra vinculum index $r+1+$ vel $-$ aliquo multiplo ipsius η, qui sit etiam multiplus maximi indicis, sive affirmativi, sive negativi, indeterminatæ sub vinculo in Fluxione data; modo interim index ipsius vinculi debite augeatur vel minuatur. Sic in exemplo Cl. Auctoris pro Fluxione Trinomiali $Dz^r dz \times (e+fz^\eta +gz^{2\eta})^m$, possum pro indice primi termini extra vinculum in æquatione assumenda ponere verb. gr. $r-4\eta+1$, & ita æquatio assumenda erit $Az^{r-4\eta+1}+Bz^{r-5\eta+1}+Cz^{r-6\eta+1}$, &c. $\times (e+fz^\eta+gz^{2\eta})^{m+2}$: ita pariter in altero exemplo Auctoris $Dz^r dz \times (e+fz^{-\eta}+gz^{-2\eta})^m$; æquatio assumenda poterit v. g. esse hæc, $Az^{r+4\eta+1} + Bz^{r+5\eta+1} + Cz^{r+6\eta+1}$, &c. $\times (e+fz^{-\eta}+gz^{-2\eta})^{m+2}$. Confer. cum iis quæ supra ad pag. 10, annotavi. †

Pag. 71. *Si neutra dedisset, concludendum fuisset Fluxionem datam finitæ Fluentis non fuisse capacem.*

Magna quidem confidentia hic, ut etiam alibi asseritur, hanc Methodum semper exhibere Fluentes finitas, si Fluxiones earum sint capaces, sed ejus demonstrationem nusquam adhuc vidi. Auctor videtur ita velle ratiocinari; *Quæcunque Fluxio per hanc Methodum non obtinet Fluentem terminis numero finitis expressam, illa Fluxio talem Fluentem habere plane non potest.* Sed negatur hoc, usquedum ostensum fuerit hanc Methodum ad omnes Fluentes finitas possibiles sese extendere. Contrarium potius in exemplo potest ostendi. Sit enim Fluxio duplex binomialis $(8x^4-a^4)dx \times (a^2+x^2)^{1:2}$, cujus neutrum membrum neu-

† Supra, pag. 131.

tram habet conditionem, ut ſit $(\theta+1):\eta$, vel $(\theta+\eta\lambda+1):-\eta$ numerus integer & affirmativus, adeoque ſecundum Auctorem non haberet Fluentem finitam; interim tamen habet, ut aliunde ſcimus. Si vero quod extra vinculum eſt ſub vinculum involveretur, & deinde Canoni generali infinitinomiali §. III applicaretur; immanis adeo calculi moles requireretur, ut neſciam an Auctor per eum mihi facile daturus ſit Fluentem quæſitam, quam ego tamen per aliam viam commodiſſime & ſine magno labore dabo: vel etiamſi quod extra vinculum eſt non involvatur ſub illud, ſed ſtatim ad Canonem generalem applicetur; dubito tamen an Series alicubi abrumpatur, ita ut omnes ſequentes termini evaneſcant: nam contingere quidem poteſt ut aliquis terminus evadat nullus, ſed ſequentes nihilo ſecius aliquid efficiunt; unde Fluens non dabitur ſub terminis numero finitis. Sit v. g. Fluxio $dx(aa+4xx)(aa+xx)^{1:2}$, cujus Fluentem finitam eſſe certo ſcio; eſt enim $(aax+x^3)\times(aa+xx)^{1:2}$; ſed ſi ad Canonem generalem applicetur, evaneſcet quidem ſecundus terminus, verum tertius & quartus, quos tentavi, & haud dubie ſequentes, aliquid efficiunt; adeo ut nullæ hic habeantur conditiones abrumpendi: niſi aliquis velit dicere, ideo quoniam ſecundus terminus evaneſcat, in primo termino ſubſiſtendum eſſe, & omnes ſequentes negligendos; quemadmodum revera primus terminus ex Canone generali repertus $(aa+xx)^{3:2}x$ jam ipſam dat Fluentem $(aax+x^3)\times(aa+xx)^{1:2}$ aliunde mihi repertam. Sed ſi hoc neſcirem, quis mihi diceret, aut unde poſſem cognoſcere, omnes terminos poſt ſecundum in infinitum ſumtos ſe mutuo deſtruere, id eſt, ſummam affirmativorum æqualem eſſe ſummæ negativorum. Quid etiam dicemus de $xdx(aa+xx)^{1:2}$, cujus Fluens, ut facile patet, eſt $\frac{1}{3}(aa+xx)^{3:2}$; interim ſi applicetur ad Canonem generalem, quod duobus modis fieri poteſt, exprimendo Fluxionem datam, vel ſic $xdx.1.(aa+x^2)^{1:2}$, vel ſic $dx.$

$(0+1x^1).(aa+0x+x^2)^{1:2}$; priori modo invenitur $\int(xdx.(aa+xx)^{1:2}) = (aa+xx)^{3:2} \times (\frac{1}{2}.\frac{xx}{aa} - \frac{5}{2.4}.\frac{x^4}{a^4} + \frac{5.7}{2.4.6}.\frac{x^6}{a^6} - \frac{5.7.9}{2.4.6.8}.\frac{x^8}{a^8}$, &c.), & posteriori modo = iterum $(aa+xx)^{3:2} \times (\frac{1}{2}.\frac{xx}{aa} - \frac{5}{2.4}.\frac{x^4}{a^4}$ + &c.); ubi Fluens non tantum non exprimitur terminis numero finitis; sed etiam hoc inconveniens sequitur, quod cujuscunque magnitudinis sit x, tamen hæc Series $\frac{1}{2}.\frac{xx}{aa} - \frac{5}{2.4}.\frac{x^4}{a^4} + \frac{5.7}{2.4.6}.\frac{x^6}{a^6} - \frac{5.7.9}{2.4.6.8}.\frac{x^8}{a^8}$ + &c. semper sit $= \frac{1}{5}$, id est, indeterminatum sit = determinato; quod quomodo cum sana ratione conciliari possit, videat Auctor. Eadem difficultas obvenit circa $xdx(aa+xx)^{-1:2}$, cujus Fluentem scimus esse $(aa+xx)^{1:2}$ seu $\surd(aa+xx)$; interim per Canonem generalem sequeretur illam esse $= (aa+xx)^{1:2} \times (\frac{1}{2}.\frac{xx}{aa} - \frac{3}{2.4}.\frac{x^4}{a^4} + \frac{3.5}{2.4.6}.\frac{x^6}{a^6} - \frac{3.5.7}{2.4.6.8}.\frac{x^8}{a^8}$ + &c.) id est, iterum determinatum æquale indeterminato. Si denique Fluxiones supra allatæ ita efferantur, ut indices indeterminatarum evadant negativæ, aliæ novæ difficultates oboriuntur; Fluxio v.g. jam supra considerata $dx(aa+4xx)\times(aa+xx)^{1:2}$, si mutetur in hanc formam $x^3dx(aax^{-2}+4)\times(aax^{-2}+1)^{1:2}$; ejusdem utique valoris cum priore, & si applicetur ad Canonem generalem, habebitur pro Fluente $x^4 + 0aaxx + a^4:0$ &c. ubi tertius terminus est magnitudinis infinitæ, cum tamen ipsa tota Fluens finita tantum sit: contra si ultimum exemplum $xdx\times(aa+xx)^{-1:2}$ transformemus in hanc formam $dx.1.(aax^{-2}+1)^{-1:2}$ habebimus ex Canone generali, pro tota Serie, primum tantum terminum x, reliquis singulis in nihilum abeuntibus; unde Fluens foret tantum $=x$, cum tamen sit $=\surd(aa+xx)$. Alias difficultates, quas movere possem, silentio prætereo; inte-

rim exemplum ipſum, quod Auctor pag. 70 & 71 proponit, non rite procedit: dicit enim quod $\int(dx \,.\, x^{-5:2}(3a - bxx) \,.\, (a + bxx + cx^3)^{-1:2})$ Canoni generali applicata det $-2\sqrt{(a - bxx + cx^3)} : x^3$; ego vero aliam Fluentem inveni: certe, quam Auctor tradit, vera Fluens eſſe non poteſt: nam ſi ejus ſumatur Fluxio per methodum directam, provenit $\frac{3cx^3 - 4bxx + 6a}{x^4\sqrt{(a - bxx + cx^3)}}\,dx$, quæ utique diſcrepat a propoſita $\frac{3a - bxx}{xx\sqrt{(ax - bx^3 + cx^4)}}\,dx$; contra intentum Auctoris.

Pag. 73. *Ubi obſervandum quod, ſi* 1 *vel* $\frac{1}{2m - 2}$ *fuerit æqualis numero integro & affirmativo. . . . . Series . . . dabit longitudinem* [Parabolæ cujus æquatio $y = x^m$] *terminis numero finitis exprimendam.*

Hoc & plura alia circa Parabolas jam obſervavi & publicavi in *Act. Lipſ.* 1698, pag. 463 & ſeqq. * ubi oſtendi omnem Parabolam abſolute eſſe rectificabilem, aut per ſe, aut conjunctam cum alia; per ſe, ſi exponens Parabolæ ſit $= (1 + 2p) : 2p$ [ubi per p intelligo numerum integrum quemvis, ſcilicet poſitivum]; cum alia vero, generaliter in omni caſu.

Pag. 81. Caſ. VI. *Sit ratio Radii ad Circumferentiam ab ea deſcriptam* $\frac{a}{b}$; *Eritque* $\frac{b}{a} \times xy\dot{y} = \dot{C}$ [C ſolidum eſt, genitum rotatione plani curvilinei, cujus abſciſſa x, ordinata y] *Ubi Rotationis Axis eſt ſummitatis axis Curvæ tangens, & planum abſciſſæ adjacet.*

Præcipitanter hic agit Auctor, non enim $\frac{b}{a}\,xy\,dy$, ſed $\frac{b}{a}\,xydx = dC$; neque hoc tanquam vitium typographicum excuſari poteſt: nam exemplum pag. ſeq. pro Caſu ſexto inſerviens hunc errorem ſupponit, quando habetur $dC = \frac{mb}{a}\,x^{2m}dx$, &

$C =$

* N°. L. pag. 250. *Tom. I.*

$C = \frac{mb}{a} \times \frac{x^{2m+1}}{2m+1}$; id quod ita corrigi debet, $dC = \frac{b}{a} x^{m+1} dx$ & $C = \frac{b}{a} \times \frac{x^{m+2}}{m+2}$.

Pag. 103. *Sit denique* $S = \frac{2b}{3a} x^{3:2} \times (\frac{1}{4} x^{-1} + 1)^{3:2}$, *sitque axis rotationis abscissa; erit per Cas. I. Probl. III.* $\dot{S} = \frac{b}{a} x^{1:2} \dot{x} \sqrt{(\frac{1}{4} x^{-1} + 1)} = \frac{b}{a} y \sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)} = \frac{b}{a} y \dot{L}$; *factaque divisione per* $\dot{L} = \dot{x} \sqrt{(\frac{1}{4} x^{-1} + 1)}$ [*data enim* $\dot{S}$, *datur* $\dot{L}$, *est quippe* $\dot{L} = \frac{a\dot{S}}{by}$] *habebitur* $y = x^{1:2}$.

Purus paralogismus! miror Cl. Auctorem tam facile deceptum, dum supponit quod est in quæstione, quando dicit, factaque divisione per $dL = dx \sqrt{(\frac{1}{4} x^{-1} + 1)}$; unde enim scit quod $dL = dx \sqrt{(\frac{1}{4} x^{-1} + 1)}$? Huc nihil confert quod per parenthesin addit [*data enim* dS, *datur* dL, *est quippe* $dL = adS : by$], nam falsum est quod data dS detur dL, nisi simul & ipsa y detur; in nostro vero casu non datur y, sed quæritur. Sane hic casus non tam facile solvitur ut Auctor putat; si enim rite ad æquationem reducatur; habebitur $dx \sqrt{(x - y + \frac{1}{4})} = dy \sqrt{y}$, ubi indeterminatæ implicantur; adeoque a se invicem separandæ sunt, antequam solutionem aggredi liceat: est autem separationis negotium unum ex maxime arduis & indaginis abstrusissimæ: patet itaque Auctorem non arte, sed casu, in veram incidisse Solutionem; quia haud dubie curvam ipsam quærendam $y = x^{1:2}$ sibi prius proposuit, & ex ea per methodum directam quæsivit dS, unde facile pervenit ad ipsum S; ad hoc deinde tanquam datum accommodavit suum quæsitum, quod ex ipsa sua formatione jam præcognitum habebat; adeo ut mirum non sit per paralogismum ad veritatem pervenisse. Sed ut paralogismus magis pateat, sumamus aliud simile exemplum, & in-

interim idem ratiocinium Auctoris sequamur: sit igitur $S = \int \frac{3b}{2a} x^2 dx \sqrt{(\frac{4}{9} x^{-1} + 1)}$; sitque axis rotationis abscissa; erit per Casum I, Probl. III, $dS = \frac{3b}{2a} xx dx \sqrt{(\frac{4}{9} x^{-1} + 1)} = \frac{b}{a} y \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{b}{a} y dL$; factaque divisione per $dL = dx \sqrt{(\frac{4}{9} x^{-1} + 1)}$ [data enim dS, datur dL; est quippe $dL = adS : by$] habebitur $y = \frac{1}{2} x^2$. Esset ergo, secundum ratiocinium Auctoris, curva quæsita $y = \frac{1}{2} x^2$; interim tamen veram curvam quæsitam esse $y = x^{3:2}$, cuilibet periculum facienti patebit.

Pag. 111. *Data, exempli gratia, Chorda unius Arcus, quæratur Chorda alterius Arcus, qui sit ad priorem ut 1 ad n.*

Hoc jam præstiti in *Act. Lipſ.* 1701, pag. 170 & seqq. * per duas Series universales, concinniores quam quæ hic ab Auctore exhibetur, & ni fallor jam olim ab ipso NEWTONO exhibita fuit; & quidem illas meas Series inveni citra ullum Calculum infinitesimalem, ex ipsis scilicet visceribus & intima natura arcuum & angulorum.

Pag. 113. Prob. X. *Ex data Serie infinita quantitatibus algebraïcis exprimenda, valorem ipsius finitum [si modo talem habuerit] invenire.*

Omnia hæc Serierum exempla hic tradita, videntur ab Auctore præformata ex valoribus finitis assumtis; adeoque minime mirum est, si per reversionem iidem valores ex Seriebus eruuntur. Alias Methodi valde insufficientes sunt, innumeras enim Series facile proponam, quarum valores [licet finitos] per eas Methodos non determinabuntur: male igitur pro generalibus venditantur.

Pag. 121. *Curvam invenire, cujus in rectam extensione Curva data, alias finitis terminis non quadrabilis, quadrabitur.*

Hæc methodus, præterquam quod plerumque immanem requirat calculi molem, etiam in casibus facillimis, ut jam adversus

* N°. LXIX. pag. 186 seq. *Tom. I.* Videatur etiam Nus. LXXXIX. pag. 511. *Tom. I.* nec non Numerus CXXVII. pag. 526. *Tom. II.*

versus Cl. CRAIGIUM animadverti in *Actis Lips.* 1695, pag. 64 *, hoc etiam defectu laborat, quod non sit generalis, ut Auctor noster putat. Exempla vero duo quæ affert $y = \sqrt{(xx + aa)}$, & $y = \sqrt{(x^m + a^n)}$, per methodum nostram in loco citato insinuatam, & in constructione curvæ paracentricæ feliciter adhibitam, ut videre est in *Actis Lips.* 1694, pag. 396 & 397 †, sine ullo negotio solvuntur. Rem in posteriori exemplo, quod prius continet, ostendisse sufficiet. $ydx = dx\sqrt{(x^m + a^n)}$; quadratum ejus $x^m dx^2 + a^n dx^2$ dividatur in duo quadrata, quorum latera habeant Fluentes geometrice rationales; puta in $x^m dx^2$ & $a^n dx^2$, quorum latera sunt $x^{m:2} dx$ & $a^{n:2} dx$, eorumque Fluentes $\frac{2}{m+2} x^{(m+2):2}$, & $a^{n:2} x$, divisa utraque per $a^{n:2}$, habebuntur $2x^{(m+2):2} : (m+2) a^{n:2}$, & x, pro coordinatis curvæ quæsitæ, quæ multiplicata per $a^{n:2}$, producit aream propositam $\int dx \sqrt{(x^m + a^n)}$; quæ curva eadem est cum ea quam Auctor per longum calculum invenit. Quod autem hæc methodus qua Auctor, post acutissimum CRAIGIUM, utitur, non sit universalis, patet ex iis quæ insinuavi in *Actis Lips.* 1695, pag. 63 & 376 §; præterea hoc incommodi habet, quod plerumque Linea per eam quæranda non sola sit cujus extensione area data quadratur, sed recta quædam ipsi fere semper addenda vel demenda est. Sic pro quadratura Circuli, vel potius semisegmenti circularis $\int dy \sqrt{(2ay - yy)}$, invenit quidem Cl. CRAIGIUS arcum itidem circularem; non autem purum, sed cum recta quadam permixtum: verum per meam methodum, curva quadratrix semper pura & sola obtinetur. Sit, v. g. idem semisegmentum circulare $\int dy \sqrt{(2ay - yy)}$ quadrandum per extensionem solam solius alicujus curvæ algebraicæ: Pro hac fiat curva, cujus coordinatæ sint $(2a^3 - 3ayy + y^3) : 3aa$ &

* N°. XXIII. pag. 136. *Tom. I.*
† N°. XIX. pag. 121. *Tom. I.*
§ Nis. XXIII & XXVI. pag. 137 & 144, *Tom. I.*

& $(2ay - yy)\sqrt{(2ay - yy)}:3aa$; dico longitudinem hujus curvæ, ductam in radium, fore æqualem semisegmento circulari $\int dy\sqrt{(2ay - yy)}$. Notandum etiam me infinitis aliis modis idem posse præstare; habemus ergo infinitas veras Circuli quadraturas transcendentes, adeoque errat Cl. CRAIGIUS, quando illam uno tantum modo possibilem dicit in suo Tractatu *De figurarum curvilinearum quadraturis* pag. 51. Eodem modo pro quadratura Hyperbolæ $\int dx\sqrt{(x^2+aa)}$, præter Parabolam ejus quadratricem jam ab HEURAETIO detectam, invenio innumeras alias, inter quas hæc est, cujus coordinatæ sunt $(3aax - x^3):3aa$ & $(3aa - xx)\sqrt{(3aa - xx)}:3aa$, quæ extensa in rectam & multiplicata per a facit spatium = areæ datæ hyperbolicæ $\int dx\sqrt{(xx+aa)}$ †. Cæterum debuisset Cl. CHEYNÆUS hac occasione ostendere methodum transformandi datam curvam algebraïcam in aliam, vel alias algebraïcas diversæ naturæ, sed ejusdem longitudinis; quod Problema, perutile sane, generalissime solvi, aliisque adhuc solvendum proposui in *Diario Gallico*, 1702, mens. Februar. §

† Videatur de hoc argumento Nus. CXXXII, pag. 582, *Tom. II.*

§ N°. LXXII, pag 406. Vid. N°. LXXIV, pag. 408, & LXXVII . . . LXXXIII, pag. 437 . . 452. *Tom. I.*

N°. CLXVIII.

OBSERVATIONES

In Clar. MOIVRÆI *Animadversiones in D.* CHEYNÆI *Tractatum de Fluxionum Methodo inversa*,

Editas *Londini* 1704.

In Præfationem.

Pag. 1. S*I intento quasi digito errores commonstrarem simul & emendarem.*

Non tamen omnes commonstravit.

Pag. 4.

Pag. 4. *Nec in his quadrandis ad* Logarithmos, *vel ad* Logarithmorum Logarithmos, &c. *vel ad Serierum numerum infinitum... confugiendum esse ostendi.*

Imo commode & eleganter ad Logarithmos confugitur, nec tam bene ad Series.

Pag. 5. *Sed hoc idem Theorema* [*Joh.* BERNOULLI pro Fluxionis alicujus datæ Fluente invenienda] *latius producere conatus, id quidem infinities implicatius, ne minimum vero universalius reddidit.*

Verissime hoc mecum observavit Cl. MOIVRÆUS; idque jam objeci Cl. CHEYNÆO *, sed nihil respondit.

Pag. 10. *Aut erronea, aut nullius momenti asserere non dubito.*

Quæ de Centro Oscillationis habet CHEYNÆUS, ostendunt eum esse parum in concretis versatum, nam pleraque sunt falsa.

In Animadversiones.

Pag. 2. *Hanc inde conclusionem statim deducit, nempe Logarithmi Fluxionem, Fluxioni numeri per ipsum numerum divisa æquari.*

Hæc conclusio est ipsa mea Regula, quam Cl. CHEYNÆUS ipsissimis fere verbis exscripsit ex *Act. Lips.* 1697, pag. 129 † *Differentiale Logarithmi*, &c. quamque non recte infringere conatur Cel. MOIVRÆUS.

Pag. 3. *Nam pag.* 1. *dicit Fluentem ipsius* $x^m dx$ *esse* $x^{m+1}:(m+1) \pm a^{m+1}$, &c.

Hoc intelligendum est de Fluente in abstracto considerata, eam scil. data qualibet quantitate determinata augeri vel minui posse, prout postea in certa applicatione res exigit.

Pag. ead *Hoc supposito, dico* $x^{m+1}lx:(m+1)—x^{m+1}:(m+1)^2$ *non esse ipsius* $x^m dxlx$ *Fluentem absolutam, nam quamvis* $dx:x$ *sit Fluxio Logarithmi ipsius* x, *quando* x *est supra unitatem; tamen* $—dx:x$ *erit Fluxio Logarithmi ejusdem* x, *quando* x *est infra unitatem.*

Cc 2 Imo

* N°. præced. pag. 134. & 135. † N°. XXXVI, pag. 183. Tom. I.

Imo ego dico esse Fluentem absolutam in abstracto sumtam, sed augendam vel minuendam debite, si ad aream exprimendam applicetur, & semper $dx : x$ sumi potest pro Fluxione Logarithmi ipsius x, non obstante quod x possit esse infra unitatem: in calculo enim perficiendo non respicitur utrum x majus minusve sit unitate, quemadmodum etiam in Analysi ordinaria omnes quantitates signis affirmativis afficiuntur in abstracto, sed Problematis conditio postea hæc omnia limitat.

Pag. 4. *Area erit* $x^{m+1} lx : (m+1) - x^{m+1} : (m+1)^2$, *dum* x *est infra unitatem; quam primum autem* x *fit* $= 1$, *erit Area* $1 : (m+1)^2$, *non vero* $- 1 : (m+1)^2$, *ut sequitur ex ipsius calculo: quando autem* x *evadit major unitate, erit Area* $x^{m+1} lx : (m+1) - x^{m+1} : (m+1)^2 + 2 : (m+1)^2$.

Hæc non procedunt: si enim x est infra unitatem, patet lx fore concipiendum ut negativum, adeoque tunc MOIVRÆI expressionem non differre ab ea CHEYNÆI, nisi quod hujus negativa sit, illius affirmativa: sed hoc ideo fit, quia quandiu x est infra unitatem, applicata $x^m lx$ est negativa; quæ per consequens Aream negativam faciat, respectu ejus quæ oritur per applicatas affirmativas, existente scil. x supra unitatem.

Quæ sequuntur sunt mera logomachia: CHEYNÆUS enim Aream sumit, quæ oritur ex differentia affirmativæ & negativæ; & MOIVRÆUS earundem summam.

Pag. 5. *Igitur* $dq = \frac{1}{2} x\,dx$, *& proinde* $q = \frac{1}{4} xx$.

Hic Cl. MOIVRÆUS approbat, quod modo ante in CHEYNÆO improbabat; scil. quod pro Fluente absoluta ipsius dq ponat $\frac{1}{4} xx$, cum possit esse $\frac{1}{4} xx \pm aa$. Sed hæc sunt vitilitigia.

Pag. ead. *Ergo Fluens ipsius* $xv\,dx$ *est* $\frac{1}{2} xxv - \frac{1}{4} xx$ [posito scil. $dv = dx : x$]

Atqui eadem Fluens, per Theorema meum universale a CHEYNÆO pag. 50 citatum, invenitur $\frac{1}{2} xxv - \frac{1}{2} xx + \left(\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \&c.\right) xx$. Oportet igi-

tur

tur ut hæc Series $\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+\frac{1}{4.5.6}$ &c. fit $=\frac{1}{4}$: quod fatis elegans eft. Sic tamen poteft inveniri a priori.

$$\text{Subtr.}\left\{\begin{array}{l}1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\text{\&c.}\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\text{\&c.}\end{array}\right.$$

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{5.6}+\text{\&c.}=1$$

$$\text{Subtr.}\ \frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{5.6}+\frac{1}{6.7}+\text{\&c.}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{1.2.3}+\frac{2}{2.3.4}+\frac{2}{3.4.5}+\frac{2}{4.5.6}+\frac{2}{5.6.7}+\text{\&c}=\frac{1}{2}$$

$$\text{Ergo}\ \frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+\frac{1}{4.5.6}+\frac{1}{5.6.7}+\text{\&c.}=\frac{1}{4}\quad \textit{Q. E. I.}$$

Haud abfimili modo invenitur $\frac{1}{1.2.3.4}+\frac{1}{2.3.4.5}+\frac{1}{3.4.5.6}$ &c. $=\frac{1}{18}$, & ita porro.

Pag. 7. Ex figura quis concluderet MOIVRÆUM fuppo-nere applicatam $x^m v$ fieri infinitam, quando $x=0$. Sed hoc non verum eft, nifi quando $m=0$, quo cafu curva in ipfam Logarithmicam degenerat, & quando m minor eft nihilo. Alias enim, quamdiu m eft aliquid, curva habet eam figuram quæ exhibetur *Fig.* 1. aut 2, & quidem *Fig.* 1, fi $m>1$, & *Fig.* 2, fi $m=$ vel <1. TAB. LXXX. N°. CLXVIII.

Pag. 8. *Sed cum Area NBC incipiat a puncto N, quantitas* $x^{m+1}v:(m+1)-x^{m+1}:(m+1)^2$, *nihil effe debet, cum* x *eft* $=1$, &c.

Sed cur Area non æque ab A, quam ab N incipere poteft; fiquidem ut modo oftendi, curva habet hanc figuram. Itaque quantitas $x^{m+1}v:(m+1)-x^{m+1}:(m+1)^2$ nihil effe debet, cum x eft $=0$. Sed pofita $x=0$, tota quantitas fu-pra dicta evanefcit, feu fit $0-0$. Sciendum enim quantita-tem $x^{m+1}v:(m+1)$ evadere 0, non obftante quod v fiat

$= -\infty$, quod ſic probo. Eſt $x^{m+1} v = x^{m+1} lx$, adeoque $x^{m+1} v = l x^{x^{m+1}}$ = [exiſtente $x = 0$] $l 0^{0^{m+1}} = l 0^{0} = l 1 = 0$, ſi ſcil. $m + 1$ = numero poſitivo; alias, ſi $m + 1$ = numero negativo, erit $l 0^{0^{m+1}} = l 0^{\infty} = l 0 = -\infty$, vel ſi

TAB. LXXX. N°. CLXVIII. $m + 1 = 0$, erit $l 0^{0^{m+1}} = l 0^{0^{0}} = l 0^{1} = l 0 = -\infty$. Notandum porro, ſi m = numero negativo curvam habere figuram ſimilem ei, quæ exhibetur *Fig.* 3.

Pag. ead. *Si jam velis ut Area ab aſymptoto incipiant, Area* AbcR *eſt* $x^{m+1} : (m+1)^2 + x^{m+1} v : (m+1)$.

Hic iterum ſupponit AR eſſe ſemper aſymptoton curvæ CN*c*, contra ea quæ modo obſervavi: & ſi AR eſt aſymptotos, & quidem exiſtente m = vel < -1, falſum tunc eſt aream A*bc*R eſſe $x^{m+1} : (m+1)^2 + x^{m+1} v : (m+1)$, poſito enim $x = 0$, evaderet Area infinita: quod eſt abſurdum.

Pag. 10. *At Regula hæc*, &c. [Pone Fluentem.... repertam = 0, & habebis ſignum. Iterumque pone indeterminatam quantitatem qua Fluens illa exprimitur = 0, &c. obtinebis ipſam quantitatem demendam vel addendam Fluenti repertæ, prout ſignum innuerit] *locum hic habere non poteſt.*

Sed Cl. MOIVRÆUS non animadvertit Regulam illam eſſe paralogiſticam. *

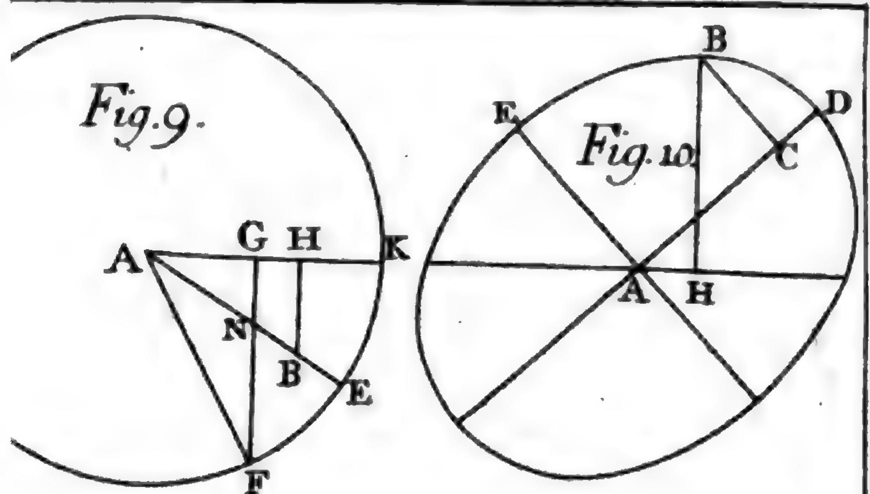
Pag. ead. *Scribendo enim* o *pro* x *in terminis* $x^{m+1} v : (m+1) - x^{m+1} : (m+1)^2$, *Fluens tota deſtruetur.*

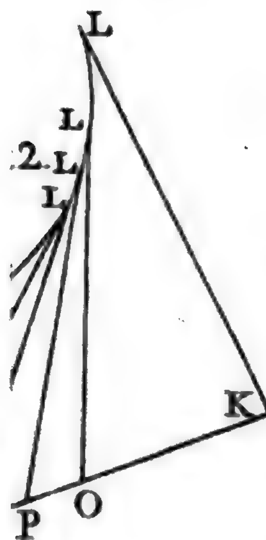
Sed ſi $m < 0$, Fluens non deſtrueretur, ſed potius infinita evaderet.

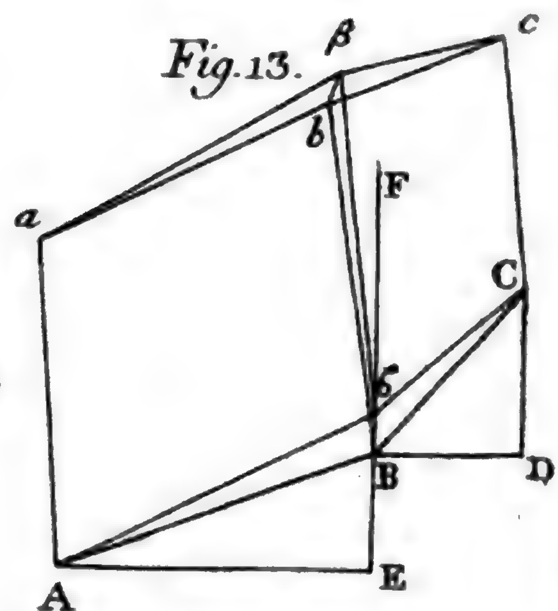
Pag. 11. *Probabitur.... quod Fluentes cetera per alternantes defectus & exceſſus in infinitum ſunt corrigendæ.*

Quid ſi autem iſti exceſſus & defectus omnes ſe mutuo deſtruant, erit utique Fluens inventa vera Area quæſita; quod autem ſe mutuo deſtruant patet ex eo quod, poſito $x = 0$, Fluens

* Vid. N°. præced. pag. 137. animadverſio in pag. 65.

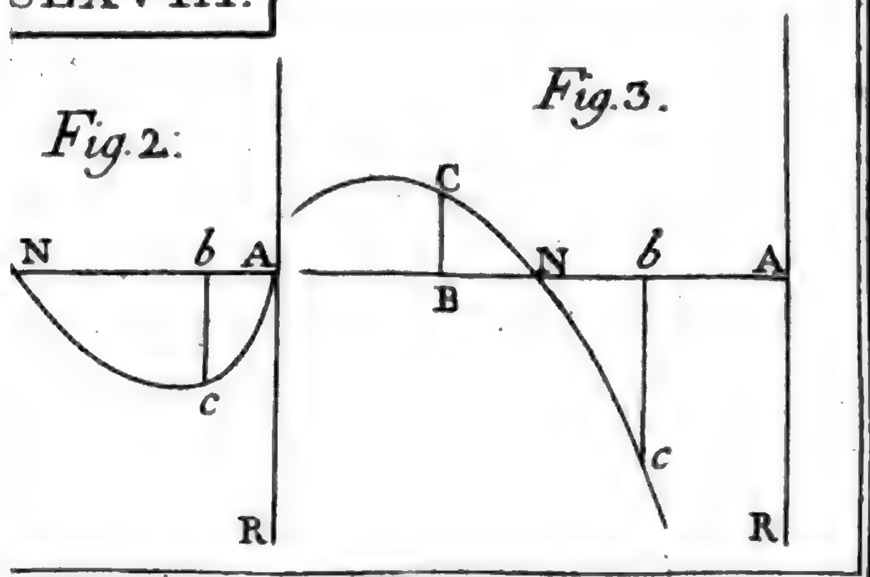






CLXVI.

CLXVIII.



Fluens inventa etiam evanescat: ergo hic frustra castigatur CHEYNÆUS.

Pag. 11. & 12. *Fluens hujus quantitatis* $x^x dx$ ... *si sit* $x = 1 + z$... *erit* $z + \frac{1}{2}zz + \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{8}z^4 + \frac{1}{15}z^4 + \frac{1}{72}z^6$ &c.

Nulla hujus Seriei uniformitas conspicitur: Neque hinc elicitur illa Series particularis elegantissima, pro casu $x = 1$, quam dedi in *Actis* 1697, pag. 131. †

Pag. 13. *Ubi quantitas* x^x *consideranda venit, Logarithmos vocat* [CHEYNÆUS] *in auxilium: ubi* x^{x^x} *Logarithmos Logarithmorum, &c. Nos vero ad hæc omnia nihil adhibemus præter numeros vulgares.*

Etiam Series ex Logarithmis conflata potest mutari in aliam ex vulgaribus numeris constantem, si pro Logarithmis substituatur valor eorum per Seriem infinitam expressus.

Pag. 17. *Fluentem quantitatis* $(dy : a) \times \sqrt{}((2ady - ydy)^2 : (2ay - yy))$ *quærere simulat, non quærit; jam novit formam futuram esse* $byv^2 + cv^2 + (dyv + eav)\sqrt{}(2ay + yy) + fy^3 + qay^2 + hay$, *sed quo pacto hoc sibi innotuit minime explicat.*

Haud dubie ex inductione.

Pag. 69. Theorematis mei, quo Fluens *ydz* per Seriem universalissimam exhibetur, investigationem, quam dare voluit CHEYNÆUS, scitissime explodit Cel. MOIVRÆUS.

Pag. 71. *Fluens ipsius* $dz : (1 + z)$ *erit* [ponendo $y = 1 + z$] $\frac{z}{y} + \frac{z^2}{2y^2} + \frac{z^3}{3y^3} + \frac{z^4}{4y^4}$ &c. *Quæ Series Logarithmum ipsius* $1 + z$ *exhibet, & hoc vulgari Logarithmorum Serie multo commodius,* &c.

Hoc bene observatur, quod & ego observavi, cum primus hanc Seriem invenirem.

Pag. 72. *Hic iterum (uti solet) frustra sedulus est, nec existimavit Cl.* BERNOULLII *Seriem satis generalem esse.*

Hanc

† Nº. XXXVI. pag. 185. *Tom. I.*

Hinc frustraneam sedulitatem etiam ego exprobravi Cl. CHEYNÆO in Animadversionibus meis †; sed nihil respondit.

Pag. 81. *Supposui* $az + bz^2 + cz^3 + \&c = gy + hy^2 + iy^3 +$ &c; *& valorem ipsius* z *in Serie infinita exhibui, quæ tota ex potestatibus ipsius* y, *una cum datis, componitur.*

Valorem z facillime determinare licet, ut ostendi in litteris ad Cl. HERMANNUM. Sed si alterutra, vel utraque Series incipiat a quantitate pura, non video quomodo tunc vel MOIVRÆUS vel CHEYNÆUS valorem z mihi determinare facile queat.

Pag. ead. *In mirabili isto Theoremate* NEWTONI, ... *quod continet Theoriam integram Sectionum angularium.*

Talia Theoremata etiam ego in *Actis Lips.* 1701. pag. 170 *, publicavi.

Pag. ead. *duo a nobis inventa Theoremata.... unum pro extrahenda radice æquationis infinitæ.... alterum pro infinitinomio ad potestatem..... indeterminatam elevando,*

Facile hæc duo Theoremata etiam a me sunt inventa, ut ostendi in litteris ad D. HERMANNUM.

Pag. 86. *Eo quod* $(a + x)^n = y$, *statim concludit Logarithmum unius Logarithmo alterius æqualem esse; quod verum non est, nisi utrumque ex eadem Logarithmorum scala depromserit.*

Levis objectio: utrumque enim ex eadem Logarithmorum scala depromtum esse, per se supponitur.

Pag. 88. *Cum quantitas* $x + a$ *ad potestatem cujus index* n *elevanda sit, quidni sumenda fuerit* x^n *pro termino primo Seriei, eodem jure ac* a^n.

Ideo x^n non debet sumi, quoniam *A* [primus terminus] ponitur quantitas constans, & x^n est indeterminata; & proin hæc pro illa sumi non potest, sed recte sumitur a^n.

Pag. 89.

† Supra pag. 134. & 135.
* N°. LXIX pag. 386. seq. *Tom. I.* Vid. etiam Nus. LXXXIX. pag. 511. *Tom. I.* & Nus. CXXVII, pag. 526. *Tom. II.*

Pag. 89 & 90. *Ubi ex hac æquatione* $a^2 ddx + xdy^2 = 0$ *radicem* x *invenire satagit*, ... *assumit æquationem* $x = by + cy^3 + dy^5 + \&c$, ... *& ponit* $b = 1$, ... *Sed .... cur non liceat ponere* $b = 2$, *vel* 3, *vel* &c.

Licet utique, etiamsi diversæ Series exsurgant. Ratio est, quoniam hæc æquatio Fluxiones secundas involvens admittit diversas æquationes involventes Fluxiones primas, scil. $aaddx + xdy^2 = 0$, multipl. per dx, erit $aadxddx + xdxdy^2 = 0$; sumtis Fluentibus erit $\frac{1}{2}aadx^2 + \frac{1}{2}xxdy^2 = \pm\frac{1}{2}bbdy^2$, ideoque $dy = adx : \sqrt{(\pm bb - xx)}$.

Pag. 93. *Problematis* [de binomio ad potestatem indeterminatam elevando] *libet.... investigationem adducere.... quam quatuor abhinc annis inveni.*

Aliam ego inveni, duodecim abhinc annis, longe naturaliorem; utpote quæ a Fluxionalibus non petitur; quamque *Marchioni* HOSPITALIO impertivi in *Lectionibus* meis in ipsius usum conscriptis. *

Pag. 97. *In Problemate pro Serie infinita ad potestatem quamcunque elevanda, postulat ut detur Seriei quadratum, cubus, biquadratum*, &c.... *Nonne vero hoc est manifesta petitio principii?*

Minime gentium; nisi omnis perfecta inductio sit nominanda petitio principii.

Pag. 102. *Theoremata quædam pro comparatione curvarum, quæ* Phil. Transf. N°. 278, *exhibui.... existimavi.... huc* referenda.

Omnia hæc Theoremata jam ante multos annos mihi erant cognita, uti patet ex *Lectionibus* meis cum HOSPITALIO communicatis †; & quidem omnia simul demonstrari possunt per ea quæ publicavi de integratione fractionum rationalium in *Actis*, 1703, pag. 26 seq. §. Nam omnes istæ quantitates binomiales sub vinculo comprehensæ, de quibus MOIVRÆUS agit [sunt eæ $\sqrt{(dx \pm xx)}$ & $\sqrt{(rr \pm xx)}$,] possunt facillime mutari in quantitates rationales, adeoque semper dependent earum integralia [nisi sint finita] a quadratura vel Circuli, vel Hyperbolæ, aut realis, aut imaginariæ.

* N°. CXLIX, Lect. XLVIII, pag. 522, *Tom. III.* † Ibid.
§ N°. LXX, pag. 393, *Tom. I.*

Pag. 111. *Si* m *exponatur per alium quemvis terminum diversum ab iis quos supra memoravimus* [ii sunt qui continentur in his Seriebus $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$ &c. $-3, -4, -5, -6, -7$, &c. $-2, -1, 0, 1, 2, 3$, &c.] *curva cujus ordinata* $x^m \sqrt{(dx+xx)}$ *aut* $x^m \sqrt{(dx-xx)}$, *non quadratur exacte, nec illa ab Hyperbola, aut hæc a Circulo pendet.*

Hoc Corollarium non est satis verum: exponatur enim, v. g. *m* per $-\frac{7}{2}$, qui casus in præcedentes limitationes non cadit; dependebit tamen quadratura curvæ $x^{-7:2} \sqrt{(Dx \pm xx)}$ a quadratura Hyperbolæ: id quod patet, si ponatur $x = 1 : y$; tunc enim $x^{-7:2} dx \sqrt{(Dx \pm xx)}$ mutatur in hanc expressionem $-dy \sqrt{(Dyy + y)}$, quæ utique dependet a quadratura Hyperbolæ. Idem valet, si *m* exponatur per quemcunque terminum hujus Seriei $-\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}, -\frac{9}{2}$ &c. Semper enim dependent a quadratura Hyperbolæ, sive sit +, sive —.

Pag. 117. *Si* m *ponatur æqualis termino cuivis, qui non in limitationes præcedentes cadat* [eæ erant $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$ &c, $-1, -2, -3, -4$, &c. $0, 1, 2, 3, 4$, &c.] *curva cujus ordinata* $x^m : \sqrt{(dx-xx)}$ *aut* $x^m : \sqrt{(dx+xx)}$ *neque quadratur exacte, nec illa a Circulo, aut hæc ab Hyperbola pendet.*

Hoc iterum falsum est. Nam si *m* ponatur æqualis termino cuivis hujus Seriei $-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}$ &c, curva cujus ordinata $x^m : \sqrt{(dx \pm xx)}$ semper dependet a quadratura Hyperbolæ.

Pag. 120. *Si* m *exponatur per terminum quemvis diversum ab illis quos supra memoravimus* [nempe $1, 3, 5, 7$, &c. $-4, -6, -8, -10$, &c, $-2, 0, 2, 4, 6, 8$, &c.] *curva, cujus ordinata* $x^m \sqrt{(rr-xx)}$, *aut* $x^m \sqrt{(rr+xx)}$, *neque exacte quadratur, nec illa a Circulo, aut hæc ab Hyperbola pendet.*

Etiam hoc minus recte. Nam si *m* exponatur æqualis termino cuilibet hujus Seriei, $-1, -3, -5, -7$, &c.

cur-

curva, cujus ordinata $x^m \surd(rr \pm xx)$ semper dependet a quadratura Hyperbolæ.

Pag. 125. *Si* m *exponatur per terminum quemlibet a præcedentibus* [1, 3, 5, 7, &c. — 2, — 4, — 6, — 8, &c. 0, 2, 4, 6, 8, &c.], *diversum, curva cujus ordinata* $x^m : \surd(rr - xx)$ *aut* $x^m : \surd(rr + xx)$ *neque quadratur exacte, nec illa a Circulo, aut hæc ab Hyperbola pendet.*

Item & hic, si *m* sumatur æqualis termino cuivis hujus Seriei — 1, — 3, — 5, — 7, &c. curva, cujus ordinata $x^m : \surd(rr \pm xx)$ pendet a quadratura Hyperbolæ.

Pag. ead. *Sit* A *Area curvæ, cujus abscissa* x, *ordinatim applicata* $x^m : (d - x)$; *sit* B *Area curvæ, cujus abscissa itidem* x, *ejusque ordinatim applicata* $x^{m-n} : (d - x)$; *erit Area* $A = d^n B - x^m : m - dx^{m-1} : (m - 1) - ddx^{m-2} : (m - 2)$, *&c. Sit ordinatim applicata* $x^m : (d + x)$, *tunc Area erit* $A = x^m : m - dx^{m-1} : (m - 1) + ddx^{m-2} : (m - 2)$ &c. $\pm d^n B$.

Hæc Series multis laborat difficultatibus,

1°. *A*, vel ejus complementum jam est $= - x^m : m - dx^{m-1} : (m - 1) - ddx^{m-2} : (m - 2)$, &c. uti facile ostenditur dividendo actualiter x^m per $d - x$, facto divisionis initio a $- x$; summato enim quotiente, oritur hæc Series $- x^m : m - dx^{m-1} : (m - 1)$ &c.; adeoque sequeretur, vel $d^n B$ esse $= 0$, vel semper esse $= A -$ compl. A; quod utrumque est absurdum.

2°. Si *m* est numerus integer & affirmativus, terminus tandem occurret $d^m x^{m-m} : (m - m) = d^m x^0 : 0 = d^m : 0 =$ infinito, ideoque Series nihil pro Area determinabit.

3°. Esto $n = 0$, quo casu erit $d^n B = B = A$; adeoque foret $A = A - x^m : m - dx^{m-1} : (m - 1)$ &c. quod est absurdum.

4°. Ex eo quod $d > x$, facile demonstrari potest terminum infinitesimum $d^{\infty} x^{m - \infty} : (m - \infty)$ fore semper magnitudinis infinitæ; adeoque Seriem in omni casu esse divergentem, & proin ad determinandam Aream inutilem.

Eædem hæ difficultates [quarta tantum restricta ubi $d > x$] contra alteram Seriem pro Area curvæ, cujus applicata $x^m : (d + x)$ moveri possunt. Ut igitur alias demus Series his difficultatibus non obnoxias, dividatur actu x^m per $d - x$, incipiendo a d, & quotiens summetur; prodibit $A = x^{m+1} : (m+1) d + x^{m+2} : (m+2) dd + x^{m+3} : (m+3) d^3$, &c. & pro altera dividatur actu x^m per $d + x$ [si nempe $d > x$], incipiendo a d; & erit, quotiente summato, $A = x^{m+1} : (m+1) d - x^{m+2} (m+2) dd + x^{m+3} : (m+3) d^3$ &c. si vero $d < x$, incipienda est divisio ab x; tunc enim, quotiente summato, erit $A = x^m : m \quad dx^{m-1} : (m-1) + ddx^{m-2} : (m-2)$ &c.

Pag. 126. *Si* m *exponatur per terminum quemlibet sequentis Seriei* 0, 1, 2, 3, 4, &c. *quadratura curvæ, cujus ordinatim applicata* $x^m : (d - x)$ *aut* $x^m : (d + x)$ *pendet a quadratura Hyperbolæ.*

Imo, non tantum per terminum quemlibet hujus Seriei 0, 1, 2, 3, 4, &c. sed etiam per quemlibet hujus $-1, -2, -3, -4$, &c. potest m exponi, & semper tamen pendebit quadratura curvæ cujus applicata $x^m : (d \pm x)$, a quadratura Hyperbolæ. Qua methodo reducendi quadraturas usus sit Cl. MOIVRÆUS nescio; interim hoc utique non debebat prætervidere; uti nec hoc, quod si m exponatur per quemlibet terminum duplicis hujus Seriei $\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{5}{2}, \pm \frac{7}{2}$ &c, curva cujus applicata $x^m : (d - x)$ dependebit a quadratura Hyperbolæ, altera vero, cujus applicata $x^m : (d + x)$ pendebit a quadratura Circuli. Porro nec hoc prætervidere debuisset, quod

quod ſumto m æquali cuilibet termino hujus Seriei duplicis $\pm\frac{1}{4}$, $\pm\frac{3}{4}$, $+\frac{5}{4}$, $\pm\frac{7}{4}$ &c. quadratura curvæ, cujus applicata $x^m:(d-x)$, dependebit a quadratura Circuli & Hyperbolæ ſimul; reliqui caſus omnes ad quadraturam Circuli vel Hyperbolæ; interdum reales, interdum imaginarios; interdum etiam ad quadraturas, partim Circuli, partim Hyperbolæ reducuntur. Qua de re conſulantur quæ in *Actis Lipſ.* 1703, pag. 26, publicavi †, præſertim Corollarium & Compendia, quæ huic rei maximam lucem fœnerantur. Sic ſi m exponatur per quemcunque terminum hujus duplicis Seriei, $\pm\frac{1}{3}$, $\pm\frac{2}{3}$, $\pm\frac{4}{3}$, $\pm\frac{5}{3}$, $\pm\frac{7}{3}$, $\pm\frac{8}{3}$ &c. Dico quod tunc quadratura curvæ, cujus ordinatim applicata $x^m:(D\pm x)$ dependebit a quadratura partim Hyperbolæ, partim Circuli: Quod ſic paucis oſtendo. Ponatur $x=y^3$, erit $x^m dx:(D\pm x)=3y^{3m+2}dy:(D\pm y^3)$; Exiſtente igitur m æquali alicui termino in hac Serie $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}$, &c. patet $3m+2$ fore terminum aliquem in hac Serie 3, 4, 6, &c. Diviſo igitur actu, quantum fieri poteſt, $y^{3m+2}dy$ per $D\pm y^3$, ſecundum regulam, quam in citato loco præſcripſi; ex quotiente, utpote rationali & integro, ſumetur integrale; reſidua vero fractio habebit neceſſario, vel hanc formam... $dy:(D\pm y^3)$, vel hanc.... $ydy:(D\pm y^3)$. Oſtendendum igitur reſtat, quomodo horum integralia, vel Fluentes, dependeant a quadratura, partim Hyperbolæ, partim Circuli. Eſto $D=n^3$, & invenietur per regulam meam $1:(n^3\pm y^3)=(+\frac{2}{3n}\mp\frac{1}{3nn}y):(nn\mp ny+yy)\pm\frac{1}{3nn}:(\pm n+y)$, & $y:(n^3\pm y^3)=(\pm\frac{1}{3}+\frac{1}{3n}y):(nn\mp ny+yy)-\frac{1}{3n}:(\pm n+y)$. Fluentes autem ipſorum $\pm\frac{dy}{3nn}:(\pm n+y)$ & $\frac{dy}{3n}:(\pm n+y)$ exprimunt Aream hyperbolicam. Pro determinandis reliquorum duorum Fluentibus,

 pona-

† N°. LXX. pag. 399 & 400. Videatur etiam Nus. CXIV, pag. 402. & ſeq. *Tom. II.* necnon Nus. CLVIII. ſupra, pag. 52.

ponatur $y = z \pm \frac{1}{2}n$, erit $(+\frac{2}{3n} \mp \frac{1}{3nn}y)\,dy:(nn \mp ny + yy)$ $= (+\frac{1}{2n} \mp \frac{1}{3nn}z)\,dz:(+\frac{3}{4}nn + zz)$, & $(\pm\frac{1}{2} + \frac{1}{3n}y)\,dy:$ $(nn \mp ny + yy) = (\pm\frac{1}{2} + \frac{1}{3n}z)\,dz:(\frac{3}{4}nn + zz)$; in quibus iterum Fluentes ipsorum $\pm\frac{1}{3nn}zdz:(\frac{3}{4}nn + zz)$ & $\frac{1}{3n}zdz:$ $(\frac{3}{4}nn + zz)$ dependent a quadratura Hyperbolæ; reliquorum autem $+\frac{1}{2n}dz:(\frac{3}{4}nn + zz)$ & $\pm\frac{1}{2}dz:(\frac{3}{4}nn + zz)$ Fluentes pendent a quadratura Circuli, ut MOIVRÆUS ipse declarat pag. 128.

Ponatur nunc $x = y^{-3}$ & erit $x^m\,dx:(D \pm x) = -3y^{-3m-1}$ $dy:(Dy^3 \pm 1)$. Existente igitur m aliquo termino in hac Serie $-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}$ &c. manifestum est $-3m-1$ fore terminum aliquem in ista Serie 0, 1, 3, 4, &c. adeoque reliqua peraguntur ut prius: Unde tandem constat quod asseruimus; nempe si m exponatur æqualis termino cuicunque hujus duplicis Seriei $\pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{4}{3}, \pm\frac{5}{3}, \pm\frac{7}{3}$ &c. fore Aream curvæ, cujus applicata $x^m:(D \pm x)$ quadrabilem per quadraturam partim Hyperbolæ, partim Circuli. Resolvimus enim Aream illam in Circularem unam & Hyperbolicas duas.

Denique, si m exponatur per quemvis terminum hujus Seriei duplicis, $\pm\frac{1}{6}, \pm\frac{5}{6}, \pm\frac{7}{6}, \pm\frac{11}{6}, \pm\frac{13}{6}$ &c. Area curvæ, cujus applicata $x^m:(D - x)$ est pariter quadrabilis per quadraturam partim Circuli, partim Hyperbolæ. Nam sit $x = y^6$, erit $x^m\,dx:(D - x) = 6y^{6m+5}\,dy:(D - y^6)$. Deinde sit $x = z^{-6}$, erit $x^m dx:(D - x) = -6z^{-6m-1}\,dz:$ $(Dz^6 - 1)$. Jam manifestum est quod, per substitutionem termini alicujus affirmativi illius Seriei $+\frac{1}{6}, +\frac{5}{6}, +\frac{7}{6}$ &c, loco m, habeatur $6m + 5$ æquale termino alicui in hac Serie 6, 10, 12, 16, 18, &c.; & per substitutionem termini alicujus negativi, fiat $-6m - 1 =$ termino alicui Seriei 0, 4, 6, 10, 12, &c.

Diviso

Diviso igitur, secundum tenorem Regulæ meæ, quantum fieri potest, y^{6m+5} per $D - y^6$, vel $z^{-6m-1} dz$ per $Dz^6 - 1$, & quotientis, utpote rationalis & integri, sumta Fluente vel integrali, residua fractio habebit necessario, vel formam.... $dy : (D - y^6)$, vel hanc.... $y^4 dy : (D - y^6)$ & pro altera expressione, vel hanc.... $dz : (Dz^6 - 1)$, vel hanc.... $z^4 dz : (Dz^6 - 1)$. Est autem [posito $D = n^6$] .... $dy : (n^6 - y^6) = ... dy : (n^3 + y^3) + ... dy : (n^3 - y^3)$; horum autem Fluentes, vel integralia dependent [ut per modo supra dicta clarum est] a quadratura, partim Circuli, partim Hyperbolæ; a qua & reliquarum partium [quoniam eodem modo dispesci possunt] Fluentes dependent. Ergo &c.

Pag. ead. *Etenim ductis.* &c.

Demonstratio hæc MOIVRÆI huc redit. Quoniam $x^0 dx : (D \pm x)$ est integrabile per quadraturam Hyperbolæ, ergo etiam per Hyperbolæ quadraturam integrabile est $x^m dx : (D \pm x)$. Quis autem hanc consequentiam admitteret; si rei veritatem aliunde non nosset. ?

Pag. 127. *Sit* A *Area curvæ cujus abscissa* x, *ordinatim applicata* $x^m : (rr + xx)$. *Sit* B *Area curvæ, cujus abscissa itidem* x, *ordinatim applicata* $x^{m-2n} : (rr + xx)$; *erit Area* $A = x^{m-1} : (m - 1) - rr\, x^{m-3} : (m - 3) + r^4 x^{m-5} : (m - 5)$ &c.... $\mp r^{2n} B$.

Series hæc similibus premitur difficultatibus, quas supra ad Seriem pag. 125, animadvertimus. Miror hic MOIVRÆUM nihil dicere de $x^m : (rr - xx)$.

Pag. 128. *Si* m *exponatur per terminum quemlibet sequentis Seriei*, 0, 2, 4, 6, 8, &c. *quadratura curvæ, cujus ordinatim applicata* $x^m : (rr + xx)$, *pendet a rectificatione circularis arcus.*

Imo etiam, si *m* exponatur per quemlibet terminum ejus Seriei, $-2, -4, -6, -8$, &c.

Pag. ead. *Etenim si centro* c, &c.

Demonstratio similis est superiori ad pag. 126. Cæterum, si *m* exponatur per quemvis terminum duplicis hujus Seriei, ± 0, ± 2, ± 4, ± 6, &c. Area curvæ, cujus ordinatim applicata $x^m : (rr - xx)$ quadrabitur per quadraturam Hyperbolæ. Et si *m* exponatur per quemcunque terminum duplicis hujus Seriei $\pm \frac{1}{2}$, $\pm \frac{3}{2}$, $\pm \frac{5}{2}$, $\pm \frac{7}{2}$, &c. vel per quemcunque duplicis hujus $\pm \frac{1}{3}$, $\pm \frac{2}{3}$, $\pm \frac{4}{3}$, $\pm \frac{5}{3}$ &c, quadratura curvæ, cujus applicata $x^m : (rr - xx)$, dependebit a quadratura partim Circuli, partim Hyperbolæ. Sed oportet talia MOIVRÆO suam non suggessisse methodum; alioquin non præteriisset.

N°. CLXIX.

EXTRAIT D'UNE LETTRE

à l'Auteur du Commentaire sur l'Analyse des infiniment petits de M. le *Marquis* DE L'HOPITAL.

Imprimé à *Paris*, en 1721.

. . . .

J'ai reçu, Monsieur, votre *Commentaire sur l'Analyse*, & votre *Discours sur le Mouvement* : Je vous en rends mille graces. . . . . . . En lisant le Discours sur le Mouvement, j'ai bien remarqué qu'il est écrit avec beaucoup d'élegance & de force; mais je n'y ai point trouvé de nouvelles inventions, comme je croiois qu'on avoit exigé de ceux qui voudroient prétendre à remporter quelque prix. Vos pensées, tant sur le Corps, que sur le Mouvement, ne sont pas de nouvelle datte; elles sont la plûpart prises des opinions de DESCARTES, qui fait, comme vous, consister l'essence des Corps dans la seule étendue, & celle du Mouvement dans l'application successive de leurs surfaces aux surfaces des corps contigus. Vous avez aussi presque les mêmes

mes ſentiments que Mr. DESCARTES, ſur la quantité & ſur la communication du mouvement. Il eſt vrai que vous paraphraſez très bien cet Auteur, & que vous mettez ſon ſyſtème dans un beau jour; quoique vous le refutiez auſſi ſur quelques points, comme, par exemple, ſur les cauſes occaſionelles. Cependant les Anglois ne vous paſſeront pas tout ce que vous dites ſur l'eſſence du Corps & du Mouvement. Pour ce qui eſt de la quantité prétendue permanente du mouvement & de ſa communication, que DESCARTES en déduit; les règles qu'i donne ſont entierement fauſſes: on en peut démontrer géometriquement la fauſſeté.

Je ne ſuis pas aſſez préſomptueux, pour croire que j'aurois pû écrire une auſſi belle piéce que la votre; car je n'ai pas le don de l'éloquence: mais je ſouhaiterois, qu'on propoſât une autre fois quelque queſtion déterminée, priſe de la Phyſique, réſoluble par la Géometrie, où il ne faille que de l'adreſſe à méditer & à inventer; peut être aurois-je le bonheur d'y réuſſir autant qu'un autre.

L'état de ma ſanté ne me permet pas de lire avec beaucoup d'attachement votre Commentaire ſur *l'Analyſe des infiniment petits*. J'ay pourtant parcourru, avant que de le donner au Relieur, la Dédicace, la Préface & les deux Diſcours préliminaires. Le ſecond de ces Diſcours éclaircit fort bien le calcul des puiſſances; tout y va bien, à quelques fautes près, ſoit de calcul, ſoit d'impreſſion. Il y a auſſi de belles remarques ſur les infiniments petits dans le premier Diſcours: Mais il ſemble qu'en voulant éclaircir la nature de ces infiniments petits avec trop de ſoin, vous la rendez moins intelligible à ceux, qui ne ſont pas accoutumés à de longues explications; ſur tout, ſi ces explications elles mêmes leur paroiſſent plus obſcures que la matiere à expliquer. En effet, c'eſt quelque choſe de choquant que de dire [p. 5.] *Qu'un Solide, un Parallelépipede, par exemple, peut être diviſé & ſubdiviſé dans la hauteur, tellement, qu'on viendra enfin à une ſurface, dont la hauteur ſera infiniment petite.* Car par la diviſion des corps, quelqu'infinie qu'elle ſoit, on ne

parviendra jamais à des surfaces. Les parties d'un corps, quoique infiniment petites, sont toujours corps ; celles d'une surface, sont toujours surfaces; & les parties d'une ligne sont toujours lignes : n'étant pas possible qu'un genre de quantité puisse être changé par la division en un autre genre de quantité. Vous auriez donc mieux fait, à mon avis, de garder le mot de tranches, & de dire *qu'on viendra enfin à une tranche, dont la hauteur sera infiniment petite, &c.* Vos autres façons de parler, *les surfaces sont, par rapport au Parallelépipede, des infiniments petits,* &c. *le Parallelogramme infiniment petit, par rapport au Parallelépipede, &c.* me paroissent très dures pour une oreille géometrique, & peu capables de former un commençant à avoir des idées nettes, sur le sujet qu'on veut traiter: elles jettent plûtôt dans l'erreur, & dans le préjugé, où on est avant que d'être Géometre; comme si le corps étoit composé de surfaces, la surface composée de lignes, & la ligne composée de points; préjugé fort difficile à détruire dans les jeunes gens, & qui les empêche de comprendre les démonstrations sur les figures géometriques. Car qu'est-ce qui les trouble d'avantage, que quand ils ne savent pas distinguer, par exemple, la surface, d'avec les lignes qui la terminent? Il ne faudroit donc pas se servir de ces façons de parler, qui nourrissent les préjugés, au lieu de les détruire.

Pag. 7. Pour démontrer que la circonference d'un Polygone infinilateral, inscrit dans le Cercle, est égale a la circonference du Cercle; vous dites, que chaque côté du Polygone, étant la corde d'un arc de Cercle, la difference, qu'il y a entre un arc & sa corde, diminue toujours, à proportion que cette corde devient plus petite ; ce qui est très-vrai, comme aussi ce qui suit : *Qu'on pourra donc multiplier tellement les cotés d'un Polygone inscrit ou circonscrit, qu'il sera enfin permis de compter pour rien la difference d'un de ses cotés avec l'arc qui lui répond.* Tout cela est vrai; mais la conséquence, que vous en tirez n'est pas légitime, savoir que la circonference du Poligone devient égale à celle du Cercle. Car il ne suffit pas de faire voir, que la diffe-

difference qu'il y a entre un arc de Cercle & sa corde diminue à l'infini, pour en conclure que les deux circonferences deviennent égales; autrement, vous pourriez conclure avec le même droit, que la base AB d'un triangle rectangle ABC est égale à l'hypothenuse AC; de ce qu'étant divisées l'une & l'autre par des parallèles *nm*, *nm*, *nm*, &c. je vous fais voir, que plus est grand le nombre des parties, & plus petite sera la difference entre une des parties *mm* & une des parties *nn*; *on pourra donc multiplier tellement les parties de la base & de l'hypothenuse, qu'il sera enfin permis de compter pour rien la difference d'une des parties* mm *avec une des parties* nn, mais celui, qui en voudroit inferer de-là, que l'hypothenuse AC deviendra égale à la base AB, se tromperoit entiérement. Vous voyez, Monsieur, qu'il faut encore autre chose, pour prouver que la circonference du Polygone infinilateral devient égale à celle du Cercle: c'est qu'il faut faire voir, que non seulement la difference entre l'arc & la corde s'évanouit; car cela arrive aussi entre *mm* & *nn*; mais que de plus la raison, qu'il y a entre l'arc & la corde, devient infiniment peu differente de la raison d'égalité; ce qui n'arrive pas à la raison entre *mm* & *nn*, qui demeure constamment la même, en quelque grand nombre de parties, que soient divisées les lignes AB & AC.

TAB. LXXXI. N° CLXIX.

Pag. 8. Vous dites *que l'angle est sans aucune épaisseur à sa naissance.* Je n'ai jamais ouï parler de l'épaisseur de l'angle; je ne sais non plus ce que c'est qu'un *Angle naissant.* Les cotés d'un angle peuvent être naissants, lorsqu'ils deviennent finis, d'infiniment petits qu'ils étoient; mais l'angle lui-même demeure toujours d'une même grandeur. Vous ne concevez, dites vous, point de lignes sans largeur; mais moi, au contraire, je ne conçois point de lignes avec largeur; car, je vous prie, dites-moi, qu'est-ce que c'est qu'une ligne avec largeur? C'est une chimère; c'est une contradiction; c'est comme si vous disiez *c'est une ligne qui est surface*, ou, *c'est une surface qui est corps.* Je comprends bien, que vous voulez insinuer, qu'il n'y a point de ligne géométrique, qui soit sans largeur; mais la possibili-

té, ou l'impossibilité de l'existence ne doit pas règler nos idées. Je dois concevoir les choses selon leur définition : or on définit la ligne, que c'est une grandeur, qui a une seule dimension. Je ne me mets pas en peine, si une telle grandeur peut exister, ou non ; ni si je la puis imaginer, ou non. Imaginer & concevoir sont choses differentes ; on doit concevoir une chose, selon ce qu'elle est ; mais l'imagination se la represente, selon qu'elle frappe les sens ; comme vous savez mieux que moi, vous, qui avez fait une si excellente Logique.

P. 11. au commencement, & dans la suite, vous parlez, Monsieur, *de multiplier AB par BC*, c'est-à-dire, un rectangle par une ligne ; & vous dites, *qu'on aura le rectangle BD*. Pardon, Monsieur, c'est là encore une façon de parler contre l'usage des Géométres ; car vous savez que chez eux *multiplier un rectangle par une ligne, c'est faire un parallelépipede*, & non pas un autre rectangle. Il ne vous est pas inconnu, que dans l'Algébre on augmente les dimensions par la multiplication, & on les diminue par la division ; tellement que le produit est la somme des dimensions des deux multiplicateurs, & le quotient la difference des dimensions du dividende & du diviseur. Il est vrai, que vous vous expliquez, sur ce que vous entendiez par *multiplier le rectangle AB par la ligne BC*, en disant, que c'est *placer successivement AB sur la ligne BC, autant de fois, que la base se trouve dans cette ligne* : cela va bien ; cependant les commençants & les foibles esprits, qui ont appris à avoir des idées de ces multiplications & divisions des dimensions, selon la maniere ordinaire, pourroient ici se confondre, au lieu de s'éclaircir sur les infiniment petits de tous les genres. Vous auriez peut-être mieux fait de vous exprimer ainsi : *Si on multiplie AB, par le nombre de fois que sa base* Bm *se trouve dans la ligne BC, on aura le rectangle BDE*m : en parlant ainsi, vous ne vous seriez pas écarté de la maniere ordinaire de parler des Algébristes.

Vers la fin de la même page, vous concluez, sans aucune restriction, que *si la hauteur E du rectangle AB étoit infinie, quoi-*

que

que la Base B m *fut infiniment petite, ce Rectangle ne laisseroit pas d'être une quantité finie.* Pour moi je crois, qu'a parler généralement, cela ne peut pas être soutenu; à moins qu'on ne suppose que la raison entre la hauteur E & la ligne BC est comparable à la raison entre la même ligne BC & la base B*m*. Car d'ailleurs, la premiere raison pourroit être infiniment, ou plus grande, ou plus petite, que la seconde raison. Ce que j'ay remarqué sur la page 11, touchant votre maniere de multiplier, se doit aussi entendre sur ce que vous dites, page 13, des divisions; ainsi je n'approuve pas cette façon de parler, *le rectangle BD divisé par le rectangle AB donne pour quotient la ligne BC*; car la division d'un rectangle par un autre rectangle donne pour quotient, non pas une ligne, mais un nombre. *L'infiniment petit*, dites vous au même endroit, *du premier genre AB, divisé par l'infiniment petit du même genre* Bm, *donne pour quotient E un infiniment petit du second.* Point du tout. Si les deux infiniment petits du premier genre sont de grandeur homogéne, comme ligne & ligne, ou surface & surface, &c. que l'on peut exprimer par dx & dy; alors la division de l'une par l'autre [$\frac{dx}{dy}$ ou $\frac{dy}{dx}$] donne un nombre fini, bien loin de donner un infiniment petit du second genre. Si l'un des infiniment petits du premier genre marque une surface [zdx], & l'autre une ligne dy; alors la division de celui-là par celui-ci [$\frac{zdx}{dy}$] donnera une ligne finie, & point-du-tout un infiniment petit du second genre: ainsi des autres. Je ne saurois souffrir ce que vous ajoutez (pardonnez moi ma franchise) *que E*, qui est une ligne, *est infiniment petit en comparaison de AB*, qui est un rectangle. Dites moi, de grace, qui est celui de tous les Géometres, qui ait jamais comparé ensemble une ligne & un rectangle, qui sont des grandeurs hétérogénes? J'aimerois autant une comparaison entre le son & la couleur, ou entre un tems & un poids. Que diriez vous, Monsieur, si quelqu'un vous disoit, que la longueur d'une aune est infiniment petite en-

en comparaiſon de la longueur d'un ſiécle ? En vérité, votre comparaiſon ne va guères mieux.

Vous continuez, dans la même page, vos locutions impropres, en prenant la baſe du Parallelépipede pour ſon infiniment petit, comme ſi un Rectangle, qui eſt une ſurface, pouvoit être l'élément d'un Parallelépipede, qui eſt un ſolide. Ce que vous dites, Monſieur, après cela ſur les multiplications & diviſions des infiniment petits de differens genres, n'eſt pas bien conforme aux idées que j'en ai; par exemple, à la page 14, vous voulez, que *ſi on diviſoit un infiniment petit du premier genre par un infiniment petit du troiſiéme, on auroit pour quotient un infiniment petit du ſecond, multiplié par un infiniment petit du premier.* Mais quant à moi, je prétens qu'une telle diviſion produiroit pour quotient une quantité infiniment-infinie, c'eſt-à-dire, infinie du ſecond genre; tant s'en faut que le quotient puiſſe être, comme vous dites, un infiniment petit du ſecond genre multiplié par un infiniment petit du premier. Voici ma preuve, ſans tant de façon de Rectangles & de Parallelépipedes. Soit a une ligne finie, adx un infiniment petit du premier genre, $dddy$ un infiniment petit du troiſiéme genre, il faut prouver que $\frac{adx}{dddy}$ eſt un infiniment grand du ſecond genre. Pour cette fin, ſoit $\frac{adx}{dddy}$ nommé z; donc $adx = zdddy$; donc $dx : dddy = z : a$. Or dx eſt infini-infiniment plus grand que $dddy$; donc auſſi z, qui eſt le quotient de la diviſion, ſera infini-infiniment plus grand que a, qui eſt une ligne finie; & partant z ſera un infiniment grand du ſecond genre. Ce qu'il falloit démontrer. C'eſt de cette maniere aiſée, qu'on peut déterminer toutes vos multiplications & diviſions de differens genres d'infiniment petits; enſorte, que je ne conçois pas pourquoi vous marchez par tant de détours, pour mener votre Lecteur à l'intelligence des differentielles, qui n'eſt pas à beaucoup près ſi difficile, que vous voulez faire accroire.

P. 15.

P. 15. au commencement de la page, vous faites derechef une comparaiſon entre des grandeurs hétérogènes, en diſant que *les lignes qui ferment un Triangle infiniment petit, ſont des grandeurs infiniment petites, en comparaiſon de la ſurface de ce Triangle.* Par ces paroles vous entendez ſans doute quelque choſe de different de ce que les termes ſignifient ordinairement; car vous remarqués fort bien vous même, à la page ſuivante, que *toute comparaiſon doit rouler ſur des choſes de même genre.* J'avoue donc que je ne comprens pas le véritable ſens que vous donnez à la ſuſdite comparaiſon, entre les lignes & la ſurface de votre Triangle. Comment voulez-vous donc qu'un Ecolier le comprenne? Outre cela l'aire d'un Triangle peut être infiniment petite, ſans qu'il ſoit beſoin pour cela que tous ſes trois côtés ſoient auſſi infiniment petits; car concevez par exemple un Triangle Iſoſcele, dont l'angle du ſommet ſoit infiniment aigu; vous voyez que l'aire en ſera infiniment petite, quand même les deux jambes ſont d'une grandeur finie.

P. 22. *ligne derniere*, il y a faute de calcul; car à la place de $+dx^2$ il faut écrire $-dx^2$. Cette faute, quoique legère, influe pourtant ſur ce qu'il y a à la page ſuivante, où vous dites, *donc* $dx^2 = dy^2$; *&* $dx = dy$; puiſqu'il faudroit conclure $-dx^2 = dy^2$, donc $dx\sqrt{-1} = dy$; c'eſt-à-dire une grandeur réelle égale à une imaginaire; ce qui jetteroit encore dans de plus grandes erreurs & contradictions, que celles que vous marqués. Cette même faute de calcul fait qu'il eſt faux ce que vous dites peu après; que dans les cas où dx ſeroit $= dy$, alors $adx - 2xdx$ ſeroit très parfaitement $= 2ydy$. Il faudroit dire, que dans les cas, où $-dx^2$ ſeroit $= dy^2$, alors $adx - 2xdx$ ſeroit très parfaitement $= 2ydy$: mais puis qu'il eſt impoſſible, que $-dx^2$ ſoit $= dy^2$, il faut conclure que ces cas ne peuvent pas arriver, où $adx - 2xdx$ ſeroit très parfaitement $= 2ydy$; à ſavoir dans le ſens que vous le prenez. Ce que vous dites, dans le paragraphe ſuivant, participe encor de la même faute.

Voila, Monſieur, mes remarques, que je vous ai bien vou-

lu

lu communiquer, puiſque vous avez témoigné envie de les voir. J'eſpére que vous les prendrés en bonne part; d'autant plus que vous pouvez être aſſuré, que je ſouhaitterois de tout mon cœur, que vous m'euſſiez fait voir votre Commentaire en manuſcript, avant que de le faire imprimer, comme vous me l'aviez propoſé il y a quelques années: peut-être que mes Remarques ne vous auroient pas été inutiles. Je croi que mes avis vous feront aſſez connoitre, que vous auriez dû changer pluſieurs de vos manieres de commenter, & leur donner un autre tour; de peur que les ignorants, ou ceux qui haïſſent les nouveaux Calculs, ne prennent vos explications dans un mauvais ſens, & ne cherchent par là occaſion de décrier *l'Analyſe des infiniments petits*; ce qui ſeroit bien éloigné du but, que vous vous étes propoſé, en faiſant ce Commentaire.

Quant au reſte, Monſieur, vous me faites bien de l'honneur dans votre derniere lettre de reconnoitre & d'avouer, que cette *Analyſe*, que vous avez commentée, eſt moins l'ouvrage de Mr. le *Marquis* de l'HOPITAL, que le mien. Je veux bien croire, que vous parlés de la ſorte, non point par complaiſance, mais parce que vous en étes entiérement convaincu, par des preuves inconteſtables, qui ſont publiques. Vous en aurez un bon nombre dans les *Actes de Leipſic*, ſur tout dans ceux de l'Année paſſée, au mois de *Juin* ou dans celui de *May* [car je ne m'en ſouviens pas bien], où il y a une piéce d'un nommé Mr. BOURCARD *, dans laquelle on cite pluſieurs Lettres autentiques, qui ne laiſſent aucunement douter de la vérité du compliment que vous me faites dans votre Lettre, &c.

* N°. CXX, pag. 483, *Tom.* II.

REMAR-



N°. CLXX.

REMARQUES

Sur le Livre intitulé

Analyse des infinimens petits, comprenant le Calcul integral, dans toute son étendue, &c.

Par Mr. STONE, de la Societé Royale de *Londres*.

Imprimé à Paris *en* 1735.

Sur le Discours Préliminaire.

Pag. 4. MR. LEIBNITZ *promettoit volontiers des Ouvrages... C'est dommage qu'il n'ait eu le tems d'en exécuter peut-être aucun, hors sa* Théodicée, &c.

N'a-t-il donc rien donné que sa *Théodicée*? Toutes les piéces qu'on a de lui, quoique détachées, ne composeroient-elles pas un gros volume, si on les ramassoit? Son *Codex Diplomaticus* est bien un gros Livre, si Mr. STONE en demande.

Ibid. *On peut douter si celui dont il s'agit ici* [l'Ouvrage que *Mr.* LEIBNITZ méditoit sur la Science de l'infini,] *étoit mûr pour le tems auquel il le promettoit.*

Mais certes il n'est pas mûr pour Mr. STONE, qui ne donne, à ce qu'il paroit, que des choses triviales.

Ibid. *Le Calcul différentiel etoit facile à éclaircir, ou même assez éclairci dès ce tems-là.*

Qui est-ce donc qui l'a éclairci, avant que je l'aye expliqué à Mr. De l'HOSPITAL? Où est-ce qu'on trouvoit ce calcul? Le Calcul exponentiel donné par moi, qui est-ce qui en avoit écrit quelque chose? En trouvoit-on quelque chose chez FERMAT, qu'on appelle ici *premier calculateur des infiniment petits.*

Pag. 5. *Mrs.* BERNOULLI *avoient suffisamment remanié cette partie.*

Comme si quelqu'autre avant nous avoit déja manié cette partie.

 Ibid.

Ibid. *Le Calcul intégral.... étoit comme la partie propre de Mr.* NEWTON *& de cette Nation célèbre* &c.

Mr. NEWTON avoit-il alors rien donné sur le Calcul intégral? Quel mépris pour les non-Anglois! Nous les avons trouvé ces methodes, sans aucun secours des Anglois.

Ibid. *Ce n'est pas qu'il n'eut transpiré quelque lueur de ce Calcul reciproque des Fluxions. Mrs.* LEIBNITZ, BERNOULLI, DE l'HOPITAL *pouvoient bien, sans le secours d'aucun autre, en avoir fait les premieres opérations, & pour le moins la règle inverse du retour d'une différentielle à son intégrale.*

Le grand NEWTON, ce profond Géométre, ne nous avoit rien communiqué, dans ce tems-là, de ce qu'il peut avoir gardé *in petto*; au-moins je ne lui suis redevable de rien.

Pag. 6. *Le Calcul intégral ne va pas sans le secours des Séries.... il faut developer* [les Problémes] *en Séries infinies.*

Il y a bien des occasions, où les Séries sont inutiles, & où le Probléme se resout mieux sans elles, que par elles.

Pag. 11. *Il est peu d'esprits novices qui sans calcul puissent franchir.... la 47e. Proposition du 1er. Livre* [d'EUCLIDE].

Y a-t-il rien de si facile que d'entendre cette Proposition? Je ne vois pas ce que le Calcul peut contribuer pour l'entendre.

Pag. 15.... CHEYNE,.... TSCHIRNAUS ne devroient pas être comptés parmi ceux qui ont sécondé les antécesseurs dans les calculs, eux qui ont commis d'horribles paralogismes en fait de calculs.

Pag. 21. *A la 250me. page* [du Livre des Principes de Mr. NEWTON] *on trouve le fameux Lemme... qui contient le principe immediat du calcul.... des Fluxions.*

Ce fameux Lemme justifieroit pourtant la prétension de Mr. LEIBNITZ; c'est ce qui a fait que l'on a retranché ce Lemme, ou plûtôt ce Scholie, de la troisieme Edition, comme faisant trop d'honneur à de Mr. LEIBNITZ.

Ibid. DESCARTES *est admirable,.... pour l'avoir inventé* [le Calcul algébrique].

Mais

Mais les Anglois l'accusent de l'avoir pris de HARIOTTE.

Pag. 22 à la fin. NEWTON *étoit sur le point de se voir enlever toute la gloire* [de l'invention du Calcul infinitesimal] *par Mr.* LEIBNITZ.

Mais Mr. LEIBNITZ avoit inventé par lui-même le Calcul differentiel, selon le propre aveu de Mr. NEWTON, qu'il fait dans son Scholie. N'étoit-il donc pas juste que Mr. LEIBNITZ se soit attribué la gloire de son invention.

Pag. 30. *Le Calcul n'est qu'une petite partie de la Géométrie.*

Renversons la Thése, en disant que la Géométrie n'est qu'une petite partie du Calcul; puisque le faiseur de la Préface dit lui-même que les Anciens ont trouvé tous leurs Théorêmes par le Calcul.

Pag. 38. *La méthode .... de former des Corps ..... n'a été dévelopée qu'à demi par le Calcul intégral.*

Ce n'est pas la faute du Calcul intégral, mais celle de Mr. STONE, & des autres Héros, que l'on éléve dans cette Préface, qui n'ont pas bien sû manier le calcul.

Pag. 45. *Le Cylindre, la Sphére & le Cone, suivant* ARCHIMEDE, *sont dans le rapport des nombres* 3, 2, 1.

Cela n'est pas; car ils sont comme *9, 6, 4*; c'est-à-dire, en raison continue de 3 à 2.

Pag. 68. *La forme des Polygones inscripts & circonscrits de* Gregoire *de* St. VINCENT; *cette forme d'échelons, qui ne paroit rien, a été décisive pour la naissance des nouveaux Calculs, le différentiel & l'intégral &c.*

Peut-être, tout cela seroit-il à naître encor, si la méthode en étoit restée aux Polygones parallèles d'ARCHIMEDE. Quelle haute idée des échellons du P. GREGOIRE! Dans le tems que nous approfondissions les nouveaux Calculs différentiel & intégral, je ne savois pas encor qu'il y eut jamais eu un P. *Gregoire* de St. VINCENT, bien loin d'avoir vû ses échellons. L'Ecrivain de la Préface se trompe bien, s'il croit que tout le fondement de nos nouveaux calculs consiste uniquement dans la considération de ces échellons.

Pag. 80. Mr. HUGUENS.... *inférieur en ce point à* DESCARTES.

On a de bonnes raiſons pour l'eſtimer, en ce point, beaucoup ſupérieur à DESCARTES.

Pag. 82. *La circonférence eſt égale à la tangente de la Spirale.*

Ce n'eſt pas à la tangente, mais à la ſoûtangente de la Spirale que la circonférence eſt égale.

Pag. 83. *Pourquoi ne penſerions-nous pas en effet que la Quadrature du Cercle fut une choſe poſſible à trouver?*

Je répondrois, parce qu'on en peut démontrer l'impoſſibilité.

Pag. 85. DE LA FAILLE... *a fait voir que le centre de gravité d'un arc, ou ſegment circulaire étant donné, le cercle ſeroit quarré. C'eſt... une des belles découvertes particuliéres des derniers ſiécles.*

Il falloit ajouter que ce ſeroit une découverte fort mince dans le préſent ſiécle.

Ibid. *Cette poſſibilité* (de la quadrature du Cercle) *eſt démonſtrative, & l'impoſſibilité ſimplement préſumée.*

C'eſt tout le contraire.

Sur l'Analyſe des infiniment petits, comprenant le Calcul intégral.

Pag. 1. *On ne peut trouver les Intégrales exprimées par des fractions, ou par des quantités ſourdes; qu'en faiſant diſparoitre, dans les unes leur dénominateur complexe, dans les autres leur ſigne radical; ce qui ſe fait par le moyen d'une Série infinie.*

Notre Géométre ne paroit pas être fort habile dans le Calcul integral; puis qu'il ne ſait pas la pratique d'intégrer grand nombre de quantites différentielles, exprimées par des fractions, ou par des quantités ſourdes, ſans recourir à des Séries infinies. Ainſi, par exemple, $xdx : (aa+xx)^n$, ou $xdx \sqrt[n]{(aa+xx)}$ ſont intégrables ſans Séries, & une infinité d'autres. Pourquoi donc veut-il

veut-il qu'on fasse auparavant disparoitre dans les unes leur dénominateur complexe, dans les autres leur signe radical ?

Pag. 2. Probléme 1. *Transformer* b : (a + x), *où* a *&* b *sont des quantités connues*, *&* x *inconnue*, *en une Série infinie &c.*

On a mauvaise grace de nommer a & b connues, & x inconnue, au lieu de les nommer ici déterminées & indéterminées.

Ibid. *Jusqu'à-ce que le quotient ait* 4, 5, *ou 6 termes. Alors vous en pourrez presque toûjours trouver autant qu'il vous plaira, en considérant la suite progressive de ce quotient &c.*

Au contraire, cela est le plus souvent impraticable. On n'a qu'à prendre pour exemple celui qu'on donne pag. 4, vers la fin, $(2x^{1:2} - x^{3:2}) : (1 + x^{1:2} - 3x)$, dont la Série se trouve $2x^{1:2} - 2x + 7x^{3:2} - 13xx + 34x^{5:2}$ &c. On a ici cinq termes, mais comment peut-on voir la suite progressive, sans continuer l'opération de la Division ?

Pag. 7. *Quelques exemples donneront l'usage de ce merveilleux Théorème* [pour l'élevation d'un binome à une puissance quelconque].

Nous avons trouvé ce merveilleux Théorème, aussi-bien que Mr. NEWTON, d'une maniere plus simple que la sienne. Feu Mr. PASCAL a été le premier qui l'a inventée.

P. 8. & 9. *Exemples* 2. 3. 4. &c.

Tous ces exemples ne contiennent rien de clair, puisqu'on ne sauroit continuer les Séries, sans continuer actuellement l'opération de l'extraction des Racines ; ce qui est pénible.

Pag. 9. *Mr. de* MOIVRE *nous a donné dans les* Transactions Philosophiques *le Théorème suivant, soit pour élever une Série infinie à la puissance donnée* m, *soit pour en extraire la racine.*

Comment Mr. STONE daigne-t-il citer une Etranger ? Mais il auroit mieux fait de montrer la premiere source de l'invention de ce beau Théorême, plûtôt que de releguer son Lecteur à la démonstration de Mr. de MOIVRE, contenue dans les *Transactions*. J'en ai trouvé une méthode fort facile, que j'ai communiquée à Mr. HERMAN, il y a bien 40 ans,

ſans avoir jamais vu ce que Mr. de MOIVRE en a publié dans les *Tranſactions*.

Pag. 18. *L'Intégrale de* dx *eſt* x; *celle de* dx + dy *eſt* x + y: *l'intégrale de* xdy + ydx *eſt* xy; &c.

Les Intégrales ici marquées ne ſont pas exprimées dans toute leur étendue; il faut les augmenter ou diminuer d'une conſtante c; en diſant que l'intégrale de dx eſt $x \pm c$; celle de $dx + dy$ eſt $x + y \pm c$: l'Intégrale de $xdy + ydx$ eſt $xy \pm c$ &c. comme Mr. STONE le dit lui-même dans le *Scholie* p. 19.

Ibid. *D'où il eſt évident que la méthode inverſe des Fluxions, ou la méthode des intégrations, revient à celle de trouver la ſomme d'une Série.*

Il n'eſt pas néceſſaire, en pluſieurs occaſions, de recourir aux Séries; ſavoir toutes les fois que l'on peut trouver l'intégrale en termes finis, ſoit algébriques, ſoit exponentiels. La méthode d'intégrer conſiſte dans un algorithme, contenant des règles certaines pour parvenir à l'intégrale d'une différentielle donnée, ſi la choſe eſt faiſable. Il eſt comme de la méthode de trouver les racines d'une équation algébrique. On pourroit ſans doute auſſi trouver les racines par des Séries; mais ce ſeroit une grande folie, ſi quelqu'un vouloit ſe ſervir des Séries pour les racines, lorſqu'on ſeroit en état de les exprimer en termes finis. En un mot les Séries ne doivent être employées que dans la dernière néceſſité, lorſque les Règles ne ſont pas applicables.

Pag. 19. *Or* p *eſt une quantité donnée quelconque, qui peut répréſenter &c.*

Il falloit dire que p eſt une quantité conſtante, qui, dans les exemples n'eſt pas toûjours donnée, mais ſouvent il faut de l'adreſſe pour la trouver.

Ibid. *Dans les Intégrales nous nous ſervons des Séries infinies, lorſque nous ne pouvons pas les trouver exactement.*

C'eſt ce que j'ai dit; pourquoi donc recourir toûjours aux Séries, avant que de ſavoir ſi les intégrales ne peuvent pas être exprimées en termes finis?

Ibid.

Ibid. *Quand les expressions différentielles ne sont point mêlées de quantités constantes*, &c.

Ajoutez, & que les coëfficiens sont toujours égaux.

Pag. 20. *Par exemple* 2xdy &c.

Il veut écrire, je crois, $2xdx$, car $2xdy$ étant une différentielle incomplette, n'est pas intégrable; c'est sans-doute une faute d'impression.

Pag. 21 in fine & 22 in initio. *Enfin l'intégrale de* $\frac{1}{x}dx = 1x^{-1}dx$, *sera* $\frac{1}{0}x^0 = \frac{1}{0} = \infty$.

Ainsi, selon Mr. STONE, $\int \frac{1}{x} dx$ seroit égal à une quantité véritablement infinie, au lieu qu'elle est égale au Logarithme de x. Ne sait-il donc pas que cette infinité apparente marque seulement que l'intégrale n'est pas algébrique.

Pag. 30. *Je vais... ajouter un mot sur l'excellente méthode de feu Mr.* COTES &c.

Nôtre compilateur n'a garde de dire, que j'ai publié dans les *Actes* de *Leipsic* le plus essentiel de cette excellente méthode, trois ans avant que le Livre de Mr. COTES fut rendu public; & cela sur le defi que Mr. TAYLOR m'adressa: Voiez N°. CXIV, pag. 402, *Tom.* II.

Pag. 66. *Quarrer l'éspace cycloidal.* &c.

Quel abus des Séries! On trouve bien l'aire sans elles, & même très-simplement sans calcul.

Pag. 68. *Par une autre proprieté de la courbe* [cissoïdale]

Mr. STONE ne donne, par cette maniere, que l'espace total asymtotique de la Cissoïde; mais nullement de chaque partie APM. Voici comment je le trouve généralement. Soit C le centre du cercle, soit aussi tiré le rayon CN & la corde AN; & je nomme le rayon $CA = r$, & partant le diamétre $AB = 2r$: L'équation de la Cissoïde sera donc $2ryy - xyy = x^3$; par conséquent $y = \sqrt{x^3} : \sqrt{(2r - x)} = xx : \sqrt{(2rx - xx)}$, & l'élément de l'espace cherché PMm, ou $ydx = xxdx : \sqrt{(2rx - xx)}$. Pour intégrer cela par la quadrature du cercle, je dispose cette quan-

TAB. LXXXI. N°. CLXX. *Fig.* 1.

quantité, en y ajoutant & retranchant, pour la rendre dépendante du cercle par parties, où il y en aura une d'abſolument intégrable. Voici le calcul. $\frac{xxdx}{\sqrt{(2rx-xx)}} = \frac{(-2rx+xx)dx}{\sqrt{(2rx-xx)}} + \frac{2rxdx}{\sqrt{(2rx-xx)}} = -dx\sqrt{(2rx-xx)} + \frac{2rxdx}{\sqrt{(2rx-xx)}} = -dx \sqrt{(2rx-xx)} - \frac{(2rr-2rx)dx}{\sqrt{(2rx-xx)}} + \frac{2rrdx}{\sqrt{(2rx-xx)}}$. Or il eſt viſible que le premier terme $-dx\sqrt{(2rx-xx)}$ eſt la différentielle du ſegment ANP, le ſecond terme eſt la differentielle de $\sqrt{(2rx-xx)}$, ou de PN, multiplié, par $2r$, & le troiſiéme terme eſt la différentielle de l'arc AN multiplié par $2r$. Ainſi j'aurai l'aire APM ou $\int y dx$, ou $\int(xxdx: \sqrt{(2rx-xx)})$ $=$ ANP $-$ PN $\times 2r +$ l'arc AN $\times 2r$. Mais PN $\times 2r$ fait quatre fois le triangle rectiligne ANC, & l'arc AN $\times 2r$ fait quatre fois le ſecteur circulaire ANC; retranchez donc celui-là de celui-ci, il vous reſtera quatre fois le ſegment ANA Donc APM, ou $\int y dx = 4$ ſegm. ANA — demi-ſegm. ANP. Or le demi-ſegment ANP eſt égal au petit ſegment ANA + le triangle rectiligne ANP. Donc enfin l'aire ciſſoïdale APM eſt égale à 4 ſegm. ANA — 1 ſegm. ANA — triang. rectil. ANP, c'eſt-à-dire $= 3$ ſegm. ANA — triang. rectil. ANP. Ce qu'il falloit trouver.

Coroll. 1. Prenant x, ou AP $= 2r$, ou AB; le triangle rectiligne ANP s'évanouit; parce que ſa hauteur PN eſt nulle au point B; & le ſegment ANA dégénère en demi-cercle ANBA. Donc l'aire totale de l'eſpace ciſſoïdal eſt triple du demi-cercle générateur ANBA: cas unique, qui ſe trouve dans notre Auteur.

Coroll. 2. Si le point P eſt fort près de A, l'arc AN ſera comme une Parabole naiſſante, & partant le triangle rectiligne ANP ſera juſtement triple du petit ſegment ANA, parce que celui-là fait la moitié du rectangle circonſcrit, & celui-ci en fait la ſixiéme, par la nature de la Parabole. Ainſi donc l'aire naiſſante APM ſera $= 0$, c'eſt-à-dire, infiniment plus petite que le triangle infiniment petit APN, ou que le ſegment

ment infiniment petit ANA. D'où il suit que la Courbe AM coincide au commencement avec la droite AB, c'est-à-dire, qu'elles se touchent au point A; tout comme l'équation de la courbe l'indique. Car il s'ensuit, qu'au commencement on a $2ryy = x^3$, & partant $2r : x = xx : yy$. Donc $2r$ surpassant infiniment x, aussi xx surpassera infiniment yy. Donc AB touche la courbe au point A.

Pag. 70. Exemple XX. *Quarrer un espace quelconque ACMP de la Quadratrice &c.*

Il y a diverses faussetés dans cette solution, car à la page 71, il n'est pas vrai que le sinus em soit $= 1 + x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$, &c. Ce qui est évident, puisque si x, ou AP, ou Cm, est $= 0$, son sinus em sera aussi $= 0$. Or dans ce cas la Série deviendroit $= 1$; comment donc peut-elle être $= 0$? Il faut donc savoir que $em = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$ &c. Le Calcul bâti sur cette fausse position sera donc aussi faux. Mais dans l'Analogie qu'il fait peu après, il redresse, sans le savoir, son erreur, par une fausse opération; ainsi par une double erreur, il tombe par hazard sur la véritable valeur de ydx. Avec tout cela il ne donne pas la quadrature par une expression finie, comme nous en pouvons donner une, quoique les Logarithmes y entrent.

Pag. 79. *Trouver la longueur de la Spirale reciproque.*

Ni Mr. COTES, ni Mr. STONE n'ont point songé à cette courbe & à ses proprietés avant moi †.

Pag. 103. *Ainsi* $\frac{p}{r}x\,dx\,\sqrt{(ax - xx)}$ *sera l'élement du solide formé par ce mouvement* [de la Cissoïde autour de sa base] *qui est égal à l'élement du premier solide qu'il faloit cuber ou mesurer. Donc le solide cissoidal infini, formé suivant la révolution qui vient d'être dite, est égal au dernier solide formé par la révolution du demi-cercle générateur, autour d'une ligne droite parallèle à son asymtote, passant par le point* A.

† Voiés N°. XC, pag. 552. seqq. *Tom. I.*

Il eſt très-vrai que ces deux ſolides totaux ſont égaux ; mais il eſt ridicule de ne pas conclure généralement, que le ſolide ciſſoïdal, formé par la révolution d'une portion quelconque APM autour de l'aſymtote, eſt toûjours égal à l'autre ſolide formé par la révolution du ſegment circulaire APN autour d'une droite paſſant par A, & parallèle à l'aſymtote BH. La raiſon en eſt manifeſte, de ce que, par la nature de la Ciſſoïde, on a toujours $BP \times PM = AP \times PN$.

Pag. 106. $\frac{p}{12ar} \times (4yy + aa)^{3:2} =$ *à l'Intégrale de l'élement de la ſuperficie du Conoide parabolique.*

Mais en faiſant PM, ou $y = 0$, auquel cas la ſuperficie du Conoide devient nulle, l'expreſſion trouvée ſe change en $\frac{p}{12ar} \times (aa)^{3:2}$, ou en $\frac{p}{12r} aa$; ainſi la veritable intégrale ſera $\frac{p}{12ar} (4yy + aa)^{3:2} - \frac{p}{12r} aa$.

Pag. 107. *Donnera...* $\frac{pady}{rbb} \sqrt{(b^4 + ccyy)}$, *quand AC ſurpaſſe BC ; mais quand AC eſt moindre que BC, elle eſt* $\frac{pady}{rbb} \sqrt{(b^4 - ccyy)}$.

C'eſt-à-dire, que dans un Sphéroïde applati, ſa ſurface dépend de la quadrature de l'Hyperbole ; mais pour le Sphéroïde allongé, ſa ſurface dépend de la quadrature du Cercle. Qu'eſt-il donc beſoin de tant conſulter les Tables de Mr. COTES ?

Pag. 118. *Quand la Courbe* [la Ciſſoïde] *fait ſa révolution autour de la Baſe AB, Mr.* COTES *dans ſa* Harmonia Menſurarum, *donne la quantité de la ſuperficie formée. Mais l'opération eſt longue & difficile, les différentielles ne pouvant ſe rapporter directement à aucune de ſes Tables.*

Ainſi Mr. STONE avouë ſincèrement, qu'il eſt difficile de trouver la quantité de la ſuperficie en queſtion, puiſque la choſe ne peut ſe rapporter directement aux Tables de COTES.

Voici

Voici ce que je trouve par ma méthode d'intégrer. Soit dans la Fig. AMI la Cissoïde, le diamétre du Cercle générateur, ou la base AB$=a$, une abscisse AP$=x$, l'appliquée PM$=y$, l'arc de la Cissoïde $=s$; la raison du raion à la circonférence, comme r est à p. Ainsi l'aire de la superficie que décrit l'arc AM, par sa révolution autour de AP, sera $=\frac{p}{r}\int y\,ds$; il s'agit donc de trouver $\int y\,ds$, ou l'intégrale de $y\,ds$, par une expression qui ne contienne que a & x & leurs fonctions. Or je trouve, par ma dite méthode, que $\int y\,ds=\frac{(2aa-ax)\sqrt{(4ax-3xx)}}{2a-2x}$ $-\int\frac{2aa\,dx}{\sqrt{(4ax-3xx)}}$. Mais il est clair que $\int\frac{2aa\,dx}{\sqrt{(4ax-3xx)}}$ est égal à un secteur circulaire, que l'on construit facilement; & le prémier terme est une quantité purement algébrique. TAB. LXXXI. N°. CLXX. *Fig. 1.*

Pag. 122. Exemple 6. *Le centre de gravité est dans le rayon* AD, *qui coupe l'arc* BE.

Ajoutez, en parties égales.

Pag. 127. r *étant le demi-paramétre.*

Il faut que r soit le paramétre entier, pour que $\frac{1}{2}px\,dx$ soit la différentielle des poids, & que $\frac{1}{2}pxx\,dx$ soit celle des efforts.

Pag. 129. Exemple 13. *D'où il suit que* $3a+8b:4a+12b=a:\frac{3aa+8ab}{4a+12b}$.

Il faut renverser les deux premiers termes, en faisant $4a+12b:3a+8b=a:\frac{3aa+8ab}{4a+12b}$.

Ibid. *Exemple* 14.

Beaucoup de confusion régne dans cette solution; il seroit bien facile de la redresser; mais il ne vaut pas la peine de perdre le tems, en faisant le calcul de ces choses si triviales.

Ibid. *Exemple* 15. *Alors quand* PC *devient* x, *la différentielle des poids sera* $\frac{pyydx}{2r}$.

Que veut dire, alors quand PC devient x? La différen-

tielle des poids ne ſera-t-elle pas également $\frac{pyydx}{2r}$, ſans que PC devienne *x*.

Pag. 131. Définition. *Le Centre de* percuſſion *ou d'*oſcillation *d'une figure &c.*

La Definition que donne Mr. STONE du *Centre de percuſſion*, donne une fauſſe idée de ce centre; car d'abord il ſuppoſe, ſans le démontrer, que le Centre de percuſſion & celui d'oſcillation ſont un même point; c'eſt en quoi il ſuit l'exemple de ſon Compatriote Mr. WALLIS, qui ne pouvant trouver la méthode de déterminer le Centre d'oſcillation, & voyant cependant que la règle de Mr. HUGUENS donnoit, en certains cas, le Centre d'oſcillation, au même point que lui WALLIS avoit aſſigné au Centre de percuſſion; il conclut d'abord, que ces deux Centres étoient un même point; & prétendit avoir été le premier Inventeur [par conſéquent avant Mr. HUGUENS] de la Théorie du Centre d'oſcillation. Mais pour faire voir qu'il n'y a aucune connexion néceſſaire, ni eſſentielle, entre ces deux Centres; il n'y a qu'à conſidérer ces deux choſes: 1°. La nature du Centre d'oſcillation dépend entiérement de la nature & de l'action de la peſanteur; au lieu que dans la Théorie du Centre de percuſſion, la peſanteur n'entre aucunement en conſidération, mais ſeulement la matiére & la viteſſe, quoique uniforme, de ſes parties: de-là il arrive, qu'un Pendule composé de pluſieurs corps de différentes denſités, agité dans l'air, a ſon Centre d'oſcillation différent de celui qu'il auroit, s'il étoit agité dans une liqueur, par exemple dans l'eau. Mais le Centre de percuſſion ſera le même dans l'air & dans l'eau. 2°. Au contraire, ſi les corps ſe meuvent dans un même milieu, le Centre d'oſcillation eſt quelque choſe d'abſolu & indépendant de toute rélation; au lieu que le Centre de percuſſion varie ſelon la diverſité de ſituation du corps choqué, enſorte qu'il y a une mutuelle dépendance entre les corps choquans & choqués.

P. 136.

Pag. 132. 133. 134. 135. Contenant les six premiers Exemples.

Ces six prémiers Exemples donnent bien la bonne solution, parce qu'ils sont justement dans le cas où la fausse méthode de Mr. STONE, ou plutot de WALLIS, s'accorde, par accident, avec la vraye méthode; ce qui arrive toutes les fois que 1°. la figure qui choque est plane, 2°. qu'elle se meut autour d'un axe situé dans son plan, & 3°. qu'outre cela, la ligne frappante est aussi dans ce même plan. J'apelle *ligne frappante*, la ligne droite, passant par le centre du mouvement, laquelle étant parvenue au point choqué, toute la figure s'arrête subitement sur le point choqué. Ainsi si une seule de ces trois conditions manque, la prétendue méthode s'en va en fumée, & ne donne que de fausses solutions.

Pag. 136. 137. 138. Contenant les six derniers Exemples.

Ces six autres exemples sont résolus faussement en plusieurs maniéres. Car 1°. on ne fait point d'attention à la ligne frappante. 2°. On prend tacitement, pag. 137, l. 5, & suiv. le côté du Cylindre pour la ligne frappante; auquel cas le Centre de percussion ne seroit plus le même que le Centre d'oscillation, car celui-ci est toûjours dans l'axe du Cylindre. 3°. Quand même on prendroit l'axe du Cylindre, & des autres figures qu'on considére, pour la ligne frappante, le prétendu Centre de percussion ne coincideroit pas avec le Centre d'oscillation; vû que Mr. HUGUENS trouve le Centre d'oscillation dans toutes ces figures solides, choisies par Mr. STONE pour exemples, plus éloigné du point de suspension, que ne le donne Mr. STONE. Cela vient de ce que Mr. STONE supose faussement, que toutes les particules d'une tranche différentielle de la figure solide, ont une même vitesse; ce qui est absolument faux: vû qu'il est visible, que les points plus éloignés du centre d'une tranche, sont aussi plus éloignés du point de suspension, que les points plus proches du centre; par conséquent que ces points-là auront aussi plus de vitesse.

Comment peut-il donc considérer chaque tranche circulaire, comme ayant une vitesse égale dans toute son étendue?

Nôtre Auteur auroit mieux fait de supprimer entiérement sa Section 7e. dont la matiére paroit être hors de sa sphére.

Pag. 139. Probléme 1er. *L'intégrale de chaque membre sera* $x = y$. *D'où il suit que la ligne cherchée est l'hypothénuse d'un triangle rectangle, en regardant comme son axe la ligne coupant en deux cet angle droit.*

1°. Non seulement $x = y$, mais aussi $x \pm a = y$, satisfait au Probléme. 2°. Je n'entends pas ce galimatias qu'on ajoûte, *en regardant comme son axe la ligne coupant en deux cet angle droit.* Est-ce que par son axe on veut entendre la ligne où sont prises les abscisses x? Si cela est, cet axe sera la base du triangle rectangle, & par conséquent ne coupera pas en deux l'angle droit. 3°. La ligne cherchée est à la vérité l'hypothénuse d'un triangle rectangle isoscéle, mais non pas d'un triangle rectangle quelconque, comme Mr. STONE s'explique.

Ibid. Probléme 2e. $adx = 2ydy$, *& trouvant l'intégrale de chaque membre, on aura* $ax = yy$, *ainsi la courbe sera la Parabole d'*APOLLONIUS.

Cela est vrai; mais il falloit intégrer plus généralement, en mettant $ax \pm ab = yy$; quoique cela donne encore la Parabole, il y a des cas, où ajoutant ou retranchant une quantité constante aux intégrales, cela change tout-à-fait la nature de la courbe. Comme, par exemple, $aaxdx = bbydy$; en intégrant à la maniére de Mr. STONE, on trouveroit $aaxx = bbyy$ c'est-à-dire, $ax = by$; ce qui donneroit une ligne droite pour la ligne cherchée; mais on se tromperoit, si on vouloit conclure qu'il n'y auroit point d'autre ligne qui satisfit à l'équation différentielle $aaxdx = bbydy$; puisque la courbe, qui auroit pour équation $aaxx \pm abcc = bbyy$, & qui seroit une Hyperbole, satisferoit aussi à la question.

Pag. 240. Probléme 3e..... $2ax - xx = yy$.

Au lieu de $2ax - xx = yy$, on devroit écrire, par la raison susdite, $2ax - xx = yy \pm ab$.

Ibid.

Ibid. Probléme 4e. *Ainsi* $dx = \frac{ady}{y}$, &c.

A quoi bon tout ce discours ? Ne pouvoit-on pas dire tout-court, que la courbe cherchée est la Logarithmique ordinaire, dont les x, ou les abscisses, sont prises sur l'asymtote, & les y, ou les ordonnées, sont les perpendiculaires sur l'asymtote.

P. 142. Scholie 2e. *Les nombres* $z - 1$ *&* $z + 1$ *seront égaux* &c.

Quelle obscurité dans ce Scholie ! Les nombres $z - 1$ & $z + 1$ ne différent-ils pas de deux unités, comment donc peuvent-ils être égaux ?

Ibid. Probléme 6e. *Si un corps descend librement du point A, par le seul effet de la pesanteur, le long de deux plans inclinés AB, AC, aux points B & C ; on demande la proportion des tems qu'il faut pour décrire ces espaces ?* TAB. LXXXI. No. CLXX. *Fig.* 2.

Tout le discours que fait Mr. STONE pour résoudre ce chétif Probléme, est un tissu continu de Paralogismes, qui montrent évidemment qu'il n'a pas une idée nette de la Méchanique, Dynamique, Ballistique, & de ce qui en dépend. Voyons quelques traits de ses raisonnemens contradictoires. Il supose deux plans AB & AC donnés de position; il prend AD & AE [en les nommant a & b] pour invariables; cependant il regarde DB & EC [qu'il nomme x & z] comme variables. N'est-ce pas une manifeste contradiction ? puisque si AB & AC sont données de position, & AD & AE de grandeur, sans-doute DB & EC seront aussi données de grandeurs. Il dit que $xdx : \sqrt{(aa + xx)} = Bb$, & $zdz : \sqrt{(bb + zz)} = Cc$; ce qui est très-absurde : car le premier $xdx : \sqrt{(aa + xx)}$ marque la différentielle de la sécante de l'angle BAD, prenant AD pour le rayon; & l'autre $zdz : \sqrt{(bb + zz)}$ n'est autre chose que la différentielle de la sécante de l'angle CAE, prenant AE pour le rayon.

A la fin de la page 142, & au commencement de la p. 143, il dit, *les vitesses décrivant les petites parties* Bb, Cc, *étant regardées comme égales, qui sont proportionnelles aux* $\sqrt{AD}$ [$\sqrt{a}$]

&c.

& a $\sqrt{AE}$ [$\sqrt{b}$]. Quelle étrange façon de parler ! Les vitesses décrivant &c. Ce sont les mobiles qui décrivent avec les vitesses ; les vitesses ne décrivent pas ; & ces vitesses, comment peuvent-elles être égales, puisqu'elles sont proportionnelles aux $\sqrt{AD}$ & $\sqrt{AE}$, qui sont inégales. Tout ce qui suit dans ce discours est un jargon inintelligible : Les Tables de Mr. COTES y entrent sans nécessité. Les Règles de GALILE'E montrent immédiatement que le tems par AB est au tems par AC, comme la racine quarrée de la troisiéme proportionelle de AE à AC. A quoi sert-il donc, le long & pénible raisonnement de notre Auteur ?

Pag. 143. Probléme 7e. *Trouver la nature de la courbe BC, telle qu'un corps tombant.... parcourra en descendant en tems égaux des espaces égaux.*

Au lieu de dire des espaces égaux, il veut dire sans-doute des hauteurs verticales égales : car les espaces à parcourir sont les arcs de la courbe : or ces arcs parcourus en tems égaux, ne peuvent pas être égaux eux-mêmes, à cause de l'accéleration ; étant visible que plus le mobile est descendu, plus il aura de vitesse, & parcourra par conséquent un plus grand arc dans un tems donné. Ce Probléme au-reste fut proposé par Mr. LEIBNITZ sous le nom de la Courbe Isochrone, & il fut résolu par plusieurs personnes, il y a bien 50 ans. Si Mr. STONE a voulu montrer son habileté, il devoit donner la solution du Probléme de l'Isochrone paracentrique, que j'ai résolu & publié l'an 1694. *

P. 145. Probléme 8e. *Trouver la Loi de réfraction, en admettant ce principe que la nature suit dans ses opérations les voies les plus simples & les plus courtes.*

Ce Probléme apartient purement & simplement au Calcul Différentiel; aussi se trouve-t-il dans l'*Analyse des infiniment petits*, qu'on attribue à Mr. de l'HOPITAL, où il ne s'agit que du Calcul Différentiel : Que fait-il donc ici, où on prétend traiter du Calcul Intégral ? Mais au-reste, suivant le Principe qu'on adopte ici, il faudroit que le rayon de lumiére allât

* N°. XIX, pag. 119. *Tom. I.*

lât plus vite dans les milieux moins denses : cependant on montre, par des vrais principes physiques, que c'est tout le contraire, & selon Mr. NEWTON même.

Pag. 146. Probléme 9e. *Trouver l'angle &c.*

Ce Probléme aussi, [à-peine digne d'être proposé aux commençants] qu'a-t-il à faire dans un traité du Calcul Intégral ?

Ibid. Probléme 10e. *Si un fluide* &c.

Ce Probléme, quoique un peu plus difficile, n'apartient pas non plus au Calcul Intégral.

Pag. 147, vers la fin. *Donc* $xx + \frac{bb}{aa} x = bb$. *Ainsi* $x = \frac{b}{a} \sqrt{(bb + xx)} - \frac{bb}{2a}$.

Que veut dire cela, que dans la valeur de x on fasse entrer son quarré xx ? On devroit écrire $x = \frac{b}{2a} \sqrt{(bb+4aa)} - \frac{bb}{2a}$.

Pag. 148. *Coupés BC* [b] *en G*, &c.

Il veut dire qu'on doit couper BC en deux parties égales. Pourquoi parler si inexactement ?

Ibid. sur la fin. *Par conséquent* $dx = \frac{2\sqrt{a}.\,Nn}{2b}$. *Maintenant quand l'intégrale de* dx, *savoir* x, &c.

Tout ce qui suit, jusques-à la fin de la solution, est tout-à-fait superflu. Car après avoir trouvé $dx = 2\sqrt{a}.\,Nn : 2b$, ne pouvoit-il pas conclure d'abord, donc $x = 2\sqrt{a}.\ HNB : 2b = 2\sqrt{a}.\ HNB : 2HB = ASB : 2\sqrt{AB}$ = quantité constante. Donc &c.

Pag. 149. Probléme 12e. *La ligne Loxodromique & la différence de Latitude de deux endroits étant données, trouver la différence de Longitude.*

On propose ce Probléme en général pour deux endroits quelconques : cependant la solution qu'on donne ne sert que pour un cas particulier. Car on supose qu'un des deux endroits est dans l'équateur. Ainsi la solution ne satisfait point, lorsque les deux lieux donnés sont hors de l'équateur.

Pag. 150. *Il viendra* $dx = \frac{madr}{zz} = \frac{madr}{aa - rr}$; *& prenant les intégrales, on aura* $BA[x] = m \times (\frac{r}{a} + \frac{r^3}{3a^3} + \frac{r^5}{5a^5} + \frac{r^7}{7a^7} + \&c.)$ *= à la différence des Longitudes des lieux A & C.*

Qu'est-il besoin de recourir à des Séries infinies, lorsqu'on peut donner l'intégrale par une expression finie, claire, & élégante, que l'on peut construire facilement par les Logarithmes, ou moyennant la Logarithmique. Voici comment. $\frac{madr}{aa - rr} = \frac{\frac{1}{2}mdr}{a+r} + \frac{\frac{1}{2}mdr}{a-r}$. Donc $\int\frac{madr}{aa-rr} = \int\frac{\frac{1}{2}mdr}{a+r} + \int\frac{\frac{1}{2}mdr}{a-r}$. Or $\int\frac{\frac{1}{2}mdr}{a+r} = \frac{1}{2}ml(a+r)$, & $\int\frac{\frac{1}{2}mdr}{a-r} = -\frac{1}{2}ml(a-r)$: par conséquent $\int\frac{madr}{aa-rr} = \frac{1}{2}ml\frac{a+r}{a-r}$, suivant le calcul exponentiel. Nous n'avons donc que faire, ni de Séries, ni de la méthode de Mr. COTES. Voici maintenant ma solution générale, pour deux lieux donnés quelconques, que j'ai écrite, il y a plus de 30 ans, derriere mes Tables des Sinus & des Logarithmes, en ces termes latins. *Esto radius sphæra* = a, *sinus totus* = c = 10000000; *differentia Longitudinum duorum locorum, secundum æquatorem sumta* = b, *tangens semi-distantiæ loci unius a polo proximo* = m, *tangens semi-distantiæ alterius loci ab eodem polo* = n, *& tangens inclinationis rhumbi ad quemlibet meridianum* = p: *subtangens Logarithmicæ ad Tabulas usitatas Logarithmorum accommodata, ut calculus docet,* = 4342945. *Dico fore* $p = \frac{4342945bc}{(lm - ln)a}$.

Pag. 151. Corollaire. *D'où on tire PB* (a): Cc = cd (dy): Cc (du) *Donc &c.*

Quel plaisant calcul fait-on ici; pour trouver une chose qui saute aux yeux, sans calcul. On compare dans cette prétendue analogie PB, qui est une ligne finie, à C*c*, qui est infiniment petite, & on fait cette raison égale à la raison de *cd* à C*c*, qui est une raison finie. Comment dont peut elle être.

être égale à la premiere raiſon, qui eſt infinie ? Ne pouvoit-on pas dire tout-court : Puiſque *c*d eſt à C*c* en raiſon conſtante donnée, donc auſſi l'intégrale de *c*d, c'eſt-à-dire AD, différence de Latitude, eſt à l'intégrale de C*c*, qui eſt AC, longueur de la Loxodromique, comme *c*d eſt à *c*C, ou comme le rayon eſt à la ſécante de la ligne Loxodromique ?

Ibid. Probléme 13, à la fin du ſecond paragraphe, *AF* [a] : *Ff* $[\frac{adz}{y}] = AQ[\frac{ab}{z} - a] : Qs = \frac{abdz}{zy} - adz$; *de la même maniere* $Pn = \frac{abdz}{zy} + adz$.

Il faloit dire, en vertu de cette analogie, que $Qs = \frac{abdz}{zy} - \frac{adz}{y}$, & que $Pn = \frac{abdz}{zy} + \frac{adz}{y}$.

Pag. 152. lign. 6. $(\frac{by}{z} + y) \times (\frac{by}{z} + y)$.

Au lieu de cela il faut écrire $(\frac{by}{z} + y) \times (\frac{abdz}{zy} + \frac{adz}{y})$.

Ibid. lign. 7 & 8, *& l'élement de ces deux différentielles ſera* $= \frac{p}{r} \times (\frac{2aabbdz}{zz} + \frac{2}{3}aadz) =$ *à la différence de la ſomme des deux ſolides produits par les eſpaces* cQGB, BGPC.

Il n'eſt pas vrai que l'élement de ces differentielles ſoit $= \frac{p}{r} \times (\frac{2aabbdz}{zz} + \frac{2}{3}aadz)$; car il eſt $= \frac{p}{r} \times (\frac{2aab^2dz}{z^3} + \frac{2aabdz}{z})$; mais on veut dire que la différence de ces deux differentielles eſt $= \frac{p}{r} \times (\frac{2aabbdz}{zz} + \frac{2}{3}aadz)$.

Ibid. lign. 11. *eſt la differentielle de la* $\frac{1}{2}$ *de la ſomme, dont l'intégrale ſera* &c.

Je ne vois pas pourquoi Mr. STONE veut ſeulement la moitié de l'intégrale, pour avoir le ſolide ; il me ſemble qu'il faut l'intégrale entiere $\frac{p}{r} \times (\frac{2aabb}{z} - \frac{2}{3}aaz)$; ou plutôt [car il

 n'ob-

n'obſerve pas les ſignes] $\frac{p}{r} \times (-\frac{2aabb}{z} + \frac{2}{3}azz)$: Par cette raiſon, il faudroit changer les nombres dans tout le reſte qui ſuit, & écrire finalement $\frac{p}{r} \times \frac{-2aabbx - \frac{2}{3}a^3x + \frac{2}{3}aaxx}{a - x}$. Pour ce qui eſt des ſignes; il faut peut-être les laiſſer, comme ils ſont dans le Livre, mais c'eſt de plus haut qu'il faut commencer à examiner le calcul.

Pag. 153. 154. Juſqu'à la fin.

On ne ſauroit prendre la peine d'examiner tout ce long raiſonnement, après que nous en avons aſſez pris pour examiner tout ce qui précéde : quoiqu'il en ſoit, on feroit le calcul beaucoup plus aiſément, en ſuivant nôtre route.

Pag. 155. Probléme 14. *Trouver la nature d'une courbe AMC, telle que ſi on conçoit une vaſe formé par ſa révolution.... rempli d'eau, qu'on ſuppoſera couler par un petit trou rond, percé dans le fond..... la ſurface de l'eau deſcende par des eſpaces égaux en tems égaux; ſuppoſant que la viteſſe de l'eau qui ſort par le trou, ſoit comme la racine quarrée de la hauteur de l'eau au deſſus du trou.*

Ce Problême eſt purement algébrique, ne demandant ni à différentier, ni à integrer; car pour que la ſurface deſcende par des eſpaces égaux en temps égaux, il faut que ſa viteſſe ſoit uniforme. Or la ſurface de l'eau eſt à la ſurface du trou, reciproquement comme la viteſſe par le trou eſt à la viteſſe de la deſcente de la ſurface, c'eſt-à-dire $yy : b = \sqrt{ax} : \frac{b\sqrt{ax}}{yy}$. Ainſi $b\sqrt{ax} : yy$ ſera la viteſſe de la ſurface; laquelle devra être uniforme, & partant conſtante: faiſant donc $b\sqrt{ax} : yy = c$, cela nous donnera $abbx = ccy^4$, ou $abbx : cc = y^4$; qui eſt pour la Parabole quarrée-quarrée.

Mais la ſuppoſition que l'on fait, ſavoir que la viteſſe de l'eau par le trou ſoit comme la racine quarrée de la hauteur de l'eau au deſſus du trou, eſt fauſſe; n'ayant lieu que quand le trou ſeroit infiniment petit: ce qu'on ne peut pas ſuppoſer ici: autrement la ſurface de l'eau ne deſcendroit ſenſiblement

qu'en

qu'en un tems infini. La véritable solution de ce Probléme, & de tous les autres sur le mouvement des eaux, n'a encore été publiée par personne, ni même par Mr. NEWTON; & tout ce que l'on en a sont de purs paralogismes: Nous en donnerons avec le tems la véritable Théorie. *

Pag. 155. Probléme 15. *Si AC est une ligne horizontale, sur le point C de laquelle est elevé un Parallelépipede CD, dont une des surfaces soit perpendiculaire à la ligne AC: il s'agit de trouver l'angle CAB sur le point A, duquel angle supposant posée l'extrémité A d'un long solide AB; de maniere qu'avec son autre extremité B, il vienne presser le Parallelèpipede CD, ce solide comprimera perpendiculairement CD avec plus de force au point A, qu'en tout autre point.* TAB. LXXXI. N°. CLXX. Fig. 3.

Si l'énoncé de ce Probléme, qui appartient seulement au Calcul direct Différentiel est obscur, la Solution ne l'est pas moins. Si je le conjecture bien, je crois qu'on demande la position du corps pesant AB, entre la verticale CD & l'horizontale CA, qui soit telle que la verticale CD souffre le plus de force, pour être pressée en arriére dans la direction horizontale.

SOLUTION.

Soit le poids du corps, ramassé au centre de gravité F, nommé p; AF, b; AB. a; BC, x. Ce poids p agissant suivant la direction verticale FE, il faut décomposer la force en FI & IE. Celle de FI est soutenuë par l'obstacle mis en A, & l'autre suivant IE fait effort pour tourner le levier AB autour de A, mais elle est empêchée par l'opposition du plan CD. Ainsi cet effort appliqué en F est $= \frac{EI}{EF} p = \frac{AC}{AB} p = \frac{p\sqrt{(aa-xx)}}{a}$. Et le moment de cet effort en F $= p.$ AF. $\sqrt{(aa-xx)} : a = pb\sqrt{(aa-xx)} : a$. Faisant maintenant AB : AF $= \frac{pb\sqrt{(aa-xx)}}{a} : \frac{pbb\sqrt{(aa-xx)}}{aa}$ $=$ à la force avec laquelle le plan CD est poussé suivant HB: il.

Hh 3

* Voiés N°. CLXXXVI.

il faut la decompoſer en HG & GB: celle-ci pouſſe CD de haut en bas, mais l'autre ſuivant HG, ſera perpendiculaire à CD, & ſera $= pbbx\sqrt{(aa - xx)} : a^3$; c'eſt donc de celle-ci, ou ſimplement de $x\sqrt{(aa - xx)}$, qu'il faut faire le *maximum*, & non pas de $xx\sqrt{(aa - xx)}$; comme le pretend Mr. STONE. Si on fait le calcul, on trouvera que $x = a\sqrt{\frac{1}{2}}$, & partant que l'angle CAB ſera demi-droit, ou de 45°.

Pag. 156. Probléme 16. *Trouver &c.* [la courbe de la plus vite deſcente].

Notre Auteur ne dit pas que je ſuis le premier qui ait réſolu & propoſé ce Probléme, & moins encore dit-il que la Solution qu'il a donnée eſt priſe de mon Frere. Pour cacher ſon plagiat, il croit être à couvert & deguiſer la méthode de mon Frére, en employant d'autres lettres, & en ſe ſervant d'autres façons d'exprimer la choſe; comme, par exemple, lorſqu'il dit (pag. 157, vers la fin) *la difference de la courbe eſt toûjours comme* $dx : y^{\frac{1}{2}}$, *c'eſt-à-dire en raiſon directe de la difference de l'abſciſſe AH* [x], *& en raiſon reciproque & ſouſdoublée de l'ordonnée HE* [y]. Au lieu que mon Frére avoit dit ſimplement, que la nature de la courbe conſiſte en ce que $dx : \sqrt{y}.\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ doit être conſtant, ou $= 1 : \sqrt{a}$.

Pag. 157. *On trouvera, que la courbe qui a cette proprieté* [de la plus vite deſcente] *eſt la Cycloïde, paſſant &c.*

Il ne ſuffit point de dire, *On trouvera*; il faloit faire voir en effet comme on le trouvera, & cela par une analyſe, & non pas *a poſteriori* par une demonſtration; parce que cela ſuppoſe qu'on ſait deja que c'eſt une Cycloïde. Il ne ſuffit pas non plus de dire que la Cycloïde paſſe par les deux points; il faloit de plus montrer par l'analyſe, que le point ſuperieur eſt néceſſairement au commencement de la Cycloïde renverſée.

Ibid. vers la fin, *On ſuppoſe* [les points] *A & B, poſés de façon, que* ACD *ſoit une demi-Cycloïde.*

Cette ſupoſition eſt puerile, en ce qu'elle reſtreint la Propoſition generale à un cas particulier; comme ſi le point inférieur donné B devoit néceſſairement être au ſommet de la Cycloïde

de renversée : au lieu qu'il peut être dans un endroit quelconque de la Cycloïde, tantôt au delà du sommet, tantôt en deçà, selon que le hazard l'a placé.

Pag. 158. $PQ[\sqrt{(ay - yy)}] : BP[\sqrt{(aa - yy)}] = CL [dx]$, $CE = \frac{dx\sqrt{(aa - yy)}}{\sqrt{(ay - yy)}} = \frac{dx.\sqrt{a}.\sqrt{(a - y)}}{\sqrt{y}.\sqrt{(a - y)}}. = \frac{dx.\sqrt{a}}{\sqrt{y}}$, *laquelle expression est comme* $\frac{dx}{y^{1:2}}$; $\sqrt{a}$ *étant donnée. Donc la Cycloïde &c.*

Quel honteux paralogisme, pour un Géometre tel que le nôtre ! Car il est faux que $\frac{dx\sqrt{(aa - yy)}}{\sqrt{(ay - yy)}}$ soit $= \frac{dx\sqrt{a}.\sqrt{(a - y)}}{\sqrt{y}.\sqrt{(a - y)}}$ Nous autres Géometres du commun, aurions fait $\frac{dx\sqrt{(aa - yy)}}{\sqrt{(ay - yy)}} = \frac{dx\sqrt{(a + y)}.\sqrt{(a - y)}}{\sqrt{y}.\sqrt{(a - y)}} = \frac{dx\sqrt{(a + y)}}{\sqrt{y}} = \frac{dx\sqrt{(a + y)}}{y^{1:2}}$.

Cependant il semble que Mr. STONE trouve, nonobstant son paralogisme, ce qu'il veut trouver, savoir $\frac{dx}{y^{1:2}}$ proportionel à la differentielle de la courbe : mais loin de-là, ce n'est que par accident qu'il le trouve, par une autre faute qu'il commet, & qui redresse la premiere. C'est qu'il fait $BP = \sqrt{(aa - yy)}$, au-lieu de faire $BP = \sqrt{(aa - ay)}$, étant moyenne proportionelle entre KB [a] & BA [$a - y$]. Ainsi pour corriger la double erreur de Mr. STONE ; il n'y-a qu'à écrire $\sqrt{(aa - ay)}$, en place de $\sqrt{(aa - yy)}$, qui se trouve deux fois dans la même ligne de la page 158.

Pag. 158. Probléme 17. *Trouver la nature &c.* [du Solide de moindre resistance].

Il examine ici le Solide rond de la moindre resistance. Mais, à la premiere inspection, je vois que tout ce qu'il y a de bon est qu'il a emprunté de moi la méthode. On le voit en confrontant sa Figure 81 avec la Figure apartenant à la piéce que j'ai publiée dans les *Actes de Leipsik, 1699* * au mois de *Novembre*, ou j'ai exposé la méthode & le fondement servant à résoudre le Pro-

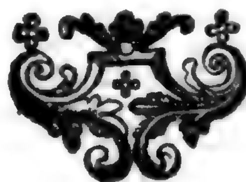
* N°. LIV. pag. 307, & N°. LVI. pag. 315, *Tom I.*

Probléme en question. Et pour ce qui est du calcul même, que Mr. STONE employe; il paroit entiérement copié de celui de feu Mr. *le Marquis de* L'HOSPITAL. Pour en être convaincu; il n'y-a qu'à lire la piéce de Mr. de L'HOSPITAL, qu'il donna dans la même année au mois d'*Août*. †

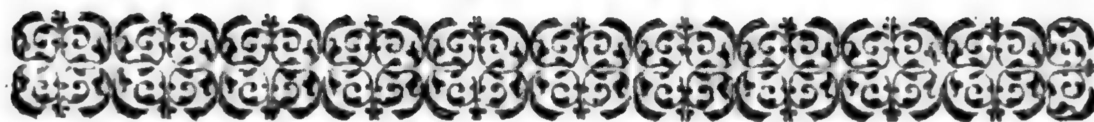
Pag. 161. Probléme 18. *Trouver l'angle ABC, que forme le plan d'une aile de moulin à vent*, &c.

Ce Probléme est un de ceux qui ne dépendent nullement du Calcul Intégral. Mr. STONE ne cite que Mr. MARIOTTE, qui l'a mal resolû, & Mr. PARENT, dont, à ce qu'il dit, il n'a point vû la Solution. Mais ne pouvoit-il pas aussi citer Monsieur HUGUENS qui l'a très bien résolu. De plus, ne pouvoit-il pas citer ma *Manœuvre des Vaisseaux* *. Car pag. 51, je donne une règle, pour déterminer l'angle que doit faire le gouvernail avec la quille, pour que le Vaisseau tourne le plus promptement qu'il est possible, qui est le même que celui que doit former l'aile du moulin à vent avec l'axe, pour faire tourner le moulin avec le plus de force qu'il soit possible.

† N° LV. pag. 311, *Tom. I.*
* N°. XCI. pag. 40, 41, *Tom. II.*



OPTICA



N°. CLXXI.

OPTICA.

****

I.

PROBLEMA OPTICUM.

Datis tribus objectis AB, CD, EF, inæqualium longitudinum, in eadem recta RS sitis, datisque intervallis BC, DE a se invicem sejunctis; invenire locum oculi O, ex quo tria ista objecta videat ejusdem magnitudinis apparentis.

SOLUTIO.

Ex puncto O intelligatur demissa perpendicularis OR, & dicantur $AB = a$, $CD = b$, $EF = c$: Item intervallum BC, quo distat objectum primum a secundo $= m$, & intervallum BE quo distat objectum primum a tertio $= n$. Sintque $OA = x$, $OB = y$, $OC = z$. Quia tres anguli AOB, COD, EOF debent esse æquales; erunt areæ triangulorum, ut $AO \times BO$, $CO \times DO$, $EO \times FO$. Sunt quoque, ob communem verticem O, ut bases AB, CD, EF. Attendamus primo ad duo priora triangula AOB, COD, ubi habebimus AB [a]: CD [b] $=$ AO $\times$ BO [xy]: CO $\times$ DO $= \frac{bxy}{a} = z \times$ OD; quare OD $= bxy : az$. Porro quia, addito communi angulo BOC, habetur AOC $=$ BOD, erit etiam AC [$a+m$]: BD [$b+m$] $=$ AO $\times$ CO [xz]: BO $\times$ DO $= \frac{b+m}{a+m} xz$; cum itaque BO sit $= y$, erit etiam OD $= (b+m)\, xz$: TAB. LXXXI. N°. CLXXI Fig. 1.

$(a+m)y$; adeoque $(b+m)xz : (a+m)y = bxy : az$; unde elicitur z, vel $OC = y\sqrt{((ab+bm) : (ab+am))}$. Et valore hoc substituto in $bxy : az = OD$, erit $OD = x\sqrt{((bb+bm) : (aa+am))}$.

Simili modo inveniuntur OE & OF, scribendo tantum c pro b, & n pro m; prodibitque $OE = y\sqrt{((ac+cn) : (ac+an)}$ & $OF = x\sqrt{((cc+cn) : (aa+an)}$.

Ut nunc habeantur duæ æquationes inter x & y, ad eorum valores determinandos; observo, quod $AR = (BO^2 - AO^2 - BA^2) : 2BA = (yy - xx - aa) : 2a$; adeoque $BR = (yy - xx - aa) : 2a + a = (yy - xx + aa) : 2a$. Sed & idem $BR = (CO^2 - BO^2 - CB^2) : 2CB = (byy - ayy) : (2ab + 2am) - \frac{1}{2}m$; unde emergit hæc prima æquatio $(yy - xx + aa) : 2a = (byy - ayy) : (2ab + 2am) - \frac{1}{2}m$.

Pari ratione $BR = (EO^2 - BO^2 - EB^2) : 2EB = (cyy - ayy) : (2ac + 2an) - \frac{1}{2}n$; unde hæc altera æquatio $(yy - xx + aa) : 2a = (cyy - ayy) : (2ac + 2an) - \frac{1}{2}n$. Æquatio prior dat $yy = (xx - aa - am) \times (b+m) : (a+m)$. Posterior vero dat $yy = (xx - aa - an) \times (c+n) : (a+n)$. Hinc igitur $(xx - aa - am) \times (b+m) : (a+m) = (xx - aa - an) \times (c+n) : (a+n)$. Brevitatis gratia ponatur $a+m = d$, $b+m = e$, $a+n = f$, $c+n = g$; Erit $(xx - ad)e : d = (xx - af)g : f$, hoc est $(exx - ade) : d = (gxx - afg) : f$; multiplicando per crucem $efxx - adef = dgxx - adfg$; ex cujus reductione invenitur $xx = (adfg - adef) : (dg - ef)$; hocque substituendo in alterutro valore ipsius yy [est enim perinde] provenit $yy = (aefg - adeg) : (dg - ef)$. Ergo tandem $x = \sqrt{((adfg - adef) : (dg - ef))}$, & $y = \sqrt{((aefg - adeg) : (dg - ef))}$. *Q. E. I.*

COROLL. I.

Hinc etiam reliquæ CO, DO, EO, FO determinantur. Est enim (ut supra inventum) $OC = y\sqrt{((ab+bm) : (ab+am))} = y\sqrt{(bd : ae)} = \sqrt{((bdfg - bddg) : (dg - ef))}$; $OD =$

$x\sqrt{}$.

$x\sqrt{((bb+bm):(aa+am))} = x\sqrt{(be:ad)} = \sqrt{((befg - beef):(dg - ef))}$; $OE = y\sqrt{((ac+cn):(ac+an))} = y\sqrt{(cf:ag)} = \sqrt{((ceff - cdef):(dg - ef))}$; $OF = x\sqrt{((cc+cn):(aa+an))} = x\sqrt{(cg:af)} = \sqrt{((cdgg - cdeg):(dg - ef))}$.

COROLL. II.

Sub hac generali Solutione continentur singuli casus particulares. Ex. gr. si duo ex objectis, vel omnia tria essent contigua; nihil aliud agendum esset, quam supponere tantum BC seu $m = 0$, & BE, seu $n =$ CD $= b$. Atqui ita foret $d = a$, $e = b$, $f = a + b$, $g = c + b$. Quibus igitur substitutis, in generalibus linearum valoribus, prodiret x seu OA $= \sqrt{((adfg - adef):(dg - ef))} = a\sqrt{((ac+bc):(ac - bb))}$; y, seu BO, seu [quia cum ea in hoc casu congruit] CO $= \sqrt{((aefg - adeg):(dg - ef))} = b\sqrt{((ac+ab):(ac - bb))}$; DC, seu [quæ hic eadem est] EO $= \sqrt{((ceff - cdef):(dg - ef))} = b\sqrt{((ac+bc):(ac - bb))}$; FO $= \sqrt{((cdgg - cdeg):(dg - ef))} = c\sqrt{((ac+ab):(ac - bb))}$. Quæ omnia rite consentiunt cum Solutione hujus casus, per methodum particularem inventa.

****

II.

PROBLEMA DIOPTRICUM GENERALE,

Quod comprehendit omnia Huygeniana *circa lentes.*

Data lente ABCD, cujus axis EBDF, & puncto radiante M; invenire ejus focum, seu punctum G, in quo radii MH incidentes, post duplicem refractionem in H & I perpessam, concurrunt. TAB. LXXXI. N°. LXXI. *Fig.* 2.

SOLUTIO.

TAB. LXXXI. N°. CLXXI. *Fig. 2.*

Esto sinus anguli incidentiæ ex aëre in vitrum ad sinum anguli refractionis, ut m ad n; F centrum superficiei superioris ABC; E centrum superficiei inferioris ADC. Pro concesso assumatur angulos infinite parvos, seu valde acutos, esse ut eorum sinus.

Vocetur angulus incidentiæ MHO $= m$, & angulus refractionis primæ FHI $= n$; angulus radiationis HMB $= a$; distantia puncti radiantis M a lente, hoc est, MB $= d$. Erit, producta IH donec axi occurrat in N, ang. N $= a - m + n$, ang. F $= m - a$. Dicatur porro ang. E $= b$, erit ang. EIN $=$ E $-$ N $= b - a + m - n$. Est vero EIN : LIG $= n : m$; hinc LIG $= (mb - ma + mm - mn) : n$; ang. G $=$ LIG $-$ E $= (mb - nb - ma + mm - mn) : n$. Sit radius superficiei inferioris ADC, hoc est ED $= p$; radius superioris, hoc est FB $= q$; erit HF : HM seu BM $= a : m - a$, hoc est, $q : d = a : m - a$; unde $da = mq - aq$, ideoque $a = mq : (d + q)$. Præterea, quia crassities lentis BD, multoque magis HI, infinities minor supponitur amplitudine arcus ID, qui & ipse infinities minor habetur distantia finita ME, punctum I censeri potest in H, adeoque EIM tanquam triangulum; hinc ergo $b : a =$ MI, vel MH, vel MB : EI $= d : p$; hinc $b = ad : p =$ [substituto valore ipsius a] $mqd : (pd + pq)$. Surrogatis itaque valoribus ipsarum a & b in valore anguli G, qui inventus est $= (mb - nb - ma + mm - mn) : n$, obtinebitur G $= (mmqd - mnqd + mmpd - mnpd - mnpq) : (npd + npq)$. Tandem G : E $=$ EI : GI $=$ ED : GD, hoc est $\frac{mmqd - mnqd + mmpd - mnpd - mnpq}{npd + npq} : \frac{mqd}{pd + pq} = p :$ GD. Reperitur itaque

$$GD = \frac{npqd}{mqd - nqd + mpd - npd - npq}.$$

ORDRE

****

III.

ORDRE DU CALCUL

Pour la détermination des Iris ou Arc-en-Ciels de toutes les Classes.

SOit AMRTV le grand cercle d'une boule de matiere transparente, représentant un de ces globules aqueux, qui remplissent l'air, dans le tems qu'on y voit un Iris. BA, BM, B*m* sont des rayons solaires, considerés comme venant d'une distance infinie, par conséquent comme paralleles; dont celui BA, qui prolongé passe par le centre B, sera nommé *l'axe des rayons*. Les autres BM, B*m*, prolongés en S, *s*, sont les rayons incidents obliquement, qui à l'entrée dans la boule se rompant vers les perpendiculaires CM, C*m*, donnent les rayons rompus MR, *mr*, lesquels sont réflechis, autant de fois que l'on voudra, savoir MR en RT, RT en TV &c. Et *mr* en *rt*, *rt* en *tu* &c. pendant qu'une partie de chacun de ces rayons sort de la boule à la rencontre du point de réflexion. TAB. LXXXI. N°. CLXXI. *Fig.* 3.

Il faut remarquer, que pour qu'un Iris d'une certaine classe s'engendre, il y a un certain point M sur lequel le rayon BM tombant, & tous les autres infiniment proches B*m* entrant ensuite dans la boule, dont, après autant de réflexions qu'il en faut pour l'Iris de cette classe, ils sortent parallelement VP, *vp*, comme ils y étoient entrés parallelement BM, B*m*. Tous les autres rayons solaires qui tombent sur des point différents de M, *m*, en deça ou en delà, sortiront après le même nombre de reflexions non parallelement, & se disperseront. Ce qui fait que l'œil placé dans la direction VP, *vp*, on verra sur V*v* l'image du Soleil sous une certaine couleur convenable à la nature de la réfraction du rayon BM en MR, & de B*m* en *mr*. C'est en quoi consiste l'apparition d'un Arc-en-ciel; supposé

que l'œil en soit assés sensiblement frappé ; quoique, en vérité, les yeux des hommes ne soient pas assés ébranlables, pour s'appercevoir des Iris, qui sont au de-là de la seconde Classe : peut-être que les Aigles, les Linx, ont les yeux plus vifs, plus perçants pour les voir. Quoiqu'il en soit, voici la méthode générale pour déterminer le point M, pour telle sorte d'Iris que l'on voudra ; ce point trouvé, il est aisé de déterminer la demi-largeur de l'Iris, c'est-à-dire, l'angle que fait PV prolongé avec l'axe AC, ou le rayon BM, prolongés.

D'abord, il est clair que toutes les cordes MR, RT, TV &c. sont égales entr'elles ; comme le sont aussi les cordes *mr*, *rt*, *tu*, &c. à cause de l'égalité des angles d'incidence & de réflexion. Soit CA le sinus total $=1$, CE perpendiculaire sur MS, prolongement de BM, ou le sinus de l'arc AM $=x$, l'arc M*m*R $=$ R*r*T $=$ T*v*V $=A$, l'arc *m*R*r* $=$ *rt* $=$ *t*T*v* $=B$; le nombre de réflexions en R, T, &c. ou le nombre quantiéme de l'Iris qu'on veut déterminer $=N$: on aura l'arc total MRTV $=(1+N)\times A$, & l'arc total *mrtu* $=(1+N)\times B$. Donc la différence de ces arcs totaux, c'est-à-dire, $Mm+Vv=(1+N)\times A-(1+N)\times B=(1+N)\times(A-B)=(1+N)\times(Mm-Rr)$. Or, parce que les rayons RM, *rm* [s'ils rebroussoient] sortiroient parallelement en MB, *m*B, comme leurs égaux TV, *tv* doivent sortir parallelement en VP, *vp* ; il faut que la figure M*m*R*r* soit parfaitement égale & semblable en tout à la figure V*v*T*t* ; donc $Mm=Vv$, & $Rr=Tt$. Ainsi nous aurons $2Mm=Mm+Vv=(1+N)\times(Mm-Rr)=(1+N)\times Mm-(1+N)\times Rr$; ce qui nous donne $Mm\times(N-1)=(1+N)\times Rr$, & partant $N+1:N-1=Mm:Rr=$ [par la nature du cercle] MF : F*r* ou FR ; donc *componendo* $2N:N+1=MR:MF$; donc $MF=\frac{N+1}{2N}MR$; cela veut dire, que le point cherché M doit être là, où MF, partie du rayon rompu comprise entre le point de réfraction M & la caustique, soit $=\frac{N+1}{2N}MR$. Or dans l'*Analyse des infin. petits* pag. 122, on

a

a generalement $MF = \frac{bbmy}{bmy - any - aan}$ = [si y, ou le rayon incident est infini, comme ici] $\frac{bbm}{bm - an}$. Et a est ici [en nommant $CE = x$] $ME = \sqrt{(1 - xx)}$, b ou $MG = \sqrt{(1 - \frac{nn}{mm}xx)}$, $MR = 2MG = 2\sqrt{(1 - \frac{nn}{mm}xx)}$; d'où on aura cette équation $\frac{N+1}{2N} MR$ ou $\frac{N+1}{N}\sqrt{(1 - \frac{nn}{mm}xx)}$ $= \frac{bbm}{bm - an}$ ou $\frac{m(1 - \frac{nn}{mm}xx)}{m\sqrt{(1 - \frac{nn}{mm}xx)} - n\sqrt{(1 - xx)}}$. La division par $\sqrt{(1 - \frac{nn}{mm}xx)}$ donnera $\frac{N+1}{N} = \frac{m\sqrt{(1 - \frac{nn}{mm}xx)}}{m\sqrt{(1 - \frac{nn}{mm}xx)} - n\sqrt{(1 - xx)}}$

$$= \frac{m\sqrt{(1 - \frac{nn}{mm}xx)} - n\sqrt{(1 - xx)}}{m\sqrt{(1 - \frac{nn}{mm}xx)} - n\sqrt{(1 - xx)}} + \frac{n\sqrt{(1 - xx)}}{m\sqrt{(1 - \frac{nn}{mm}xx)} - n\sqrt{(1 - xx)}}$$

$= 1 + \frac{n\sqrt{(1 - xx)}}{m\sqrt{(1 - \frac{nn}{mm}xx)} - n\sqrt{(1 - xx)}}$; Donc $\frac{1}{N} =$ $\frac{n\sqrt{(1 - xx)}}{m\sqrt{(1 - \frac{nn}{mm}xx)} - n\sqrt{(1 - xx)}}$; multiplié en croix, il vient $m\sqrt{(1 - \frac{nn}{mm}xx)} - n\sqrt{(1 - xx)} = Nn\sqrt{(1 - xx)}$; ou $m\sqrt{(1 - \frac{nn}{mm}xx)} = (Nn + n)\sqrt{(1 - xx)}$; ou en quarrant les deux membres, $mm - nnxx = (Nn + n)^2 - N^2n^2xx - 2Nn^2xx - nnxx$. Par la réduction, on obtiendra $xx = \frac{(Nn+n)^2 - mm}{NNnn + 2Nnn}$ & partant $x = \frac{\sqrt{((Nn+n)^2 - mm)}}{n\sqrt{(NN + 2N)}}$. C.Q.F.T.

COROLLAIRE I.

Pour le Principal Iris, où N, le nombre de réflexions, est $= 1$, x devient $= \frac{\sqrt{(4nn - mm)}}{n\sqrt{3}}$

COROL-

COROLLAIRE II.

Pour le second Iris, où N, le nombre de réflexions, est $= 2$, il vient $x = \frac{\sqrt{(9nn - mm)}}{n\sqrt{8}}$.

COROLLAIRE III.

Pour le troisiéme Iris, où $N = 3$, on a $x = \frac{\sqrt{(16nn - mm)}}{n\sqrt{15}}$. Et ainsi des autres à l'infini.

COROLLAIRE IV.

Pour l'infinitiéme Iris, où $N = \infty$, x sera $= 1$; c'est-à-dire, le rayon incident BM doit friser la boule, & sera le plus éloigné de l'axe BAC qu'il est possible.

COROLLAIRE V.

Si la réfraction est supposée bien grande; il pourroit arriver que quelques-uns des premiers Iris devinssent imaginaires; par conséquent invisibles: par exemple, si $m : n = 5 : 2$, on auroit pour le premier Iris, où $N = 1$, $x = \frac{\sqrt{(16 - 25)}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{-9}}{2\sqrt{3}}$, imaginaire. Mais le second Iris, où $N = 2$, donneroit $x = \frac{\sqrt{(36 - 25)}}{2\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{8}}$, possible.

Pour la détermination des demi-largeurs des Iris de toutes les Classes.

Le rayon dernier sortant VP, qui entre dans l'œil, doit être continué en arriére VQ, jusqu'à-ce qu'il rencontre le rayon incident BM prolongé, ces deux rayons feront un angle,

gle, dont la mesure donne la demi-largeur de l'Iris. Pour trouver cet angle, on observera ce qui suit : CE, ou x, est le sinus de l'arc AM, en prenant CA pour le sinus total, & il est en même tems le sinus de l'angle d'incidence : or x étant trouvé, on trouvera par les Tables l'arc AM qui sera la mesure de l'angle d'incidence; on aura donc aussi $\frac{n}{m}x$, ou CG, sinus de l'angle de réfraction; cet angle sera donc aussi connu par les Tables. La différence de ces deux angles d'incidence & de réfraction, qui est l'angle RMS, soit nommée D. On aura de même, en prolongeant TV en π, PV$\pi = D =$ RMS.

De plus, je nomme R l'angle de réfraction CMG ou CRG. Il est visible, que chacun des Angles MRT, RTV, &c. $= 2R$. Que l'on prolonge le rayon incident BMS à l'indéfini, lequel rencontre le rayon réflechi prolongé après la premiere réflexion au point α, celui prolongé d'après la seconde réflexion, au point β, celui prolongé d'après la troisiéme réflexion au point γ, &c. Enfin le dernier rayon sortant VP, continué en arriére rencontre le rayon incident au point nommé ω. Qu'on nomme enfin l'angle droit P. On conçoit qu'en chaque point de rencontre il y a deux angles, l'un intérieur qui regarde le Soleil, & l'autre extérieur qui est son angle de suite. Le premier intérieur $\alpha =$ MRT $-$ RMS $= 2R - D$; le premier extérieur $\alpha = 2P - 2R + D$: Le second intérieur $\beta = 2R - (2P - 2R + D) = 4R - 2P - D$; le second extérieur $\beta = 2P - (4R - 2P - D) = 4P - 4R + D$. Le troisiéme intérieur $\gamma = 2R - (4P - 4R + D) = 6R - 4P - D$; le troisiéme extérieur $\gamma = 2P - (6R - 4P - D) = 6P - 6R + D$ &c. Maintenant, si chacun des intérieurs est diminué encore d'un D, on aura la demi-largeur du premier Iris $= 2R - 2D$; celle du second Iris $= 4R - 2P - 2D$; celle du troisiéme $= 6R - 4P - 2D$; En general, celle de la N^e Classe; c'est-à-dire, la demi-largeur de l'Iris, qui se forme après N réflexions entre deux réfractions, sera $= 2N \times R - 2(N - 1) \times P - 2D$.

 Quel-

Quelques exemples serviront d'éclaircissement. Supposons la loi de réfraction $\frac{m}{n} = \frac{4}{3}$, qui est celle qui se fait en entrant de l'air dans l'eau. Pour le premier ou principal Iris, où $x = \frac{\sqrt{(4mm - mm)}}{n\sqrt{3}}$, on aura $x = \sqrt{\frac{20}{27}}$ = [en prenant pour le sinus total 10000] $\frac{\sqrt{2000000000}}{\sqrt{27}} = \sqrt{74074074\frac{2}{27}} = 8607$ à fort peu près. En consultant les Tables des sinus, on trouvera que ce sinus 8607 répond à l'arc AM de 59°. 24′ = à l'angle d'incidence. Faites donc 4 : 3 = 8607 : 6455 = au sinus de l'angle de réfraction, qui répondra dans les Tables à 40°. 12′ $\frac{1}{2}$ = à l'angle de réfraction = R: la différence de l'angle d'incidence & de celui de réfraction sera donc 19°. 11′ $\frac{1}{2}$ = D. Ainsi on aura $2R - 2D$ = 42°. 2′ = à la demi-largeur de l'Iris principal; conformément aux observations.

On fera, *mutatis mutandis*, une semblable opération pour le second Iris. On trouvera $x = 9501\frac{1}{2}$, qui donne l'arc AM de 71°. 50′ = à l'angle d'incidence: faisant 4 : 3 = 9501 $\frac{1}{2}$: 7126 = au sinus de l'angle de réfraction, qui répond à l'arc de 45°. 27′ = à l'angle de réfraction = R : la différence des angles d'incidence & de réfraction = 26°. 23′ = D: on aura donc $4R - 2P - 2D$ = — (54°. 34′) = à la demi-largeur de l'Iris Secondaire.

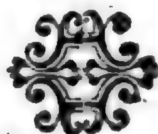
Le signe négatif — marque que le concours des lignes prolongéees PV & BMS se fait entre le Soleil & la boule, & non pas derriere la boule, comme la Figure le représente.

S C H O L I E.

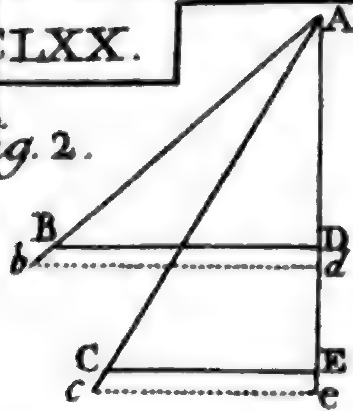
Sans se donner tant de peine, & sans passer graduellement par toutes les classes inférieures des Iris, pour parvenir à la connoissance de la demi-largeur ω de l'Iris de la classe N considerée généralement; on y peut arriver immédiatement par la propriété du Polygone, qui est que la somme de tous ses angles est égale à deux fois autant d'angles droits qu'il a de cotés ou d'angles

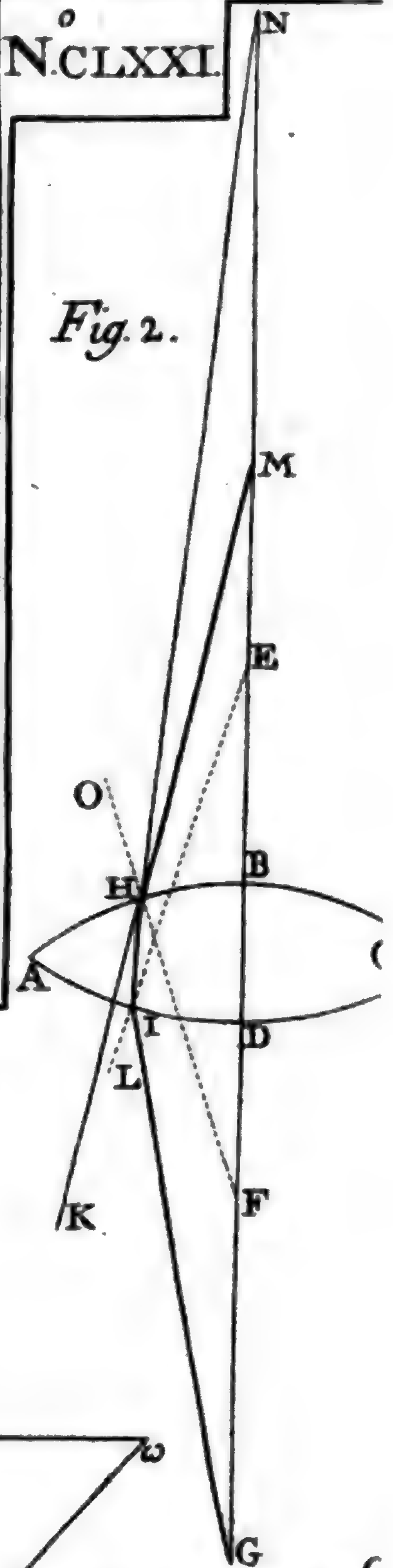
d'angles moins quatre. Ainsi dans nôtre cas, il y a une espèce de Polygone, comme dans cette Figure $D \omega D\, 2R\, 2R\, D$, qui a toujours trois angles saillants ω, D & D, & autant d'angles rentrants $2R$, qu'il y a d'unités dans le nombre N; ensorte qu'il y a en tout $N+3$ angles, & autant de cotés; où il faut noter, que l'angle ω est celui que l'on cherche, chacun des deux angles D est la différence de l'angle d'incidence & de celui de réfraction; chacun des angles marqués $2R$ est le double de l'angle de réfraction R; tous les cotés $D\,2R$, $2R\,2R$, $2R\,2R$ &c. sont égaux, représentés dans la précédente Figure, par les cordes égales MR, RT, TV, &c. Quant au reste, il est à observer que chacun des angles rentrants $2R$, entant qu'ils concourent à former les angles du Polygone, qui doivent regarder l'intérieur de la Figure, a pour mesure, non pas $2R$, mais le complément à 4 droits; ainsi chaque $2R$ doit être estimé par $4P - 2R$: Donc la somme de tous les angles du Polygone sera $= \omega + 2D + N \times (4P - 2R)$. Or, par la propriété générale des Polygones, cette somme doit être $= 2\,(N+3) \times P - 4P$, c'est-à-dire $= 2\,(N+1)\,P$; ce qui nous fournit cette équation $2\,(N+1)\,P = \omega + 2D + N \times (4P - 2R)$, ou $2N \times P + 2P = \omega + 2D + 4N \times P - 2N \times R$. D'où on tire $\omega = 2N \times R - 2\,(N-1)\,P - 2D$; ce qui est conforme à ce que nous venons de trouver par une beaucoup plus longue déduction.

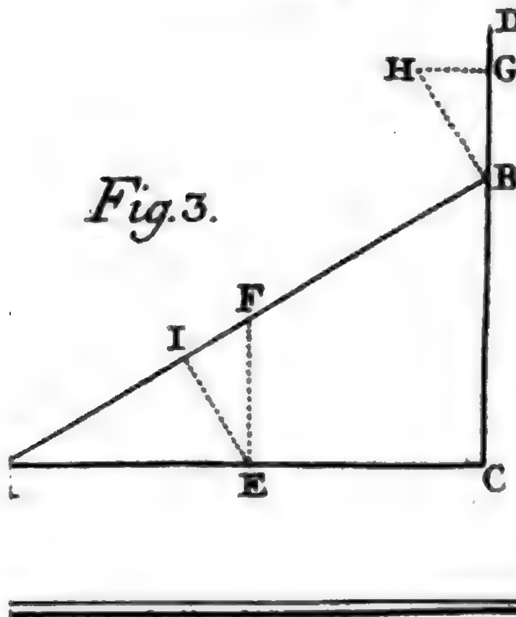
TAB. LXXXI. N°. CLXXI. *Fig.* 4.

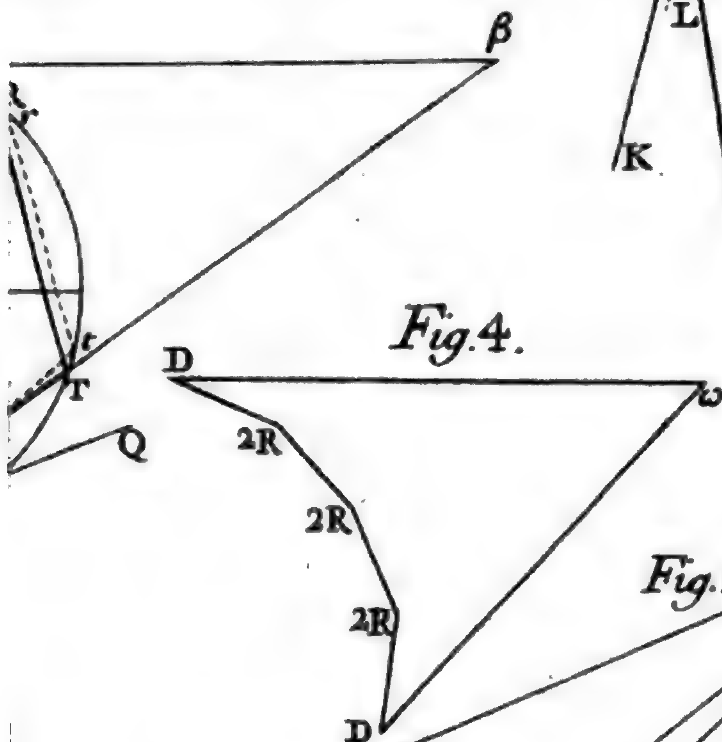


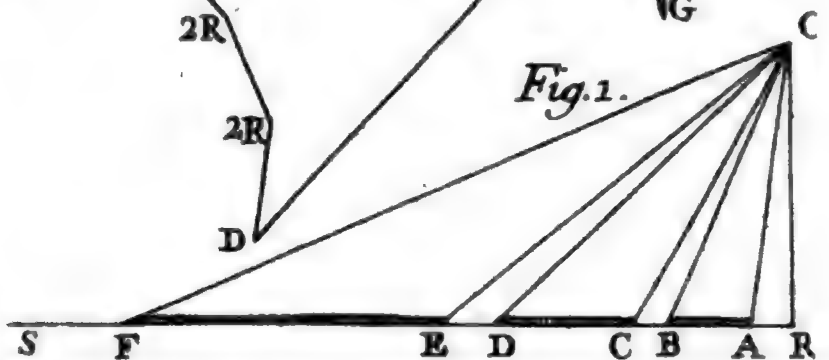



CLXX.
Fig. 2.
A
B
D
b
d
C
E
c
e


N° CLXXI.
Fig. 2.
N
M
E
O
H
B
A
I
D
L
K
F
G


Fig. 3.
D
H
G
B
F
I
E
C


Fig. 4.
β
T
Q
D
ω
2R
2R
2R
D


Fig. 1.
S
F
E
D
C
B
A
R

****

N°. CLXXII.

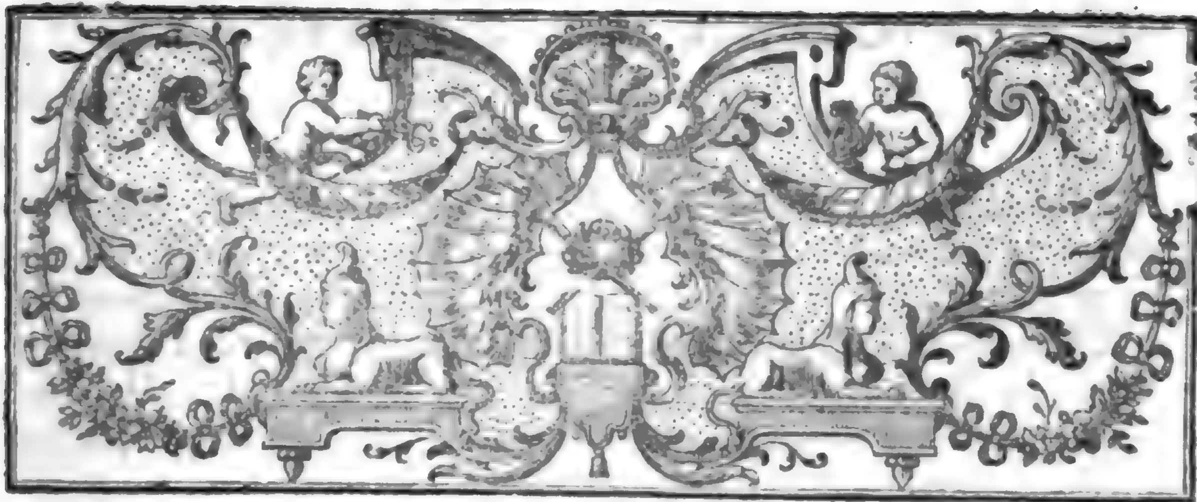
LE CABESTAN

Délivré des inconvéniens ordinaires, par rapport à son usage sur Mer.

DISCOURS

Composé à l'occasion de la Question proposée par Messieurs de l'Académie Roiale des Sciences de Paris,

Pour l'Année 1739.



LE CABESTAN

Délivré des inconvéniens ordinaires, par rapport à son usage sur Mer.

I.



E toutes les Sciences, celles qui apportent le plus d'utilité au public, ce sont sans contredit les Mathematiques & en particulier la Méchanique. L'Histoire ancienne nous apprend combien ARCHIMEDE [pour n'alléguer que ce seul exemple] a produit & exécuté de prodigieux effets, par le moyen des machines, duës à son génie & à ses profondes connoissances de la Méchanique; quoiqu'on en raconte aussi plusieurs faits fabuleux, forgés par des gens qui n'entendoient pas les principes de cette Science; mais par cela même ces faits inventés sont faciles à distinguer des véritables.

II.

I I.

L'Illustre *Académie Royale des Sciences* de *France*, toujours attentive à favoriser le progrés des Sciences, a proposé, pour le prix de l'année 1739, un sujet qui regarde la Navigation & le Commerce, conformément à l'intention du généreux Fondateur. Le sujet en question consiste dans la demande, *De donner la meilleure construction du* Cabestan, *ou telle autre Machine équivalente*.

I I I.

Il n'est pas nécessaire de donner une ample description du Cabestan; étant une machine fort connuë, qui sert en toutes sortes d'occasions sur Terre & sur Mer. Cependant le mot de Cabestan est employé particuliérement dans la Marine: Il signifie une machine assés simple, que VITRUVE appelloit *Ergata*. On sait, que c'est un cylindre, ou un arbre en forme de rouleau vertical, ou érigé à plomb; en quoi il différe d'une autre machine semblable nommée *Vireveau* chés les Mariniers, & *Sucula* chés VITRUVE; c'est aussi un cylindre, ou rouleau, mais posé horizontalement. On place le Vireveau sur le Tillac des Vaisseaux Marchands, où il fait le même effet que le Cabestan sur les Vaisseaux de guerre. Dans les grands Vaisseaux, on a plus d'une sorte de Cabestan, le grand & le petit. Le grand Cabestan, planté sur le premier pont, & élevé jusqu'à 4 ou 5 pieds de hauteur au dessus du second, est nommé double, à cause qu'il sert à deux étages. Le petit Cabestan, ou le Cabestan simple, est posé sur le second pont. Leur usage, & celui du Vireveau, consiste à lever les ancres, à tirer, à trainer, ou à élever des fardeaux. Je ne parlerai dans la suite que du *Cabestan* pris en général, qui fait le sujet de la question; quoiqu'il soit aisé d'appliquer mes raisonnemens aussi au Vireveau, par rapport aux inconvéniens auxquels je tâcherai de rémédier, entant qu'ils sont communs à ces deux sortes de machines.

I V.

I V.

Quand on veut ſe ſervir du Cabeſtan, pour lever, par exemple, l'ancre; cela ſe fait lorſque le cordage, ou le cable, attaché par un bout à l'ancre & arrêté par l'autre bout en quelque endroit du cylindre, s'entortille ſur lui en faiſant tourner ou virer le Cabeſtan, par le moyen de deux ou pluſieurs léviers, ou barres, que l'on a fait paſſer par des ouvertures qui percent diamétralement l'arbre du Cabeſtan. Si la réſiſtance eſt bien grande, on y applique quelques fois Six léviers, ſavoir quatre par le haut & deux par le bas.

V.

Avant que de commencer à faire tourner le Cabeſtan, on tortille dabord le cable un tour ou deux ſur l'arbre, afin que le cable ne puiſſe pas gliſſer, quand on le retient un peu ferme par ſon extrémité. C'eſt le frottement qui l'empéche de gliſſer lorſque l'ancre, ou un autre fardeau à élever, commence à réſiſter; & plus la réſiſtance eſt grande, plus auſſi le frottement du cable, s'il gliſſoit, deviendroit grand.

V I.

Si dans cet étât le Cabeſtan tourne en rond, par la force des Hommes qui conduiſent les leviers; il eſt viſible, que le cable s'entortillant ſucceſſivement ſur le cylindre, & ſe raccourciſſant ainſi, il doit attirer ou élever ce qui lui eſt attaché & qui réſiſte, ſuppoſé que la réſiſtance puiſſe être vaincue; ou bien il faut que le Vaiſſeau s'approche de l'obſtacle où le cable eſt attaché, en cas que cet obſtacle ſoit immobile.

V I I.

C'eſt ainſi que l'ancre, quand elle eſt encore bien éloignée du Vaiſſeau, attire d'abord le Vaiſſeau, par le raccourciſſement

 du

du cable; jusqu'à ce qu'il réponde presque à plomb sur l'ancre : ce n'est qu'alors, que la verge de l'ancre se redresse, ou s'érige en situation verticale, & qu'avec elle celui des bras de la croisée, qui étoit enfoncé en terre, s'en débarasse, & tournant la pointe de sa patte vers en haut, toute l'ancre se trouve dans un état convenable, pour être tirée hors du fond de la mer; n'y ayant plus d'autre résistance à vaincre que celle de sa pesanteur dans l'eau.

VIII.

On voit bien, que quand le cable est fort long, par exemple, de 100 brasses ou de 600 pieds, il est impossible de le faire rouler sur le Cabestan, tout d'une suite & sans interruption, par les Conducteurs des leviers; parce que tous les tours, qui peuvent être contenus sur l'arbre, s'ils étoient étendus en long, il s'en faudroit beaucoup que leur longueur prise ensemble n'égalât celle du cable entier. Ainsi quand le cable, par les tours réïterés, est parvenu au bout du Cabestan; les Hommes appliqués aux leviers doivent s'arrêter; il faut relever le cable, & faire plusieurs autres petites manœuvres, avant que de pouvoit faire une seconde opération; laquelle finie, il en faut revenir à une troisiéme, après les mêmes manœuvres, ensuite à une quatriéme, cinquiéme &c. jusques à ce qu'on ait achevé d'attirer toute la longueur du cable, ou une telle grande partie, que l'on voudra. Or toutes ces pauses, ces intervalles d'inaction des leviers, ces interruptions, causent une perte considérable du tems, qu'on pourroit employer utilement, & qui est quelquefois nécessaire pour éviter un danger.

IX.

C'est ce qui a occasionné la Proposition où on demande *la meilleure construction du* Cabestan, *ou telle autre Machine équivalente*. Pour avoir devant les yeux tous les inconvéniens auxquels

auxquels est sujet le Cabestan ordinaire, & auxquels on doit trouver des remedes, il est bon de raporter ici les propres termes de la Proposition. „L'Académie, dit-on, ayant eu avis
„ par des Personnes habiles & expérimentées dans la Naviga-
„ tion, que dans les fréquentes manœuvres, où l'on se sert du
„ Cabestan, le cordage attaché au poids qu'on veut lever ou
„ trainer, se dévide sur l'essieu de cette machine, de maniere
„ qu'à chaque tour ce cordage descend de toute sa grosseur, &
„ qu'il arrive qu'après plusieurs tours, il parvient au bout du
„ Cabestan, & qu'il faut le rehausser [ou choquer], pour évi-
„ ter qu'il ne s'embarrasse; que par là on ne sauroit se servir
„ du Cabestan, qu'on ne soit obligé de choquer plusieurs fois,
„ & qu'à chaque fois qu'on choque il faut arrêter le mouvement
„ de la machine, prendre des bosses [ou tresses &c.] sur le
„ cordage, dévirer le Cabestan, pour mollir [ou lâcher] la
„ partie du cordage qui est sur l'essieu, relever le cordage, le
„ roidir de nouveau, & enfin ôter les bosses, pour remettre le
„ Cabestan en état; que cette opération souvent repétée em-
„ porte beaucoup de tems, & dans plusieurs rencontres un tems
„ précieux, & qu'elle fait toûjours perdre une partie de l'effort
„ déja fait: Considerant d'ailleurs la liaison de la manœuvre du
„ Cabestan avec celle des ancres, qu'on ne jette ou qu'on ne
„ lève que par son moyen, l'Académie a résolu &c.

X.

Ainsi les inconvénients consistent dans les articles suivans; 1°. le cordage ou le cable se devidant sur l'essieu, ou l'arbre de cette machine, & parvenant, après plusieurs tours, au bout du Cabestan, il doit être *rehaussé* ou *choqué*, pour éviter qu'il ne s'embarrasse. 2°. Il faut *choquer* plusieurs fois, selon que le demande la longueur du cable. 3°. A chaque fois qu'on *choque*, il faut arrêter le mouvement de la machine. 4°. Il faut prendre des *bosses* ou *tresses*, sur le cordage. 5°. Il faut dévirer le Cabestan, pour *mollir* ou *lâcher* la partie du cordage qui est sur l'arbre.

l'arbre. 6°. Il faut *relever* le cordage. 7°. Le *roidir* de nouveau. 8°. Il faut enfin *ôter* les *bosses*, pour remettre le Cabestan en état : ensorte qu'il y a en tout huit operations ; chacune desquelles ne demandant qu'une minute de tems, il y auroit plus d'un demi-quart d'heure de perdu, pour toutes les huit opérations ensemble : or il faut repéter ces huit opérations chaque fois que les Conducteurs des leviers sont obligés de discontinuer leur travail.

X I.

Le plus grand inconvénient, qui résulte de ces inconvénients particuliers pris ensemble, c'est la perte du tems, & en certaines rencontres la perte d'un tems précieux, que causent toutes ces opérations souvent réïtérées ; outre qu'elles font perdre une partie de l'effort déja fait.

X I I.

Je remarque d'abord, que du premier des inconvénients mentionnés dépendent tous les autres, ensorte que si on trouvoit quelque remède, ou quelque moyen pour empêcher que le cable ne parvienne jamais au bout du Cabestan, on voit bien qu'on éviteroit en même tems tout le reste des inconvéniens ; puisqu'on seroit en état de faire tourner le Cabestan sans discontinuer, quelque long que fut le cable.

X I I I.

Mais le moyen de prévenir la descente du cable ne paroit-il pas impossible ? D'autant plus qu'à chaque tour qu'il fait sur l'arbre, il est obligé de descendre de toute sa grosseur en forme d'hélice autour du cylindre ; si bien que plus le cable a de grosseur, plus vite il descendra jusqu'au bout du Cabestan ; & par conséquent il faut plus souvent interrompre le virement du Cabestan, pour faire les opérations fâcheuses qui emportent du tems ; ce qu'on voudroit éviter.

XIV.

X I V.

Suppoſons, par exemple, que par chaque dix pieds de la longueur du Vaiſſeau, on donne deux pouces & demi d'épaiſſeur au grand Cabeſtan par le haut, ſuivant la pratique ordinaire; enſorte que pour un Vaiſſeau long de 140 pieds, il faudroit que le diamétre de la tête du Cabeſtan, où le cable ſe doit rouler, fût à peu près de 3 pieds & la circonférence de $9\frac{1}{2}$ pieds. Donc à chaque tour il ſe dévide ſur ſon arbre une longueur de $9\frac{1}{2}$ pieds du cable. Or le Maître-cable des grands Vaiſſeaux a en longueur juſqu'à 120 braſſes, ou 720 pieds, ainſi diviſant 720 par $9\frac{1}{2}$, on trouve à fort peu près 76, c'eſt-à-dire, que ſi on vouloit devider ſans interruption toute la longueur de 720 pieds, il faudroit, que la partie cylindrique du Cabeſtan, ſur laquelle ſe dévide le cable, fût ſuffiſamment longue ou haute pour y admettre 76 tours. Par conſéquent cette hauteur devroit être pour le moins égale à l'épaiſſeur du cable priſe 76 fois. Mais un cable, médiocrement gros, peut avoir ſon épaiſſeur ou diamétre de 6 pouces, ou d'un demi pied. Ainſi prennant le demi pied 76 fois, on auroit 38 pieds pour la hauteur de la partie cylindrique du Cabeſtan autour de laquelle s'applique le cable. Si le diamétre du cable étoit de 10 pouces, cette hauteur ſe trouveroit devoir être de plus de 63 pieds; hauteur énorme & partant impoſſible à mettre en pratique.

X V.

Mais comme on ne donne ordinairement à la hauteur de la tête du grand Cabeſtan que $5\frac{1}{2}$ pieds; on trouveroit, en diviſant 38 par $5\frac{1}{2}$, environ 7, qui marqueroient le nombre de fois qu'il faudroit arrêter la machine, pour répéter à chaque fois toutes les opérations mentionnées dans le Programme. Or puiſque [art. 10] ces opérations conſument un demi quart d'heure & plus, en répétant cette perte 7 fois, on voit, qu'il y auroit bien une heure de tems employé, ſeulement aux in-

termiſſions du mouvement de la machine ; & cela pour un cable de 6 pouces de diamétre. En faiſant le même calcul pour un cable, dont l'épaiſſeur ou le diamétre eſt de 10 pouces, le reſultat montrera, que le Cabeſtan eſt obligé de demeurer dans l'inaction, près d'une heure & demie en tout.

X V I.

Il eſt aiſé de concevoir, que les durées totales de l'inaction augmentent en raiſon des diamétres croiſſants des cables, ſuppoſée leur longueur toujours la même. Et réciproquement, plus les diamétres des cables ſont petits, moins auſſi ſeront grandes les pertes du tems conſumé pendant l'inaction totale de la machine. En effet, il eſt évident, ſans que je le diſe, que ſi le cable étoit aſſés menu, pour que toute la longueur de 720 pieds pût être dévidée ſur la hauteur de $5\frac{1}{2}$ pieds de la tête du Cabeſtan, c'eſt-à-dire, que ſi le cable n'étoit quaſi que comme une ficelle de petite épaiſſeur, le mouvement du Cabeſtan pourroit être continué ſans intermiſſion, depuis le commencement du cable juſqu'à ſon bout par ou il eſt amarré à l'ancre, ou à quelque fardeau qu'on veut tirer; parce que la hauteur de la tête du Cabeſtan ſeroit aſſés grande pour y dévider tant de tours du cable, qui étant étendus en long égaleroient toute ſa longueur.

X V I I.

Mais ce ſeroit une fiction faite en l'air, de ſuppoſer des cordes ſi déliées ; puiſqu'il n'eſt pas dans nôtre pouvoir de procurer aux cables telles forces qu'on voudra, pour réſiſter à la rupture, à moins qu'on ne les faſſe d'une juſte groſſeur, que l'expérience ſeule a enſeignée, ſelon les différents uſages qui demandent plus ou moins de force de ténacité dans les cables. Je m'imagine que le moins gros de ceux que l'on employe pour le Cabeſtan, peut avoir deux ou trois pouces de diamétre : encore ceux-là ne ſeroient-ils que pour tirer des fardeaux d'une médio-

médiocre résistance, où la rupture d'un tel cable n'est pas à craindre. Cependant un cable de 3 pouces d'épaisseur, supposant toujours sa longueur de 720 pieds, exigeroit déja, suivant les art. 15 & 16 une bonne demi-heure, que dureroient les interruptions prises ensemble, pour faire les opérations, à chaque fois que le Cabestan est dans l'inaction.

XVIII.

Par toutes ces considérations, je me suis mis à méditer, s'il n'y auroit pas quelque moyen de remédier aux inconvéniens marqués dans la Proposition, en faisant ensorte que les Hommes, qui conduisent les leviers, n'ayent jamais besoin de s'arrêter, jusqu'à ce que le cable soit entiérement attiré & ramené dans le Vaisseau, quelque long qu'il soit. C'est une entreprise, qui paroit d'abord impossible; j'ai néanmoins imaginé quelques expédients, qui seront sûrement praticables, pourvû qu'on ne néglige rien dans l'exécution. Je n'exposerai ici que celui de ces expédiens qui est le plus simple, & par conséquent le plus facile à mettre en pratique; d'autant plus, que je me servirai du Cabestan fait à l'ordinaire, sans y rien changer; sinon qu'on y doit faire une petite préparation utile à mon dessein, & que hors du Cabestan, à une distance convenable, on doit placer une piéce, ou une machine, que je nommerai le *Pressoir*, qui tiendra ferme à une poutre, à une parois, ou à quelque autre partie solide & inébranlable du Vaisseau. Voici en quoi consiste cette invention.

XIX.

Description de la maniere d'accommoder le Cabestan à pouvoir être tourné continuellement & sans relache, jusqu'à l'entiére attraction du cable.

Comme les frottemens dans les machines sont ce qu'il y a de plus nuisible à l'usage qu'on en veut faire, puisque souvent la

la plus grande partie de la force est consumée à surmonter les frottements; on a cherché les moyens de les éviter, ou au moins de les diminuer, autant que la nature de la machine le permettoit. Ici je ferai le contraire; je tâcherai, pour obtenir mon dessein de trouver un frottement, qui soit insurmontable par la résistance du fardeau que le cable doit tirer, trainer, ou élever. C'est ainsi qu'on tire un profit de ce qui est d'ailleurs un grand inconvénient: c'est convertir le mal en bien, le poison en remède.

X X.

Une corde étant vers son milieu roulée autour d'un cylindre, & tirée par deux puissances égales appliquées à ses extrémités; ces puissances resteront sans doute en équilibre, n'y ayant aucune raison pourquoi l'une prévaudra plûtôt que l'autre. Mais l'expérience montre, que si l'une de ces deux puissances reçoit une petite augmentation, elle ne fera pas d'abord venir l'autre à elle, parce que cela ne se peut faire, sans mouvoir la corde sur le cylindre & vaincre ainsi le frottement: il faut donc, que cette augmentation de puissance soit assés grande pour surmonter le frottement. Or le frottement lui même prend des accroissements, à mesure que la corde fait plus de tours sur le cylindre. C'est de-là que nous voyons la raison, pourquoi peu d'hommes suffisent pour tenir le bout du cable qui se dévide de dessus le Cabestan, pendant qu'une grande partie du cable, qui tire le fardeau de grande résistance vient s'y entortiller.

X X I.

On sait que, tout le reste demeurant le même, la résistance du frottement d'une corde roulée autour d'un cylindre, est proportionelle au nombre des tours: ainsi trois tours causeront un frottement dont la résistance sera triple de celle causée par le frottement d'un seul tour. Ceci doit être aussi entendu des par-

parties d'un tour entier; en ſorte que ſi la corde embraſſe ſeulement, par exemple, la moitié, ou le tiers, ou le quart de la circonférence du cylindre; la réſiſtance, qu'oppoſe le frottement à la force qui tire la corde d'un côté plus que de l'autre, ſera auſſi la moitié, ou le tiers, ou le quart de la réſiſtance, qui réſulte du frottement que produiroit un tour entier de la corde ſur le cylindre.

XXII.

En donnant d'abord à la corde un tour, ou plus d'un tour, ou même ſeulement plus de la moitié d'un tour; on conçoit bien que les trois parties de la corde, ſavoir celle qui eſt pliée ſur le cylindre, & les deux autres qui ſont hors du cylindre & étendues en lignes droites, ces trois parties, dis-je, ne peuvent plus ſe trouver ſur un même plan; Car l'épaiſſeur de la corde fait que ſa partie pliée ſur le cylindre doit ſe détourner du plan perpendiculaire à l'axe, dès que cette partie devient plus grande que la demi-circonférence du cylindre; étant viſible, qu'en ce cas, les deux autres parties hors du cylindre, étendues en lignes droites, ſe rencontreront & ſe croiſeront; ce qui ne ſauroit ſe faire, ſans que ces deux portions de la corde ſortent du plan ſur lequel elles étoient, en s'écartant l'une de l'autre de toute l'épaiſſeur de la corde [voyés *Fig.* 1]. A plus forte raiſon la corde pliée ſur le cylindre doit s'écarter d'avantage du plan perpendiculaire à l'axe, quand on la roule pluſieurs fois autour du cylindre. C'eſt là préciſément en quoi conſiſte l'inconvénient, qui fait deſcendre le cable juſqu'au bout du Cabeſtan, & qui entraine après cela tant d'autres incommodités, cauſées par les différentes opérations, qui remettent le Cabeſtan dans l'inaction, autant de fois qu'on les repéte.

TAB. LXXXII.

XXIII.

Mais ſi la corde n'embraſſe que la moitié de la circonférence du cylindre, ou une moindre partie que la moitié [voyés *Fig.* 2

& 3], il eſt clair que, dans ces deux cas, les deux portions de la corde ne ſe croiſeront jamais, quelques longues qu'elles ſoient. Ainſi rien n'empêche que la corde ne puiſſe demeurer conſtamment dans le plan du cercle horizontal, dont elle embraſſe un arc, égal ou plus petit que la demi-circonférence; pendant que le cylindre, tournant ſur ſon axe vertical, feroit avancer la partie poſtérieure de la corde, pour ſuppléer ſucceſſivement à la partie pliée ſur l'arc, à meſure qu'elle le quitteroit par devant, ou s'en détacheroit pour s'étendre en ligne droite avec la partie antérieure. De cette maniere, on conçoit aiſément que le cylindre peut tourner continûment, ou ſans interruption, & faire paſſer toute la corde d'une extrémité à l'autre par deſſus l'arc qu'elle embraſſe.

XXIV.

Il s'agit donc de trouver quelque moyen, qui faſſe enſorte, que quand le cercle tourne ſur ſon centre, il entraine avec lui la corde; afin que toujours une nouvelle portion de la tangente ſoit obligée de ſe plier & de s'appliquer ſur un arc égal, & cela nonobſtant la grande réſiſtance d'un fardeau, qui ſeroit attaché à l'extrémité poſtérieure de la corde, quand même cette réſiſtance ſeroit égale à celle d'un poids à lever de 1000, ou de 2000 livres, ou plus grand. Or c'eſt là la grande difficulté, de rendre la preſſion de la corde, pliée ſur l'arc qu'elle embraſſe, aſſés forte, pour que la circonférence du cercle ne puiſſe couler ou gliſſer de deſſous la corde, & laiſſer ainſi le fardeau en arriére, ſans l'avancer la moindre choſe.

XXV.

Vouloir ici imaginer quelque ciment, colle, ou glu, dont on enduiroit toute la corde, afin que chacune de ſes parties, pliée ſucceſſivement ſur l'arc qui lui répond, lui adhère par ſa ténacité, ſi fermement qu'elle ne puiſſe quitter dans ſes points ceux de l'arc qu'elle touche, pendant le tems que chaque point de

de la corde eſt à parcourir l'arc de la courbure; vouloir, dis-je, imaginer un tel moyen, ce ſeroit trop donner dans le chimérique : on en voit bien la raiſon ; ainſi je n'y fais point de réflexion. Mais j'ai d'abord penſé, que l'on réuſſiroit peut-être mieux pour la pratique, en faiſant faire une roue aſſés épaiſſe, mobile autour de ſon centre : on feroit, ſur l'épaiſſeur de la circonférence de cette roue, une entaille tout autour, en forme de canelure ou de ſillon, aſſés large & profonde pour y recevoir ou contenir la corde, jaſqu'à environ la moitié de ſa groſſeur, ou un peu plus. On garniroit toute la cavité de ce ſillon de pointes de fer, bien courtes, mais très fortes, toutes perpendiculaires à la circonférence; enſuite on feroit embraſſer à la corde un arc, non plus grand que la demi-circonférence de ce ſillon hériſſé de pointes; on tiendroit le bout antérieur un peu ferme, quand on commenceroit à tourner la roue.

X X V I.

Il eſt aiſé de concevoir, que dès que la corde attachée à quelque corps qu'on veut attirer, ſe bande par l'oppoſition de la réſiſtance, ſa partie courbée, & appliquée ſur l'arc circulaire du ſillon, commence à preſſer cet arc; & la preſſion ſera d'autant plus grande, que le corps à mouvoir fait plus de réſiſtance, ou que la corde eſt plus fortement tendue. De-là il arrive, que les pointes de fer du ſillon, ſur leſquelles eſt preſſée la partie pliée de la corde, s'enfoncent dans les petits interſtices de la corde; ce qui fait que, pendant la circulation du ſillon, chaque pointe enfoncée aide à tranſporter la corde de la partie poſtérieure vers l'antérieure; & comme par le mouvement circulaire de la roue, il y aura toujours de nouvelles pointes, qui ſe préſentent ſucceſſivement à s'inſinuer dans la corde qui va être preſſée ſur le ſillon, pendant que du côté antérieur tout autant de pointes ſe dégageant permettent à la corde de reprendre ſa ſituation rectiligne, que la force d'un homme, qui la recueilleroit en tirant, affecteroit de lui donner ; il eſt clair, que de cette maniere, la rotation de la roue autour de ſon axe immobile,

bile, pourroit être perpétuée ſans aucune interruption, & attirer cependant un corps attaché à l'extrémité d'une corde, qui auroit telle longueur que l'on voudroit.

XXVII.

J'ai dit que la preſſion de la corde pliée ſur un arc donné augmente avec l'augmentation de la réſiſtance. Il faut ſavoir, que cette augmentation ſe fait de part & d'autre en même proportion. Car c'eſt une vérité déja démontrée par pluſieurs Perſonnes, que la réſiſtance R eſt à la preſſion P comme le rayon de la roue r eſt à la longeur a de l'arc que la corde embraſſe, c'eſt-à-dire, que $P = \frac{aR}{r}$. D'où l'on voit, que la preſſion deviendra plus grande que la réſiſtance, pourvû qu'on prenne un arc plus long que ſon rayon: ainſi un quart de la circonférence que la corde embraſſeroit, ſeroit plus que ſuffiſant, pour faire que la force de la preſſion ſurmontât celle de la réſiſtance. Je fais cette remarque, ſeulement pour faire ſentir qu'on pourroit fortifier l'engrainement des pointes de fer dans les interſtices des fibres de la corde, juſqu'à tel dégré, que la réſiſtance ne ſeroit peut-être pas capable de rompre les ténacités jointes enſemble de toutes les fibres embrochées par les pointes.

XXVIII.

C'eſt ſur une pareille idée, que feu M. HUGUENS, dans la conſtruction de la premiére Horloge à Pendule de ſon invention, employa une telle roulette en forme de poulie, dont la cavité d'alentour étoit garnie de pointes, deſtinée à porter la corde chargée par un bout d'un poids de 6 livres; lequel poids, ayant un effort continuel pour deſcendre, ne deſcend pas en faiſant gliſſer ou couler précipitamment la corde par deſſus la roulette, comme il le feroit ſans les pointes qui s'engrainent dans la corde; ſi bien que le poids, & avec lui la

la corde, ne descend qu'en faisant tourner la roulette, qui ménant avec elle la grande roue dentée sur un axe commun, communique le mouvement à tout le rouage de l'Horloge, jusqu'au balancier réglé par les oscillations du Pendule; ce qui rend la descente du poids fort lente, les pointes enfoncées dans la corde empêchant le poids de se précipiter. Voyés son *Horologium oscillatorium* premiere édit. p. 4. Fig. 1. où la roulette garnie de pointes, est représentée en profil, & marquée par les lettres D D.

X X I X.

On a depuis abandonné cette maniere de former la roulette avec des pointes, & on y a substitué une autre piéce circulaire, qui fait un effêt équivalent: c'est une platine composée de deux plaques rondes, jointes ensemble centralement, & qui laissent autour de la circonférence un interstice entr'elles, pour recevoir la corde selon son épaisseur. Cet interstice va en se retrécissant vers le centre, afin que quand la corde y est une fois admise dedans, elle soit serrée & pincée d'avantage par les flancs des deux plaques, lorsque le poids tire la corde. On voit bien, que plus le poids est pesant, & mieux la corde s'engagera dans l'interstice, & en sera comprimée; ce qui sert à empêcher qu'elle ne glisse par dessus la demi-circonférence supérieure. Mais pour mieux empêcher le glissement, les Ouvriers ont soin de rendre raboteux les deux flancs de la fente ou de l'interstice, par des incisions faites en sautoir, qui élévent de petites éminences tournées obliquement & à contresens de la tension de la corde; à peu près, comme on rend raboteuses les surfaces des limes. Il n'est pas difficile de comprendre la raison, pourquoi on a préferé cette façon de roulette à celle de M. HUGUENS: C'a été, sans doute, pour mieux ménager la corde, laquelle, suivant la structure de la roulette à la HUGUENS, ne peut que souffrir beaucoup à chaque fois qu'on remonte l'Horloge: car il est clair, que c'est alors que la corde reçoit brusquement quantité de piquures de

la part des pointes qui s'y enfoncent, & que brusquement aussi les pointes s'en retirent; par où il arrive nécessairement, que plusieurs des fibres de la corde se déchirent, ne pouvant pas se prêter subitement à ces actions violentes des pointes. Ainsi la corde s'usera bien vite; au lieu qu'elle doit se conserver beaucoup plus longtems, la roulette qui porte la corde étant fabriquée à la maniere d'aujourdhui.

XXX.

Cependant je me suis d'abord imaginé, que de l'idée de Mr. HUGUENS on pourroit tirer plus d'utilité pour nôtre sujet en question: Voici comment. Autour du cylindre, ou de l'arbre du Cabestan, vertical comme il est, on entaillera une cavité, un sillon, dont le plan soit parfaitement horizontal; par conséquent perpendiculaire à l'axe du cylindre: la profondeur & la largeur du sillon répondront à la grosseur du cable, dont on veut se servir; c'est pourquoi si on veut en différentes occasions se servir de cables de différente grosseur, on pourra faire différens sillons tous parallèles les uns aux autres, pour en choisir celui qui convient au cable dont on veut faire usage. On revêtira la surface de chacune de ses cavités d'une lame épaisse de fer, courbée en telle façon, qu'elle s'ajuste exactement à la figure concave du sillon, & qu'elle soit garnie de pointes, un peu longues & serrées les unes auprès des autres; ensorte que le sillon en paroisse hérissé en toute sa circonférence.

XXXI.

Le Cabestan étant préparé ainsi, on conçoit que si on applique sur le sillon une partie du cable prise vers le bout antérieur, laquelle embrasse un arc moindre que la demi-circonférence, ou tout au plus égal à la demi-circonférence; on conçoit, dis-je, que dès qu'on fait tourner le Cabestan, moyennant les leviers, pendant que quelques hommes tiennent un

peu

peu ferme le bout antérieur ; le cable amarré au fardeau ne sera pas plûtôt bandé par sa résistance, que la pression fera entrer les pointes dans la partie du cable pliée sur cet arc, lesquelles par conséquent entrainent le cable & font suivre le fardeau : ce mouvement pourra durer sans discontinuer, jusqu'à ce que le fardeau soit entiérement attiré ; pourvû que, pendant cette manœuvre, les hommes, qui doivent recevoir le cable à mesure qu'il se remet en ligne droite après avoir passé par les pointes, ayent soin de lui aider à s'en dégager, en le tirant un peu ; quoique le changement de direction des pointes, causé par le tournoyement du Cabestan, fasse que les pointes se retirent d'elles-mêmes, si elles ne sont pas trop longues, comme on le voit dans les cordes des Horloges décrites par Mr. HUGUENS, où elles s'engrainent & désengrainent d'elles mêmes, à chaque fois qu'elles font le demi-tour supérieur de leur roulette.

XXXII.

Cette maniére de se servir du Cabestan seroit exemte de tous les inconvéniens exposés dans le Programme ; si elle n'étoit pas accompagnée d'un autre inconvénient, dont on ne fait pas mention. C'est qu'il seroit à craindre que la structure du cable ne se corrompit trop vite, en passant si souvent, & avec tant de force, par les pointes ; à peu près comme il arrive au lin qu'on fait passer par le Seran, dont l'usage est de diviser les fibres du lin en plusieurs filamens subtils. Je crois cependant que, vû la différence de l'action du sillon hérissé de pointes, qui ne feroient qu'entrainer le cable, & celle des pointes d'un Seran, qui doit fendre par force les fibres, le cable ne laisseroit pas de durer & de faire d'assés longs services, pourvû que les ficelles, dont il est cablé, fussent bien tortillées. Outre qu'une longue durée du cable n'est pas ce qui devroit le plus être tiré en considération ; si d'ailleurs il faisoit l'office souhaitté d'éviter les inconvénients marqués, sur-tout pour les Vaisseaux qui appartiennent à un grand Prince, ou à un riche & puissant

puiſſant Etat, où on ne regarde pas de ſi près à l'épargne des agrais.

XXXIII.

Quoiqu'il en ſoit, ſi on ne juge pas cette maniere aſſés commode pour être miſe en pratique, à cauſe de la facilité avec laquelle le cable ſe rongeroit & ſeroit mis hors d'uſage ; je veux qu'on omette les pointes, & qu'au lieu d'elles on rende la lame de fer, qui recouvre le ſillon, fort raboteuſe en forme de lime, comme je l'ai inſinué ci-deſſus (§. 29.). Il eſt bien évident, que ſi l'âpreté ſeule que rencontre le cable plié & appliqué ſur un arc du ſillon, étoit ſuffiſante pour entrainer le cable chargé d'un fardeau, on auroit l'effet qu'on deſireroit, & le cable ſeroit beaucoup moins ſujet à s'uſer que par la maniere précédente du ſillon garni de pointes. Il faut donc examiner ſi de ce côté là on peut eſpérer un bon ſuccès. On ſait que deux ſurfaces raboteuſes de deux corps, étant appliquées & preſſées l'une ſur l'autre, il faut une certaine force, dans la direction de la ſurface commune où les corps ſe touchent, pour faire mouvoir l'un, qui ſeroit mobile, ſur l'autre, qui ſeroit ſuppoſé immobile : c'eſt le frottement qui cauſe cette difficulté, en réſiſtant au mouvement. On ſait de plus, par les raiſonnemens & les expériences de M. AMONTONS, que la force, requiſe pour ſurmonter le frottement, eſt proportionnelle à la preſſion avec laquelle le corps mobile eſt preſſé contre l'immobile : enſorte, qu'en augmentant aſſés la preſſion, on pourra augmenter le frottement, à tel dégré qu'on voudra ; ſuppoſé que tout le reſte demeure le même.

XXXIV.

Or pour appliquer cette Théorie à nôtre ſujet ; voyons juſqu'où ira la preſſion que ſouffrira le cable, lorſqu'il embraſſe le plus grand arc du ſillon qu'il peut embraſſer, pour que tout le cable demeure toujours dans un même plan ; c'eſt-à-dire, lorſqu'il embraſſe la demi-circonférence du ſillon. Nous avons vû

(§. 27.)

(§. 27.) que la pression étant nommée P, la résistance du fardeau à tirer R, la longueur de l'arc du sillon embrassé par le cable a, le rayon de la circonférence r; on aura $P = \frac{aR}{r}$. Supposé donc que a signifie la demi-circonférence, qui est au rayon r, selon la proportion d'ARCHIMEDE, comme 22 à 7, il en viendra $P = \frac{22}{7} R$: ce qui fait voir que la pression de la portion du cable courbée sur la moitié du sillon, seroit $3\frac{1}{7}$ fois plus grande que la résistance du fardeau qui bande le cable. Donnons, par exemple, à cette résistance une force équivalente à un poids de 2100 livres, comme si c'étoit une ancre à tirer du fond de la mer, pesant vingt-un quintaux, ou plus, parce qu'elle perd dans l'eau une partie de sa pesanteur; nous aurons $\frac{22}{7} R = \frac{22 . 2100}{7}$ liv. $= 6600$ livres. Ainsi la pression du cable, exercée sur la demi-circonférence, seroit équivalente à un poids de 66 quintaux. Cela veut dire, que si la portion du cable, qui embrasse la demi-circonférence, venoit à être étendue en ligne droite horizontale sur un sillon pareillement horizontal, & que ce morceau du cable fût chargé d'un poids de 66 quintaux, il en résulteroit un frottement, pour surmonter lequel, il faudroit précisément la même force, qu'il faudroit à l'ancre, pour resister & pour n'être pas entrainée par le mouvement circulaire du Cabestan.

XXXV.

Ce calcul suppose, que la pression du cable sur le sillon est uniforme dans toute la longueur de l'arc embrassé par le cable; cependant il est clair, qu'elle est plus grande du côté du fardeau; qu'elle va ensuite en diminuant jusques à la fin de la courbure, où le cable commence à quitter le sillon pour reprendre la direction rectiligne; c'est là où sont les Hommes, qui tiennent en tirant le garant, ou le bout du cable qui se dévide de dessus le Cabestan. Or ces Hommes n'employent pour tirer qu'une force fort médiocre, par exemple, une force de 300 livres.

vres. Ainsi en appliquant nôtre règle $P = \frac{22}{7} R$, où R signifie présentement la tension du cable, ou la force de 300 livres ; on trouvera $\frac{22}{7} R = \frac{22.300}{7} = 943$ livres, pour la plus petite pression, si elle étoit uniforme par toute la longueur de l'arc embrassé par le cable ; prenons donc la moyenne arithmétique entre la plus grande pression 6600℔ & la plus petite 943℔, nous aurons 3771℔, ou à peu près 38 quintaux. C'est le poids estimé raisonnablement, dont on doit supposer chargée la portion du cable qui embrasse la demi-circonférence du sillon, comme étendue en ligne droite horizontale, & couchée sur un pareil sillon horizontal, pour que cette charge produise à peu près la même force de frottement, que produiroit la pression causée par la résistance du fardeau sur le demi-circuit du sillon.

XXXVI.

C'est pourquoi, il est à savoir, si la charge, ou la pression de 38 quintaux seroit suffisante, pour faire ensorte qu'une force de 21 quintaux de résistance du fardeau, moins celle de 3 quintaux, qu'employent les Hommes qui tiennent en tirant le garant en sens contraire ; c'est-à-dire, qu'une force de 18 quintaux ne puisse pas surmonter la force du frottement ; car si elle la surmontoit, on auroit beau virer le Cabestan, son sillon ne feroit que couler sous le cable & laisseroit le fardeau en arrière sans l'entrainer. On pensera, sans doute, qu'on peut augmenter la *scabrosité* du sillon ou le rendre plus raboteux ; puisque le succès dépend entièrement de cette circonstance ; jusqu'à ce qu'il le soit assés pour rendre le frottement insurmontable par la résistance du fardeau. Mais ne retomberions-nous pas dans cet autre inconvénient, que nous voudrions éviter aussi ; qui est que par une trop grande âpreté du sillon, il seroit à craindre, que le cable ne fut pas de longue durée ; parce qu'il seroit rongé trop vite en passant souvent sur un sillon si rude, comme nous l'avons remarqué par rapport au sillon garni de pointes.

XXXVII.

XXXVII.

Pour prévenir donc la promte corruption du cable, je vois bien qu'il est absolument nécessaire de ne pas rendre le sillon trop mordant, en le rendant extrêmement raboteux & très rude: mais d'un autre côté, je vois aussi que, s'il n'est que médiocrement rude, il pourra arriver que la simple pression $\frac{aR}{r}$, qui résulte par la seule courbure du cable, ne soit pas assez forte pour causer sur le sillon un frottement, ou plûtôt une disposition au frottement, insurmontable par la résistance du fardeau; car autrement le Cabestan mis en mouvement feroit glisser le sillon sous le cable, sans l'entrainer, sans avancer le fardeau.

XXXVIII.

Le remède à cela seroit, sans doute, de faire ensorte que, quelque douce que soit l'âpreté du sillon, il fut pourtant rendu disposé à un frottement assés considérable, pour n'être pas surmonté par la résistance du fardeau. On obtiendra ce remède en augmentant suffisamment la pression $\frac{aR}{r}$ [produite naturellement par la courbure du cable] d'une autre pression extérieurement appliquée par quelque artifice. Car M. AMONTONS ayant démontré que la force du frottement est proportionnelle à la grandeur de la pression; il est incontestable que la moindre *scabrosité* des surfaces de deux corps qui se touchent, est capable de produire une disposition au frottement, qui résistera à une très grande force; pourvû que la pression de l'un des corps contre l'autre soit aussi grande qu'il le faut. Mais le moyen d'inventer & d'exécuter une nouvelle pression paroit difficile, pour ne pas dire impossible; d'autant plus qu'il faudra employer hors du cable quelque corps, quelque machine, qui presse fortement l'arc extérieur du cable courbé. Cette machine doit demeurer toujours immobile au même endroit,

 par

par rapport au Vaiſſeau, pendant que le Cabeſtan tourne: ainſi, ſi le cable doit être entrainé, à méſure que le ſillon circule, il eſt viſible que la machine elle même demeurant immobile, cauſera un grand frottement contre le cable; mais un frottement en ſens contraire à celui que l'on veut procurer ſur le ſillon dans la concavité du cable. La force de ce frottement extérieur contraire, provenant de la machine, détruiroit donc une partie de l'effet que devroit produire l'effort augmenté du frottement intérieur du ſillon: On perdroit d'un côté, ce qu'on auroit gagné de l'autre.

XXXIX.

Le ſeul moyen, qui reſte, d'éviter cette incommodité, ſera d'inventer quelque artifice, avec lequel on conſtruira cette machine, que je nommerai *Preſſoir*, qui ne fera que preſſer le cable par dehors, avec tant d'effort que l'on voudra, ſans aucun frottement ſenſible, pendant que le cable coule ſous le Preſſoir, avec le ſillon qui circule. Et c'eſt ce que je me flatte d'avoir trouvé; il ne tient qu'à le mettre en exécution: étant fort ſimple, il plaira par ſa ſimplicité. Voici en quoi il conſiſte.

XL.

TAB. LXXXII. Soit [*Fig. IV.* *] ABC l'arc extérieur du cable plié, & couché juſqu'à la moitié de ſon épaiſſeur dans le creux du ſillon. On fera faire trois ou pluſieurs roulettes bien ſolides, dont les eſſieux D, E, F ſoient ſur un arc DEF concentrique à l'arc ABC, & enchaſſés dans leurs chappes DG, EH, FI, qui tiennent ferme & fixe à une piece de fer LM ſolidement fabriquée

* La planche qui porte les Figures IV & V, doit être conſiderée comme ſur un plan horizontal, parce que le cercle ABCKYZ repréſente la ſection horizontale & perpendiculaire à l'arbre du Cabeſtan vertical. On a donné à cette ſection une épaiſſeur, pour y repréſenter le ſillon, qui doit admettre dans ſon creux la moitié de la groſſeur du cable.

quée en arc pareillement concentrique avec ABC. On aura la machine appellée le *Pressoir*, qui venant à être pressée, avec un effort, autour de l'arc LM, vers le centre, ensorte que l'arc extérieur du cable ABC reçoive cette pression, qui sera communiquée & transmise jusques sur le sillon; il est évident, que quand le cable se meut avec le sillon, qui tourne de A en B, de B en C, il fera tourner aussi les roulettes autour de leurs essieux, en sens contraire, suivant l'ordre des nombres 1, 2, 3, 4. De cette maniere, les roulettes presseront le cable sans aucun frottement; nonobstant que le corps du Pressoir demeure toujours au même endroit, & que le cable pressé aille son chemin, suivant l'ordre des lettres A, B, C, entrainé, comme il est, par le mouvement circulaire du Cabestan, que je suppose se faire en ce même sens de A en B, de B en C, &c. Ainsi, voilà augmentée la pression du cable sur le sillon, autant qu'il suffira, pour rendre le frottement de l'un contre l'autre insurmontable par la résistance du fardeau, quelque grande que soit celle-ci. Car puisque les accroissemens du frottement sont proportionés à ceux des forces avec lesquelles les corps s'entrefrottans sont pressés l'un sur l'autre; on conçoit aisément que le frottement, que nous souhaittons avoir, peut-être augmenté à l'infini; supposé que la matiere, sur laquelle s'applique la pression, soit assés solide pour n'être pas sujette à la rupture.

X L I.

Mais voyons de quelle maniére on peut obtenir & effectuer une telle pression appliquée par déhors sur la piece LM, que j'appelle le *joug* du pressoir. Je m'imagine, que le plus commode seroit d'employer pour cela des vis, un cric, ou une autre machine de cette nature, qui moyennant une force motrice médiocre, qui la fait agir, peut produire une pression énorme. Prenons, par exemple, que ce soit un cric, fait à l'ordinaire, NP (*Fig. V.*), dont la base VP de l'étui;

qui renferme la tige dentée, soit appuyée & attachée fortement à une poutre, à une parois, ou à une autre partie solide & inébranlable du Vaisseau. La tête de la tige T soit étendue en arc *lm*, dont la cavité puisse être appliquée sur la convexité du joug LM, lorsqu'on fait sortir la tige en tournant la manivelle X, jusqu'à ce que *lm* vienne se joindre sur LM. Il vaudra peut-être mieux, que d'abord tout le pressoir tienne ferme à la tête de la tige, en faisant souder l'arc *lm* sur le joug LM, de sorte que la tige du cric & le joug ne soit que d'une seule piece; à laquelle si on pratique ensuite les roulettes de la maniére susdite, on aura toute la machine prête à servir dans le besoin.

XLII.

Car supposé, que le cric soit bien appuyé & affermi à son lieu fixe & solide, où il pourra demeurer pour toûjours; quand on veut le mettre en usage, il n'y a qu'à faire sortir la tige de son étui, moyennant la manivelle, jusqu'à ce que les roulettes viennent à toucher la convexité du cable plié sur le sillon. Ensuite on continuera de tourner la manivelle avec force, plus ou moins, jusqu'à ce qu'il en resulte une pression suffisante sur le cable, & de celui-ci sur le sillon raboteux, qui produise entr'eux une disposition à un frottement si grand, qu'il devienne invincible par la résistance du fardeau. Le pressoir parvenu à ce dégré de pression, on arrêtera la manivelle en la liant sur l'étui, pour l'empêcher de rebrousser, & les Hommes destinés à conduire les leviers, commenceront à faire virer le Cabestan. Que si on s'aperçoit que le cable ne se tient pas comme collé sur le sillon, depuis A jusqu'en C, pendant que le Cabestan tourne en ce sens; mais qu'il reste en arriére, ou qu'il ne suit pas le mouvement du Cabestan avec la même vitesse; ce sera une marque que la pression n'est pas encore assés forte, ou qu'elle s'est relâchée de son intensité: c'est à quoi on remédiera sur le champ, en avançant un peu la manivelle; car il ne faudra que très peu pour serrer beaucoup d'avantage le cable, entre les

les roulettes & le sillon. Et de ce serrement augmenté dépend l'augmentation nécessaire de la pression, pour procurer au cable la disposition requise au frottement, afin de le rendre insurmontable par l'effort opposé du fardeau. C'est dans cette considération, que je l'appelle *disposition au frottement*, plûtôt que *frottement* lui même; puisqu'en effet le frottement ne doit pas se faire actuellement: sans cela, on n'obtiendroit pas le but que nous souhaittons; le fardeau resteroit en arriére, & le Cabestan tourneroit en glissant sous le cable sans l'attirer.

XLIII.

Suivant cette Théorie l'arc ABC, que l'on veut que le cable embrasse, pourroit être, à ce qu'il semble, une aussi petite portion que l'on voudra, de toute la circonférence du sillon; en rendant par récompense la pression extérieure d'autant plus grande que l'arc ABC est pris plus petit. Mais dans la pratique, on rencontre ordinairement des circonstances, qui exigent des limites à ce que la théorie paroit permettre généralement & dans toute son étendue. Ainsi, ici, on pourroit prendre l'arc ABC si petit, qu'on seroit necessité d'employer une pression si violente, si énorme, qu'on ne trouveroit nulle matiere, ni pour le Cabestan, ni pour le Pressoir, ni pour le cric assés ferme, ou assés solide, pour soutenir cette grande pression, sans se rompre ou sans se deranger. C'est donc l'expérience, qui doit aprendre les justes bornes. Ce sont les habiles Ouvriers, qui mettront en exécution ce que l'expérience leur aura enseigné de plus convenable. Je me contente d'en avoir donné l'idée générale.

XLIV.

Avant que de finir ce petit Discours, il est bon de répondre à une difficulté qu'on pourroit faire; mais qui n'est qu'apparente. C'est qu'on pensera peut-être, que cette nouvelle

pression

pression extérieure provenant de la force du cric, que l'on ajoute à celle qui se fait naturellement par le cable, quand il est plié sur l'arc du sillon, augmentera de beaucoup la peine & le travail de ceux qui conduisent les leviers. Mais si on fait attention au point où ces pressions tendent, on verra que la difficulté cessera dans le moment. Car il est visible, que l'une & l'autre de ces pressions donnent dans tous les points de l'arc ABC du sillon, perpendiculairement à la circonférence; & partant, que par toute l'étendue de l'arc ABC elles sont dirigées vers le centre du mouvement circulaire: elles ne resisteront donc en rien à l'action des leviers, si ce n'est en-tant, que le pivot d'en bas & la cheville d'en haut du Cabestan en souffrent quelque frottement de plus contre la circonférence des trous dans lesquels ils tournent: mais il en influe si peu contre la force avec laquelle on conduit les leviers, qu'il ne mérite point de considération; sur-tout si les leviers ont une juste longueur, & que la cheville, aussi bien que le pivot & la crapaudine soient de fer ou de cuivre bien poli & huilé: outre qu'on a aujourd'hui différens moyens, comme on sait, de diminuer ces petits frottemens. En tout cas, un ou deux Hommes de plus, qu'on appliquera aux leviers, seront plus que suffisants pour reparer la perte de force, s'il y en avoit.

X L V.

Une autre difficulté plus essentielle, seroit la crainte qu'on pourroit avoir, que toute la grande pression du cric, venant d'un seul côté, & réunie toute entiére sur le pivot & la cheville, ces deux parties ne fussent jamais assés solides, pour pouvoir soutenir un effort si énorme, sans être exposées au danger de rompre. Cependant je crois qu'on trouvera le moyen de leur procurer toute la solidité requise. Quoiqu'il en soit, on pourra prévenir ce danger, en faisant faire un autre Pressoir, muni de son cric, semblable en tout au premier, & en appliquant ce second Pressoir sur les bords du sillon KYZ, vis à vis &

à

à l'opposite du premier Pressoir; ensorte que ces deux Pressoirs antagonistes s'opposent mutuellement à leurs efforts, pendant que le premier ne laisse pas de presser le cable de toute sa force; il est évident que le pivot & la cheville n'en souffriront aucune atteinte, & n'auront par conséquent besoin d'autre solidité, que de celle qui est requise pour l'usage ordinaire du Cabestan.

XLVI.

Enfin, ce que j'ai dit sur le frottement du pivot & de la cheville du Cabestan, doit être aussi entendu de celui que souffrent les essieux, ou goujons des roulettes D, E, F; puisqu'il est clair, que ces essieux sont pressés vers le joug LM par l'action du cric, avec autant de force qu'elle presse le cable vers le centre du sillon, la pression & la contrepression étant toujours égales, comme le sont l'action & la réaction, suivant le principe général de la méchanique. Il en est de même des essieux des roulettes du Pressoir antagoniste, si on trouve à propos d'y en mettre un. C'est pour cela, que je n'en dis plus rien, non plus que de cette partie de la force qui est employée à plier à tout moment le cable, à mesure qu'il s'en présente une nouvelle portion prête à subir le Pressoir; la partie de force employée à cela est sans doute employée en pure perte, par rapport au fardeau à tirer. Or c'est un mal général & nécessaire, auquel est sujet l'usage du Cabestan fait à l'ordinaire, aussi bien que le nôtre. Ce n'est pas à ce mal qu'on demande du remède: il faudroit trouver l'art de faire des cables parfaitement flexibles; mais on ne trouvera jamais cet art.

F I N.



N°. CLXXIII.

SOLUTIO PROBLEMATIS CATENARII GENERALITER CONCEPTI,

Per Methodum HERMANNI † *ab errore repurgatam.*

PROBLEMA PRÆLIMINARE LEMMATICUM.

TAB. LXXXIII. N°. CLXXIII. *Fig.* 1

T*Res potentiæ in* A, C, H *sustinent punctum* B *in æquilibrio, agentes secundum directiones* BA, BC, BH *positione datas: datur potentia in* H; *quæruntur potentiæ in* A & C, *& earum differentia; seu, quod tantundem est, quæruntur tensiones filorum, earumque differentia?*

SOLUTIO.

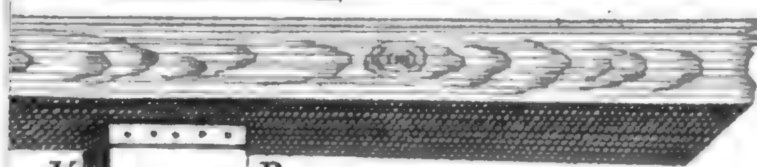
Producantur CB & HB, & assumtis BA & BD æqualibus, agantur AG & DF perpendiculares in HG, ut & AE perpendicularis in DF. Sit potentia in H $= f$, tensio fili BC $= t$, tensio fili BA $= T$. Ex Mechanicis patet $f : t =$ sinus anguli ABD [qui sit $= c$] : $\frac{AG}{AB}$. Hinc $t = \frac{f.\,AG}{c.\,AB}$. Item $f : T = c : \frac{DF}{AB}$, unde $T = \frac{f.\,DF}{c.\,AB}$; adeoque $T - t = \frac{f.\,(DF - AG)}{c.\,AB} = \frac{f.\,DE}{c.\,AB}$. *Q. E. I.*

COROLLARIUM.

Si angulus ABD infinite parvus, ita ut arcus AD, centro B descriptus, pro recta perpendiculari ad BA & BD haberi pos-

† *Phoronomia*, Lib. I. Cap. III. & *Append.* §. V.

N°. CLXXII.





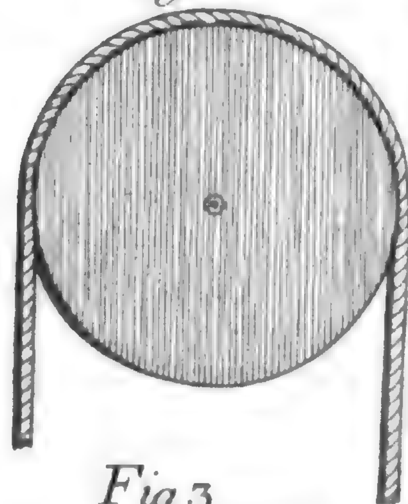
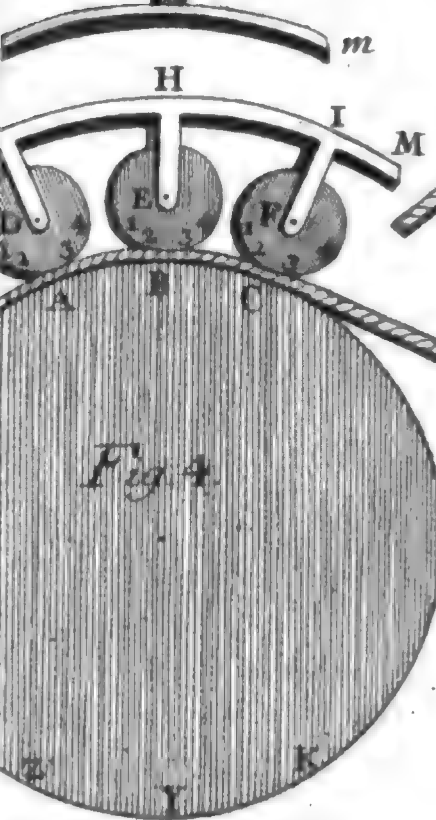


Fig. 3.



possit; erit [ob BD: BF = AD: DE] $DE = \frac{BF \times AD}{BD}$, quo substituto in $\frac{f.\,DE}{c.\,AB}$, provenit $T - t$ [$= \frac{f.\,DE}{c.\,AB}$] $= \frac{f.\,BF.\,AD}{c.\,AB.\,BD} =$ [ob $c = \frac{AD}{BD}$] $\frac{f.\,BF}{AB}$.

Applicatio hujus ad figuram Catenariæ.

TAB. LXXXIII. N°. CLXXIII. *Fig.* 2.

Quod hic est BF, vel BG, ibi est Nm, vel dx; AB est MN, vel ds; DF vel AG est Mm, vel dv; f est $g\,ds$, T repræsentat tensionem Catenæ in M, t tensionem in N; adeoque $T - t$ hoc est $dt = \frac{g\,ds.\,dx}{ds} = gdx$; & quia T [$\frac{f\,DF}{c.\,AB}$] jam est $\frac{g\,ds.\,dv}{c.\,ds} = \frac{g\,dv}{c}$, oportet ut $\int g\,dx$, seu T, vel t, sit $= \frac{g\,dv}{c}$, unde $\frac{g\,dv}{\int gdx} = c =$ [per naturam anguli contactus ut in Prop. seqq. ostendetur] $\frac{-d\left((a+x).\frac{dv}{ds}\right)}{(a+x).\frac{dx}{ds}}$; multiplicando per dx, & dividendo per dv, erit $\frac{g\,dx}{\int gdx} = \frac{-d\left((a+x).\frac{dv}{ds}\right)}{(a+x).\frac{dv}{ds}}$.

Hic jam utrobique habetur differentiale divisum per suum integrale; adeoque ambo integrantur per Logarithmos, indeque transitur ad numeros; & ita habebo [assumto aab ad homogeneitatem observandam] $\int g\,dx = \frac{aab}{(a+x).\frac{dv}{ds}}$. Quæ prorsus est eadem æquatio ad quam diversissima via in Solutione Problematis sequentis perveni. Quare reliqua perficiuntur ut ibi. *Q. E. F.*

PROBLEMA.

Sit jam Catena MND *uniformiter crassa, & gravis versus centrum* C, *in ratione data quacunque distantiarum.*

SOLUTIO.

TAB. LXXXIII. N°. CLXXII. *Fig.* 2. In ductas tangentes duas infinite propinquas ME, Ne, agantur ex C duæ normales CE, Ce. Et vocentur CD $= a$, PM $= x$, N$m = dx$, M$m = dv$, P$p = dz$, MN $= ds$, gravitas variabilis data lege $= g$. Primo patet angulum FMe esse mensuram amplitudinis arculi elementaris MN, seu quantitatem anguli contactus in M. Jam, ob triangula similia MNm, CMe, erit $ds : dv = a + x : \frac{(a+x).dv}{ds} =$ CE, & $ds : dx = a + x : \frac{(a+x).dx}{ds} =$ ME. Differentietur CE, non quidem actu, sed præponendo tantum litteram characteristicam d, ut tanto commodius pateat, quomodo instituenda sit integratio ut succedat, quem in finem scribo F$e = -d((a+x).\frac{dv}{ds})$; præmitto autem signum $-$, quia CM & CE alterne crescunt vel decrescunt. Sic ergo angulus FMe seu $\frac{Fe}{MF}$

$$= \frac{-d((a+x).\frac{dv}{ds})}{(a+x).\frac{dx}{ds}} = \epsilon.$$ Sed ex * Theoremate nuper demons-

TAB. LXXXIII. N°. CLXXIII. *Fig.* 3. * Theorema ad cujus demonstrationem hic provocatur ita demonstraveram: Curva MND concipiatur ut polygonum infinitilaterum, cujus tria latuscula sint MN, NO, OR, quorum puncta N, O trahantur viribus g, γ ad punctum datum C vergentibus; prolongentur lineæ directionum CN, CO ad G, H; & duo latuscula ON, RO ad S, T; vocentur anguli externi MNS, NOT, qui nihil aliud sunt quam anguli contactus, vel eorum sinus, a, α; sitque sinus anguli MNG $= b$, sinus anguli ROH $= \beta$; tensio fili NO $= t$. Erit, ex Staticis, $a : b = g : t$ & $\alpha : \beta = \gamma : t$, adeoque $\frac{bg}{a} = t = \frac{\beta\gamma}{\alpha}$; unde $\frac{a}{bg} = \frac{\alpha}{\beta\gamma}$. Dicantur porro sinus angulorum GNO $= e$, & HON $= \varepsilon$. Habetur, ex Trigonometricis, $e : \varepsilon =$ CO : CN, proinde $e \times$ CN $= \varepsilon$:

monſtrato, oportet $\frac{gds\times(a+x)\times\frac{dv^2}{ds^2}}{c}$ facere quantitatem conſtantem; quæ homogeneitatis conſervandæ gratia dicatur $=aab$. Et ita, multiplicando per c vel ejus valorem, habetur $gds \times (a+x)\times\frac{dv^2}{ds^2} = + aab \times \frac{-d((a+x)\times\frac{dv}{ds})}{(a+x)\times\frac{dx}{ds}}$. Nunc ſtatim video, ſi denominator membri poſterioris mutatur in aliquam potentiam quantitatis poſt litteram d poſitæ in numeratore, fore tunc fractionem integrabilem, quod alias non ita facile patuiſſet. Hoc fine ſeparo $\frac{dx}{ds}$ per multiplicationem & divido per $(a+x)\times\frac{dv^2}{ds^2}$. Quo facto, habebo $gdx = aab \times \frac{-d((a+x)\times\frac{dv}{ds})}{(a+x)^2\times\frac{dv^2}{ds^2}}$, quod eſt manifeſte integrabile; integretur ergo, & prodibit $\int gdx = aab \times \frac{1}{(a+x).\frac{dv}{ds}}$, ſeu reducendo

Oo 3 (a+

$= \epsilon\times CO$; ex quo fluit $\frac{a}{ebg\times CN} = \frac{\alpha}{\epsilon\beta\gamma\times CO}$. Quoniam itaque eſt uniformis relatio inter angulos & lineas ad punctum O pertinentes, quæ eſt inter eas ad punctum N pertinentes; oportet ut $\frac{a}{ebg\times CN}$ vel $\frac{\alpha}{\epsilon\beta\gamma\times CO}$ ſit quantitas conſtans per totam curvam. Hinc, cum in ſolutione Problematis ſit a vel $\alpha = c$, e vel $\epsilon = \frac{dv}{ds}$, g vero, vel $\gamma = gds$; & præterea ob angulos MNS vel NOT infinite parvos, cenſeatur ſinus anguli MNG = ſinui ang. ONG, vel ſinus ROH = ſinui NOH, hoc eſt, $b = e$, vel $\beta = \epsilon$; erit utique [invertendo terminos fractionis, & ſcribendo $a+x$ pro CN vel CO] $\frac{\frac{dv^2}{ds^2}\times gds\times(a+x)}{c}$ = conſtanti. *Q. E. D.*

$(a+x).dv.\int g\,dx = aabds$. Porro quia g datur per x, dabitur quoque [saltem per quadraturas] $\int g\,dx$; vocetur itaque $\int g\,dx = X$; unde $(a+x)\times X\times dv = aabds$, & $(a+x)^2\times X^2\times dv^2 = a^4bb\times ds^2 = a^4bb\times(dx^2+dv^2)$; separatisque dv & dx, prodibit $\frac{aabdx}{\sqrt{((a+x)^2\times X^2 - a^4bb)}} = dv = \frac{a+x}{a}dz$, quare $dz = \frac{a^3bdx}{(a+x)\sqrt{((a+x)^2\times X^2 - a^4bb)}}$. Q. E. I.

COROLLARIUM I.

Quod si g sit inverse ut aliqua potentia distantiarum; hoc est, si $g = \frac{ac^n}{(a+x)^n}$; adeoque $\int g\,dx$ seu $X = \frac{ac^n}{(1-n)}(a+x)^{1-n}$; abibit formula generalis in hanc,

$$dz = \frac{(1-n)aabdx}{(a+x)\sqrt{(c^{2n}.(a+x)^{4-2n} - (1-n)^2 aabb)}},$$

quæ diversa est ab ea quæ invenitur per Methodum *Hermannianam*.

COROLLARIUM II.

Existente vero $x=0$, prodit $\int g\,dx$ sive $X = \frac{ac^n}{1-n}a^{1-n}$; proinde verus & correctus valor ipsius X, erit $\frac{ac^n}{1-n}\times((a+x)^{1-n} - a^{1-n})$. Quare habebitur correcta formula pro casu præcedente hæc,

$$dz = \frac{aabdx}{(a+x)\sqrt{((a+x)^2\times\frac{c^{2n}}{(1-n)^2}\times((a+x)^{1-n} - a^{1-n})^2 - aabb)}}$$

$$= \frac{aabdx}{(a+x)\sqrt{(\frac{c^{2n}}{(1-n)^2}\times((a+x)^{2-n} - a^{1-n}(a+x))^2 - aabb)}}$$

Quia

Quia autem in casu quo a, vel distantia centri est infinita, videtur aliquid absurdi provenire, utpote $dz = \frac{b\,d\,x}{\sqrt{-bb}}$, quod est imaginarium; res ita est tractanda.

Conjiciatur $(a+x)^{2-n}$ in seriem, & habebitur $(a+x)^{2-n} = a^{2-n} + \frac{2-n}{1}a^{1-n}x + \&c$, a qua subtrahatur $a^{1-n}.(a+x)$, seu $a^{2-n} + a^{1-n}x$; remanebit $(1-n)a^{1-n}x$; nam reliqui termini in casu $a = \infty$ omnes evanescunt: adeoque jam erit $dz = \frac{b\,d\,x}{\sqrt{(c^{2n}a^{1-2n}xx - bb)}}$; ubi porro si arbitraria c sumatur æqualis a, fiet $dz = \frac{b\,d\,x}{\sqrt{(xx - bb)}}$, quæ est æquatio pro Catenaria vulgari: plane ut fieri debet.

COROLLARIUM III.

Manente distantia centri finita, si $n = 0$, hoc est si gravitas g sit uniformis; qui casus est *Hermannianus* *, erit $dz = \frac{a\,a\,b\,d\,x}{(a+x)\sqrt{((ax+xx)^2 - aabb)}}$; cujus integratio generaliter non dependet [quantum hactenus notum est] ab arcu circulari; proinde curva non erit algebraïca, multo minus Hyperbola, ut perperam invenit HERMANNUS. Hinc si $a = \infty$, erit $dz = \frac{b\,d\,x}{\sqrt{(xx - bb)}}$; iterum pro Catenaria vulgari; ut par est.

COROLLARIUM IV.

Si manente iterum distantia centri finita, sit $n = 1$; hoc est si gravitas g sit inverse ut distantia; oritur $d\,z = \frac{a\,a\,b\,d\,x}{(a+x)\sqrt{(\frac{0\,0\,c\,c}{0\,0} - a\,a\,b\,b)}}$; quod nihil indicat: cui incommodo ut occurratur, animadvertendum est, id ex eo venire,

* *Phoronomia*, pag. 46, & 382.

venire, quod in hoc casu $\int g\,dx$ algebraïce non possit integrari, qui casus per consequens excipi debet a generali expressione $\int g\,dx = X = \frac{ac^n}{(1-n)}((a+x)^{1-n} - a^{1-n})$. Sed integratio instituenda est per Logarithmos; nempe $g\,dx$ fit $\frac{ac\,dx}{a+x}$, proinde $\int g\,dx = acl(a+x)$, vel correcte $\int g\,dx$, seu $X, = acl(a+x) - acla = acl\left(\frac{a+x}{a}\right)$. Quo substituto in formula universali, emergit $dz = \frac{a^3 b\,dx}{(a+x)\sqrt{((a+x)^2 \times (acl\frac{a+x}{a})^2 - a^4 bb)}}$

COROLLARIUM V.

Sit jam $n = 2$; id est, sit gravitas reciproce in duplicata ratione distantiarum, quæ est vulgaris hypothesis; mutabitur formula pro potentiis *Coroll.* 2 exhibita, in hanc $dz = \frac{aab\,dx}{(a+x)\sqrt{(\frac{c^4xx}{aa} - aabb)}} = \frac{a^3 b\,dx}{(a+x)\sqrt{(c^4xx - a^4bb)}} =$ [assumta $cc = ab$] $\frac{aa\,dx}{(a+x)\sqrt{(xx - aa)}} =$ [faciendo $x = t - a$] $\frac{aa\,dt}{t\sqrt{(tt - 2at)}}$; id quod est integrabile: quod ita perficio. Diviso utroque termino per tt, habeo $\frac{aa\,dt}{t\sqrt{(tt-2at)}} = \frac{aa\,dt : tt}{\sqrt{(1 - 2a:t)}}$. Jam quia numerator est differentiale quantitatis signo radicali inclusæ, patet posse integrari. Ejus namque integrale est $= a\sqrt{(1 - \frac{2a}{t})} = \frac{a\sqrt{(t-2a)}}{\sqrt{t}} = \frac{a\sqrt{(x-a)}}{\sqrt{(x+a)}}$. Unde liquet curvam DNM non habere suum verticem in D, sed supra illud in L, ita ut CL sit dupla ipsius CD. Liquet etiam curvam habere asymtoton: existente enim x infinita, erit z vel $\frac{a\sqrt{(x-a)}}{\sqrt{(x+a)}} = \frac{a\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = a$; adeo ut sumto arcu DP = CD, producta

rec-

recta CP occurrat curvæ non nisi in distantia infinita: proinde ejus est asymtotos.

SCHOLIUM.

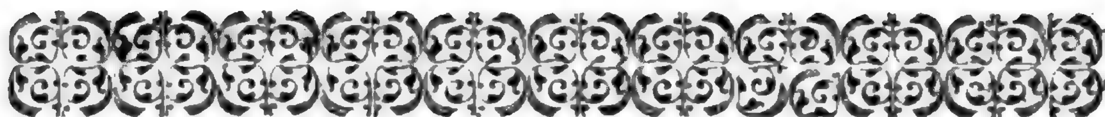
Si nulla attentione facta ad correctionem valoris ipsius X in *Coroll.* 2 adhibitam, formulæ expressionem reddere velimus generalissimam; oportet $\int g\,dx$, seu X, augere vel minuere data quavis $\frac{ac^n e}{1-n}$; faciendo $X = \frac{ac^n}{1-n}((a+x)^{1-n}+e)$; quo observato prodibit

$$dz = \frac{a^3 b\,dx}{(a+x)\sqrt{((a+x)^2 \times \frac{aac^{2n}}{(1-n)^2} \times ((a+x)^{1-n}+e)^2 - a^4 bb)}}$$

$$= \frac{aab\,dx}{(a+x)\sqrt{(\frac{c^{2n}}{(1-n)^2} \times (a+x)^{2-n} + (a+x)e)^2 - aabb)}}.$$

Hinc in casu Corollarii tertii, ubi $n = 0$, erit $dz = \frac{aab\,dx}{(a+x)\sqrt{(((a+x)^2+ea+ex)^2 - aabb)}}$, quæ jam comprehendit Hyperbolam æquilateram HERMANNI; assumta nimirum $e = 0$. Fit enim hoc modo $dz = \frac{aab\,dx}{(a+x)\sqrt{((a+x)^4 - aabb)}}$; quam æquationem Hyperbolæ convenire demonstrare possumus. Sed hæc est unica curva algebraïca, inter infinitas alias non algebraïcas, quæ Problemati *Hermanniano* satisfaciunt.

Si assumitur $e = -a$, oritur $dz = \frac{aab\,dx}{(a+x)\sqrt{((ax+xx)^2 - aabb)}}$; ut supra *Coroll.* 3; ubi Catenariam vulgarem contineri diximus, existente nimirum a infinito.



N°. CLXXIV.

SOLUTIO PROBLEMATIS

Curvaturæ laminæ elasticæ a pondere appenso curvatæ.

TAB. LXXXIV. N°. CLXXIV.

SUpponitur *primo* Lamina sine pondere; 2°. æqualiter crassa, vel potius consideratur ut linea recta in statu naturali; 3°. in singulis suis punctis æqualiter fortis. 4°. Extensiones quorumcunque extendentium esse in ratione virium extendentium, quæ est Hypothesis *Leibnitiana.* His præsuppositis, sit AB lamina elastica horizontaliter in plano AD infixa, & in suo statu naturali; AC eadem incurvata a pondere appenso P. In quocunque curvæ puncto R ducatur tangens RT, & intelligatur curva divisa in particulas infinite parvas & æquales Aa, Rr. Quoniam nunc pondus P diversimode vim suam exerit in singulis curvæ punctis; nimirum in remotioribus majorem, in propioribus minorem, & quidem in ratione distantiarum; fit ut rs perpendicularis in tangentem RT, quæ denotat extensionem qua particula R removetur per vim ponderis P a statu naturali RS, sit ad ab extensionem qua particula Aa removetur a statu naturali Ab, ut vis in R ad vim in A. Est autem vis in R ad vim in A, ut distantia CL ad distantiam CG; ideoque $CL : CG = rs : ab =$ [quia Rr & Aa ponuntur æquales] $rs : Rr + aA : ab =$ [RX, rX, & AF, aF, sunt lineæ evolventes curvæ ex cujus evolutione generatur curva CRA; proinde ob similitudinem triangulorum rRS, RXr & aAb, AFa] $rR : RX + FA : Aa = FA : RX$. Ergo $CL : CG = FA : RX$; & proinde $CL \times RX = CG \times FA =$ quantitati constanti aa. Sit igitur $CL = x$, $LR = y$; erit,

erit, ut in Calculo integrali inventum est *, RX $= \frac{(dx^2+dy^2)\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{-dxddy}$; ergo $\frac{x(dx^2+dy^2)\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{-dxddy} = aa$; multiplicetur utrumque per $-dx^2 ddy$, & dividatur per $(dx^2+dy^2)\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, habebitur $x\,dx = \frac{-aadx^2 ddy}{(dx^2+dy^2)\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$; eorum ergo integralia [quorum posterius invenitur per Regulas in Calculo integralium exhibitas, ponendo $dy = \frac{dx^2}{dm}$, provenit enim quantitas cujus integrale statim patet] $\frac{1}{2}xx = \frac{-aady}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$; eorumque quadrata $\frac{1}{4}x^4 = \frac{a^4 dy^2}{dx^2+dy^2}$, vel $x^4 dx^2 + x^4 dy^2 = 4a^4 dy^2$, & reducta æquatione, ita ut indeterminatæ sint separatæ, proveniet $\frac{axxdx}{\sqrt{(4a^4-x^4)}} = ady$. Constructio itaque curvæ habetur, mediante quadratura spatii, cujus natura exprimitur per hanc æquationem $4a^4 zz - x^4 zz = aax^4$. Et sic curva quæsita est ex ordine primo mechanicarum.

* N°. CXLIX, Lect. XVI, pag. 437, *Tom. III.*

N°. CLXXV.

DE LEGE VIRIUM

Qua fit ut mobile ad centrum descendat temporibus quæ sint ut potestates datæ distantiarum, a quibus descensum inchoat.

PROBLEMA I.

INvenire legem Virium, quibus mobile in singulis locis alicujus rectæ positione datæ urgeri oportet, ut ad punctum datum in recta ipsa data perveniat temporibus rationem habentibus ut datæ potesta-

 tes

tes distantiarum a puncto dato; inchoans motum a quiete, in qualibet distantia a puncto.

Vel, quod eodem redit,

Invenire qua lege virium mobile ad Centrum virium datum attrahi debeat, ut ad illud, ex quacunque distantia motum inchoans, descendat temporibus ordinatim datis, secundum applicatas alicujus ex genere Parabolarum vel Hyperbolarum ad asymtoton.

S O L U T I O.

TAB. LXXXIII. N°. CLXXV. *Fig.* 1 & 2

Esto C centrum virium; recta AC secundum quam mobile ad C trahitur. Curva CTP determinet tempora ordinatim data, ita nempe ut applicata AP designet tempus descensus per AC, motu inchoato a quiete in A; & quælibet alia applicata BT exprimat tempus per BC, motu pariter a quiete nascente in B. Quæritur curva CVR, cujus applicatæ AR, BV explicent vires quibus mobile in singulis locis A, B, urgendum est.

Sumantur in AC duæ portiones quæcunque AC, αC; quæ separatim positæ [*Fig.* 2.] intelligantur divisæ in particulas infinite parvas totis proportionales, quarum homologæ duæ sint ex. gr. B*b* & $\beta ϐ$, hoc est ut B*b*: $\beta ϐ$ = AC. αC = BC: $ϐ$C. Sint vero curvæ velocitatum ALM, $\alpha\lambda\mu$, quarum nempe applicatæ BL, $\beta\lambda$ exprimant velocitates acquisitas in B & β, post descensus per AB & $\alpha\beta$. Quod si itaque faciamus tempuscula per particulas homologas B*b* & $\beta ϐ$ ubique proportionalia temporibus per totas AC & αC, hoc est [in *Fig.* 1.] ipsis applicatis AP, $\alpha\pi$; habebimus AP : $\alpha\pi = \frac{Bb}{BL} : \frac{\beta ϐ}{\beta\lambda}$ = [ob B*b*: $\beta ϐ$ = AC: αC] $\frac{AC}{BL} : \frac{\alpha C}{\beta\lambda}$; unde BL : $\beta\lambda = \frac{AC}{AP} : \frac{\alpha C}{\alpha\pi}$.

Similiter habetur $bl : ϐ\lambda = \frac{AC}{AP} : \frac{\alpha C}{\alpha\pi}$; adeoque $bl : ϐ\lambda$ = BL: $\beta\lambda$; &, sumendo differentias, erit dBL : $d\beta\lambda$ = BL : $\beta\lambda$, hoc est

est incrementa velocitatum per particulas homologas Bb & $\beta\beta$ sunt ut ipsæ velocitates; unde etiam $BL \times dBL : \beta\lambda \times d\beta\lambda = BL^2 : \beta\lambda^2$; est autem [*Fig.* 1.] $BV \times dBT \left[BV \times \frac{Bb}{BL}\right] : \beta u \times d\beta\theta \left[\beta u \times \frac{\beta\mathfrak{b}}{\beta\lambda}\right] = dBL : d\beta\lambda = BL : \beta\lambda$; ideoque $BV : \beta u = \frac{BL^2}{Bb} : \frac{\beta\lambda^2}{\beta\mathfrak{b}} = \frac{BL^2}{AC} : \frac{\beta\lambda^2}{\alpha C} = \left[\text{ob } BL : \beta\lambda = \frac{AC}{AP} : \frac{\alpha C}{\alpha\pi} \right] \frac{AC}{AP^2} : \frac{\alpha C}{\alpha\pi^2}$. Sed sumtis CB & $C\beta$ æqualibus ipsis CA & $C\alpha$, degenerabunt BV & βu in AR & $\alpha\varrho$; erit itaque etiam $AR : \alpha\varrho = \frac{AC}{AP^2} . \frac{\alpha C}{\alpha\pi^2}$; unde si curva data CTP talis sit, ut abscissis quatuor quibuslibet existentibus proportionalibus [$AC : \alpha C = BC : \beta C$]; etiam $\frac{AC}{AP^2}$ & $\frac{\alpha C}{\alpha\pi^2}$ sint proportionales ipsis $\frac{BC}{BT^2}$ & $\frac{\beta C}{\beta\theta^2}$; hoc est, ut $\frac{AC}{AP^2} : \frac{\alpha C}{\alpha\pi^2} = \frac{BC}{BT^2} : \frac{\beta C}{\beta\theta^2}$; adeoque [ob $AC : \alpha C = BC : \beta C$] ut sit $AP : \alpha\pi = BT : \beta\theta$; hæc autem affectio cum competat omni generi Parabolarum & Hyperbolarum ad asymtoton; manifestum est legem virium centripetarum hanc esse ut AR sit ubique proportionalis ipsi $\frac{AC}{AP^2}$; adeoque & ipsam curvam AVR esse ex Parabolarum vel Hyperbolarum genere.

THEOREMA.

***Si distantia indeterminata mobilis descendentis ex quiete sumta vocetur* x; *tempusque per eam se habeat ut* x^n; *erit vis centripeta ipsi* x *respondens ut* $\frac{x}{x^{2n}}$, *seu ut* x^{1-2n}.**

Hoc patet ex analysi præcedente: & vicissim synthetice res facillime demonstrari potest.

PROBLEMA II.

TAB. LXXXIII. N°. CLXXV. Fig. 3.

Invenire curvam AB, *ita ut mobile descendens per quemvis ejus arcum* BA *vi gravitatis suæ, incipiens a quiete, impendat tempus quod sit proportionale datæ cuivis potestati altitudinis correspondentis* AC.

SOLUTIO.

Ex præcedentibus facile habetur. Sit enim $AC = x$, $BC = y$, $AB = s$; exponens potestatis $= n$, vis gravitatis a; erit ergo vis descendendi quæ exercetur secundum tangentem in quolibet puncto $B = \frac{adx}{ds}$. Quæratur igitur curva AB, cujus portio quælibet AB sit proportionalis alicui potestati abscissæ AC, & ita quidem ut $\frac{adx}{ds}$ sit proportionalis ipsi $\frac{AB}{x^{2n}}$: curva enim AB erit, per præcedentem, ea quæ quæritur. Sit itaque AB seu $s = x^m$; adeoque $ds = mx^{m-1}dx$, & $\frac{adx}{ds} = \frac{a}{mx^{m-1}} = \frac{bAB}{x^{2n}} = \frac{bx^m}{x^{2n}}$; unde $ax^{2n} = bmx^{2m-1}$. Ut igitur x utrobique parem habeat dimensionis numerum, oportet ut $2n = 2m - 1$; ex quo sequitur m fore $= n + \frac{1}{2}$: invento itaque exponente m potestatis m abscissæ AC, cui proportionalis esse debet arcus AB, quærenda nunc porro est relatio coordinatarum AC & CB per viam communem. Quia nempe $s = x^{n+\frac{1}{2}}$, erit $ds = (n+\frac{1}{2})\, x^{n-\frac{1}{2}}\, dx$, & ds^2 [$dx^2 + dy^2$] $= (n+\frac{1}{2})^2 \times x^{2n-1}\, dx^2$, adeoque $dy^2 = (n+\frac{1}{2})^2\, x^{2n-1}\, dx^2 - dx^2$, & $dy = dx\sqrt{((n+\frac{1}{2})^2\, x^{2n-1} - 1)}$; vel ad supplenda homogenea $(n+\frac{1}{2})\, c^{n-\frac{1}{2}}\, dy = dx\sqrt{((n+\frac{1}{2})^2\, x^{2n-1} - (n+\frac{1}{2})^2\, c^{2n-1})}$, hoc est $c^{n-\frac{1}{2}}\, dy = dx\sqrt{(x^{2n-1} - c^{2n-1})}$. *Q. E. I.*

COROL-

COROLLARIUM I.

Si $n = 0$, qui casus est tautochronæ *Hugenianæ*, provenit $dy = dx \surd(\frac{c - x}{x})$; æquatio ad Cycloidem.

COROLLARIUM II.

Si $n = 1$, habetur $dy = dx \surd(\frac{x - c}{c})$; quod cum integrari possit; est enim $y = \frac{2}{3} \times (x - c) \surd \frac{x - c}{c}$, seu $\frac{2}{3\surd c}(x - c)^{\frac{3}{2}}$; patet curvam quæsitam esse algebraïcam, & quidem Parabolam cubicalem secundam; cujus vertex V distat supra initium abcissarum A quantitate $AV = c$; parameter vero $= \frac{9}{4} c$, seu $\frac{9}{4}$ AV: vel vicissim, si parameter ponatur $= p$, erit AV $= \frac{4}{9} p$. Elegans hujus curvæ proprietas; & mirabilis consensus cum Isochronismo *Leibnitiano*, qui eidem curvæ sed contrario situ competit. Notandum tamen descensum per partem VA, utpote qua deficit curva, physice esse impossibilem; quoniam portio curvæ ab V ad A tendens minor esse deberet ipsa recta VA. Quod idem accidit omnibus curvis, quarum initium V supra A cadit, quotiescunque nempe $n > \frac{1}{2}$. TAB. LXXXIII. N°. CLXXV. *Fig.* 4.

COROLLARIUM III.

Si $n = \frac{1}{2}$; curva AB abit in lineam rectam; quod aliunde ex Demonstratis *Galilæanis* diu notum est.

SOLUTIO ALTERA CLARIOR.

Sit tempus per arcum BA, ex quietis puncto B, ut s^p adeoque s^p ut x^n; unde vis secundum tangentem $[\frac{adx}{ds}]$ erit, per præc. ut $s^{1 - 2p}$. Ex priori comparatione habetur $s = x^{n:p}$ TAB. LXXXIII. N°. CLXXV. *Fig.* 3.

&

& $ds = \frac{n}{p} x^{(n-p):p} dx$: ex altera vero $s = (\frac{adx}{ds})^{1:(1-2p)}$ $=$ [ſubſtituto valore ipſius ds] $b x^{(p-n):(p-2pp)}$. Ergo, ut dimenſiones ipſius x identificentur, erit $\frac{n}{p} = \frac{p-n}{p-2pp}$; ex quo fluit $p = \frac{2n}{2n+1}$. Jam per viam ordinariam quæratur curva, ita ut $x^n = s^{2n:(2n+1)}$ &c.

N°. CLXXVI.

DE CURVA QUAM DESCRIBIT CORPUS INCLUSUM IN TUBO CIRCULANTE.

LEMMA

Inſerviens Solutioni Problematis ſequentis.

TAB. LXXXIV. N°. CLXXVI. *Fig.* 1.

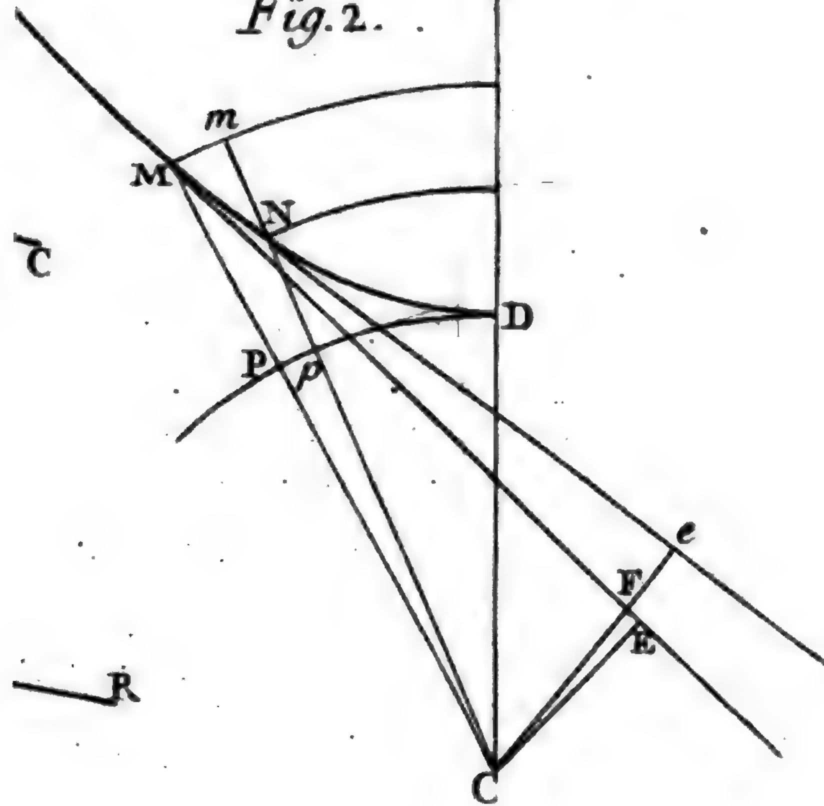
SI ex puncto quodam C ducantur tres rectæ CA, CB, CD, reſecantes ex recta PD partes AB, BD, infinite parvas & inter ſe æquales: Erit, ducta CP perpendiculari ad PD, differentia angulorum ACB & BCD, hoc eſt, ACB − BCD $= \frac{2ps\,ds^2}{(pp+ss)^2}$; nominando ſcilicet conſtantem CP $= p$, & variabilem PA $= s$.

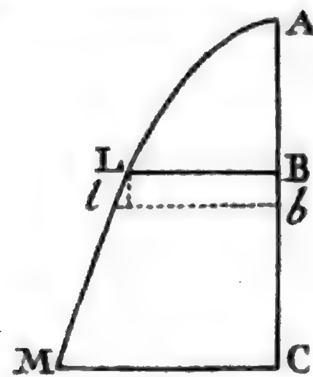
Hujus veritas facile demonſtratur: differentietur enim angulus ACB; aſſumta nempe ds pro conſtante: quo facto prodibit prædicta formula.

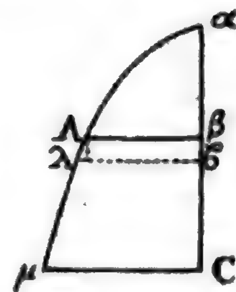
PROBLEMA.

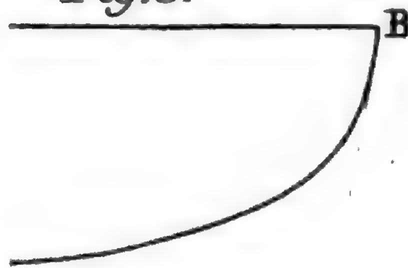
Determinare curvam, quam deſcribit Corpus incluſum in Tubo, qui in plano horizontali uniformiter movetur, circa aliquem axem in ipſo

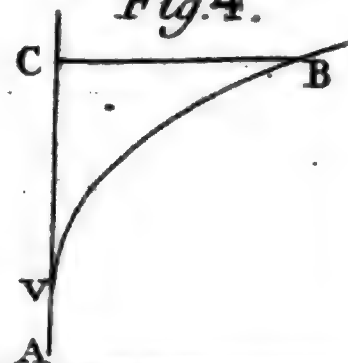
N.° CLXXIII











ipso tubo sumtum. Supponitur Corpus in Tubo circulante moveri posse liberrime, & sine ulla frictione.

SOLUTIO.

Sit curva ABE, quam corpus, instar puncti considerandum, describit durante circulatione tubi CA circa axem fixum C. Sintque variabiles tubi positiones CA, CB, CE, quarum longitudines dicantur $= x$, facientes angulos infinite parvos æquales ACB, BCE, qui per consequens exprimant tempuscula æqualia, quibus tubi positio CA pervenit in positionem CB, & hæc in tertiam CE. Fiantque porro, ex centro C & radiis CA, CB, arculi AG, BH, qui more solito concipiantur ut rectæ perpendiculares ad CB, CE; erunt BG vel EH $= dx$; dicantur autem AG vel BH $= dy$, & AB vel BE $= ds$. TAB. LXXXIV. N°. CLXXVI. *Fig.* 2.

His præmissis, nunc ita procedo. Postquam corpus percurrit lineolam AB, tempusculo designato per angulum ACB, pergeret moveri, si liberum esset, in eadem directione, & tempusculo æquali percurreret aliam particulam BD æqualem præcedenti AB. Sed, quia tubus simul cum corpore movetur, occupaturus eodem tempusculo situm CE, qui cum CB facit angulum BCE æqualem angulo ACB; ideoque corpus, quod alioquin esset in D, reperietur in E, in æquali distantia a centro C; quoniam scilicet tubus vim habet propellendi corpus in directione DE normali ad CD, quæ CD facere censetur cum CE, angulum DCE infinities minorem angulo BCE, licet hic ipse sit infinite parvus.

Ductis igitur duabus tangentibus proximis BP, ER, demissisque in illas ex centro C normalibus CP, CR; habebitur, vi Lemmatis, differentia angulorum ACB & BCD; quando nempe in formula $\frac{2ps\,ds^2}{(pp+ss)^2}$, substituitur $\frac{xdy}{ds}$ pro p, & $\frac{xdx}{ds}$ pro s; prodibit enim $BCA - BCD = \frac{2dydx}{xx}$.

Jam vero concipiendo DF parallelam ipsi CP vel CR;

evidens est fore $\frac{DF}{ds}$ seu $\frac{DF}{BD} = \frac{RQ}{QB} = \frac{d(xdy:ds)}{xdx:ds}$; unde DF $= \frac{ds^2 d(xdy:ds)}{xdx}$.

Item, propter triangula similia hDB, FDE, erit $dx:ds = DF:DE$; proinde $DE = \frac{ds^3 d(xdy:ds)}{xdx^2}$, & $\frac{DE}{CE} = \frac{ds^3 d(xdy:ds)}{xxdx^2}$ = mensuræ anguli DCE. Est autem DCE differentia inter angulos BCE & BCD, seu inter ACB & BCD, quæ, per Lemma nostrum, $= \frac{2dydx}{xx}$. Hinc lucramur hanc æquationem $\frac{ds^3 d(xdy:ds)}{xxdx^2} = \frac{2dydx}{xx}$, seu $ds^3 d(xdy:ds) = 2dydx^3$.

Præterea, ex conditione Problematis, cum sint anguli ACB, BCE, &c. omnes inter se æquales; erunt descripto circulo KO, centro C & radio arbitrario $CM = a$, omnes arculi MN, NO, &c. æquales, utpote mensuræ illorum angulorum: Dicatur ergo unusquisque arculus $= dz$, unde $a:x = dz:dy$; adeoque $dy = \frac{xdz}{a}$, quo valore substituto in æquatione $ds^3 d(xdy:ds) = 2dydx^3$, emergit hæc altera $ds^3 d(xxdz:ds) = 2xdx^3 dz$, vel, deleto utrobique dz constanti, hæc $ds^3 d(xx:ds) = 2xdx^3$; quæ differentiando actualiter $xx:ds$, & tum dividendo per x, hanc præbet æquationem $2dxds^2 - xdsdds = 2dx^3$. Porro pro ds^2 & pro $dsdds$ substituantur eorum valores $dx^2 + dy^2 = dx^2 + \frac{xxdz^2}{aa}$ & $dxddx + \frac{xdxdz^2}{aa}$; quo facto, resultabit $2dx^3 + \frac{2xxdxdz^2}{aa} - xdxddx - \frac{xxdxdz^2}{aa} = 2dx^3$; quæ reducta, dat hanc simplicem æquationem, & quidem integrabilem, $xdxdz^2 = aadxddx$. Integretur ergo, observando debitam rectificationem, & habebitur $xxdz^2 - bbdz^2 = aadx^2$.

Notetur intelligi per b corporis distantiam initialem, seu minimam a centro C; ubi scilicet corpus incipit moveri in directione perpendiculari ad tubum; ita ut initiale incrementum

dx

dx hujus distantiæ, pro nihilo sit censendum, respectu subsequentium dx. Ob hanc rationem, rectificationis gratia, scribendum fuit $xxdz^2 - bbdz^2 = aadx^2$, eum in finem ut utrumque æquationis membrum simul evadat $= 0$, ab initio, nempe, ubi $x = b$, & $dx = 0$.

Cæterum æquatio inventa $xxdz^2 - bbdz^2 = aadx^2$ nobis dat $dz = \frac{adx}{\surd(xx - bb)}$, seu $z = \int \frac{adx}{\surd(xx - bb)} = a \times \log. (x + \surd(xx - bb))$, & ita habebimus z datum per logarithmum functionis in x expressæ. Quod si vero lubeat habere valorem ipsius x datum per functionem aliquam ipsius z; ponamus c esse talem numerum ut sit $lc = 1$; erit per naturam logarithmorum $c^{z:a} = x + \surd(xx - bb)$, vel $c^{z:a} - x = \surd(xx - bb)$; unde elicietur $x = \frac{1}{2} c^{z:a} + \frac{1}{2} bbc^{-z:a}$ $=$ [assumpta b pro unitate] $\frac{1}{2}(c^{z:a} + c^{-z:a})$.

CONSTRUCTIO CURVÆ.

Ponamus CKT esse positionem initialem tubi circulantis circa centrum C, & ex puncto K, corpus incipere motum suum in curva KBE; quæ est determinanda. TAB. LXXXIV. N°. CLXXVI. *Fig.* 3.

Quod ut commodissime fiat, describatur, centro C & radio CK, circulus KMN; transeatque per K Logarithmica Spiralis semi-rectangula hg KGH. Capiantur ab utraque parte rectæ CK duo arcus æquales KM, Km, & per puncta M, m, ductæ ex centro C rectæ CM, Cm secent Spiralem in punctis G, g. Producatur CG ad L ita ut GL sit $=$ Cg: Denique bifariam secetur CL in B: Dico fore B in curva desiderata KBE. *Q. E. F.*

DEMONSTRATIO.

Evidens est $\frac{z}{a}$ denotare mensuram anguli TCB, quem

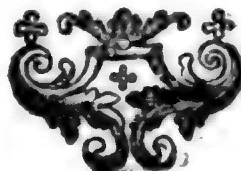
quælibet positio tubi CB facit cum positione ejusdem initiali CT: cum vero angulus TCB idem sit cum angulo KCM, erit radius a longitudinis arbitrariæ: sumatur ergo ille $= b = 1$; ipseque arcus KM $= z$; quo facto, exprimetur CB, vel $x = \frac{1}{2} c^{z} + \frac{1}{2} c^{-z} = \frac{1}{2} (c^{z} + c^{-z})$. Est autem ex natura Spiralis Logarithmicæ semirectangulæ CG $= c^{z}$, & Cg $= c^{-z}$; adeoque CG + Cg, id est, CL $= c^{z} + c^{-z}$, hujusque dimidium, id est, CB $= \frac{1}{2} (c^{z} + c^{-z})$. *Q. E. D.*

COROLLARIUM I.

Quod si arcus uterque KM, Km decrescendo ultra punctum K loca sua inter se permutent, ita ut M perveniat in m, & m in M; patet utique punctum β analogum ipsi B, & hoc ipsum B, æqualiter distare a centro C, & sub æqualibus angulis KCβ, KCB. Unde sequitur ramos ambos curvæ Kβ, KB sibi invicem similes esse & æquales.

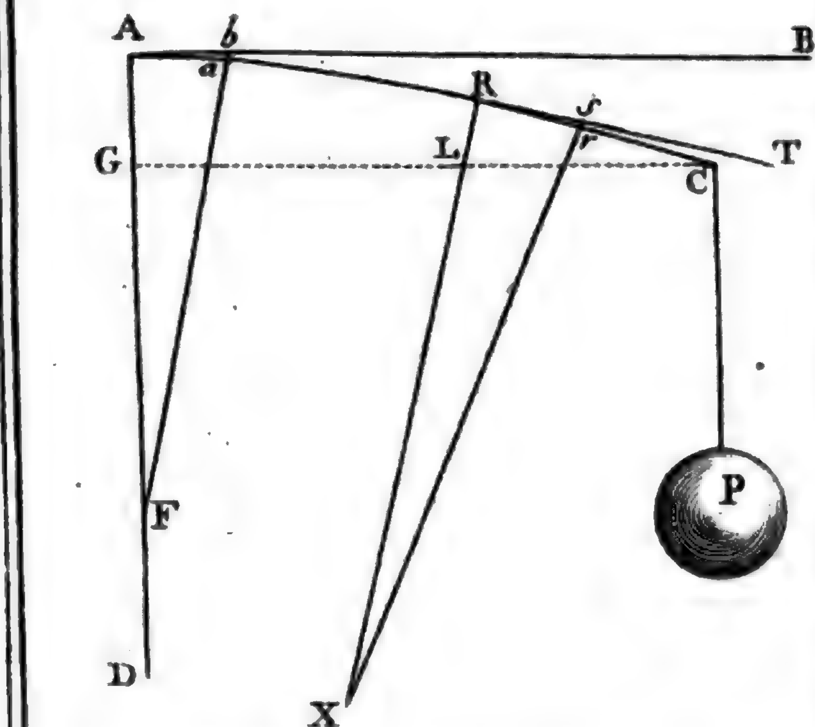
COROLLARIUM II.

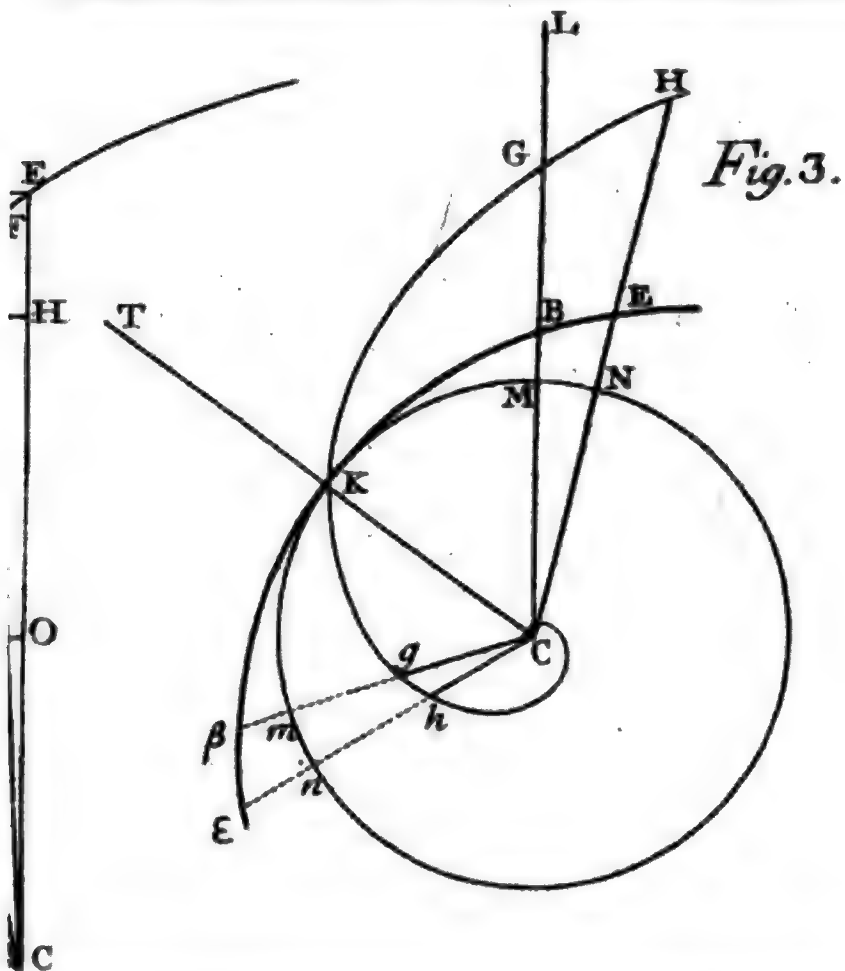
Distantia CK initialis a centro C est omnium distantiarum CB vel Cβ minima; proinde tota curva $\varepsilon\beta$KBE cadit extra circumferentiam MBm, quam tangit in solo puncto K. Res est clara, quia nempe tres rectæ Cg, CK, CB sunt continue geometrice proportionales, per naturam Logarithmicæ Spiralis; & media proportionalis semper minor est semisumma extremarum: Ergo &c.



PRO-

N°. CLXXIV.







N°. CLXXVII.

PROPOSITIONES VARIÆ MECHANICO-DYNAMICÆ.

I.

SIT corpus quodcunque, vel planum tantum materiale ABCD, in quod agat potentia P, trahendo vel pellendo in directione PR, ex. gr. ope fili, quod in R alligatum esset, & potentia quædam in P applicata ageret in planum AC, secundum fili directionem: dico eodem modo, eademque vi attractum iri AC, si, soluto nodo alligationis R, alligetur filum in quovis alio puncto S vel T; dummodo sumatur illud punctum in eodem filo PR, sive prolongato, sive decurtato. TAB. LXXXV. *Fig.* 1.

Res est per se clara, & instar Axiomatis habenda; quia longitudines directionum virium, seu potentiarum, nihil mutant in effectu.

II.

De compositione & resolutione virium.

Duæ vires, vel potentiæ, in commune punctum P agentes, quarum directiones & intensitates designentur per rectas PA & PB, dicuntur *componi*, si, iis remotis, substituitur vis tertia C, quæ sola eodem nisu vel conatu agit in P, secundum directionem PC, quo antea egerant simul duæ A & B. Atque vicissim, potentia C, expressa per rectam PC, *resolvi* vel *decomponi* dicitur in duas PA & PB, quæ, remota priori, eun- TAB. LXXXV. *Fig.* 2.

dem nisum exerunt in punctum P, in directione PC, quam fecerat sola potentia PC.

III.

TAB. LXXXV. *Fig. 3.*

Sint jam tres potentiæ A, B, & D, repræsentatæ per rectas PA, PB, PD, agentes in punctum P mobile in omnes plagas, quod in æquilibrio servetur a tribus istis potentiis simul agentibus; liquet, ex præcedenti Definitione, unamquamque ex istis tribus potentiis æqualem esse & directe oppositam ei, quæ ex reliquis duabus componitur. Finge enim duas quascunque, ex. gr. PA & PB removeri, earumque loco substitui æquipollentem PC, quæ utique sola resistet potentiæ tertiæ PD, & ambæ punctum P in æquilibrio retinere pergent; adeoque in directum erunt positæ, & altera alteri æqualis erit.

IV.

TAB. LXXXV. *Fig. 4.*

Duo demonstranda jam sunt, 1°. Potentiam PC, compositam, in sensu prædicto, ex potentiis PA & PB, eum habere situm, ut PA sit ad PB sicuti sinus anguli BPC ad sinum anguli APC; seu ut sinus anguli BPD ad sinum anguli APD. 2°. Completo parallelogrammo, cujus latera sint PA, PB, fore ejus parallelogrammi diagonalem ipsissimam PC; quæ & situm & quantitatem potentiæ compositæ designabit.

Demonstrationem utriusque ex natura & proprietate vectis deduco, hunc in modum. Directiones potentiarum PA, PB, & PD, vel PC, quæ utique in communi plano jacebunt, facient ut hoc ipsum planum maneat immotum, etiamsi sollicitatum in tres diversas plagas a P versus D, a P versus A, & a P versus B. Ductis duabus perpendicularibus CE, CF in latera PA, PB, si opus, prolongata; solvatur nodus P, & transferatur potentia A ad punctum E, potentia B ad punctum F, & potentia D ad punctum C, servatis nimirum pristinis suis directionibus. Liquet, ex §. 1, planum etiamnum in æquilibrio mansurum; atque sic considerari potest ECF tanquam

quam vectis inflexus, ubi potentia D, ad C applicanda, vicem ſubit hypomochlii ſuſtinentis duas reliquas potentias applicatas perpendiculariter ad extremitates brachiorum E & F. Adeoque, ex natura vectis in æquilibrio exiſtentis, erit potentia A ad potentiam B, hoc eſt, potentia E ad potentiam F, ut longitudo brachii CF ad longitudinem brachii CE. Eſt vero [ſumta PC pro radio, ſeu ſinu toto] ſinus anguli CPF ad ſinum anguli CPE, ut CF ad CE, ſeu [ob ſimilitudinem triangulorum CBF, CAE] ut CB ad CA, hoc eſt ut PA ad PB. Unde ſequitur directionem potentiæ compoſitæ ita ſecare angulum quem faciunt directiones componentium, ut potentiæ componentes ſint in ratione ſinuum angulorum partialium alternatim ſumtorum; atque adeo directionem potentiæ compoſitæ coincidere cum diagonali parallelogrammi, cujus latera proportionalia ſunt potentiis componentibus. Hæc prima pars eſt aſſerti, de ſitu directionis potentiæ compoſitæ.

Altera pars demonſtranda reſtat; nimirum ſi latera parallelogrammi deſignent potentias ipſas componentes, fore ut ejuſdem diagonalis longitudo deſignet quoque potentiæ compoſitæ quantitatem, ſeu intenſitatem. Sint igitur tres potentiæ A, B, D, punctum P ſollicitantes, illudque in æquilibrio ſervantes; ſintque ipſæ expreſſæ per longitudines rectarum PA, PB, PD. Quemadmodum itaque potentia PD, in directionem oppoſitam PC verſa, dicitur compoſita ex potentiis PA & PB, ita eodem ſenſu, qualibet alia PA prolongata in PG æqualem & oppoſitam, hæc ipſa PG exprimet potentiam compoſitam ex potentiis PB & PD. Quare hic etiam, erit potentia PB ad potentiam PD, ut ſinus anguli DPG ad ſinum BPG; hoc eſt, ut ſinus anguli CPA ad ſinum anguli CAP, ſeu ut CA, vel PB, ad PC; unde longitudo PB ad longitudinem PC, ut potentia PB ad potentiam PD. Ergo etiam PC exprimet potentiam PD, cui æqualis & oppoſita eſt illa quæ ex PA & PB componitur. *Q. E. D.*

TAB. LXXXV. *Fig.* 5.

V.

V.

Scholium.

Peccant, qui confundunt compositionem virium cum compositione motuum. Vis enim, vel potentia, utpote consistens in solo nisu, vel conatu, ad motum generandum, nullam sane velocitatem actualem [ne minimam quidem] producit, si corpus in quod agit est immobile. Ubi perfectum est æquilibrium, ibi nullus adest motus. Quî ergo considerari possit motus, in æquilibrii natura explicanda, non video. Archimedes, aliique ex Veteribus, ad vectis indolem recurrerunt, ut phænomena gravitationum se mutuo in æquilibrio vel quiete retinentium demonstrarent. Nos, eorum exemplum secuti, idem fecimus, dum potentiarum compositionem ad vectis leges, utpote a longo adeo tempore demonstratas atque receptas, reduximus; rejecto nempe explicandi modo recentiorum Geometrarum, ut Cartesii, Stevini, Newtoni, Varignonii, Hermanni, aliorumque, qui velocitatem, saltem initialem, in auxilium vocarunt, ad principii elegantissimi veritatem stabiliendam; ubi tamen nulla prorsus adest velocitas, nequidem infinite parva. Quæritur enim, cur tres potentiæ A, B, D, commune punctum D sollicitantes, ea qua dictum est conditione, perfectum inter se servent æquilibrium? Quomodo igitur introduci possit ulla velocitas, ubi perfecta adest quies, non video.

VI.

De viribus motricibus ad vectem applicatis.

TAB. LXXXV. *Fig.* 6. Sit rigida recta, tanquam vectis considerata, mobilis circa punctum fixum C; vehatque secum, dum rotatur circa C, corpus aliquod datum *B* in loco dato rectæ rigidæ AC, quod sit gravitatis expers. Ad punctum A quodvis in vecte, applicet

cetur vis motrix $= m$, agens in vectem secundum directionem normalem D A. Quæritur vis acceleratrix, quam a vi motrice m acquiret corpus *B* in arculo Bb?

SOLUTIO.

Dicatur CA $= p$, & CB $= q$. Jam si corpus *B* esset in ipso loco A, ubi vis motrix applicatur, hoc est, si $q = p$, foret, per vulgarem Legem Dynamicam, vis acceleratrix absoluta $= \frac{m}{B}$, qua cum describeret rotando arculum Aa. Sed si distantia CB a centro rotationis C major minorve est quam distantia CA; oportet sumere, ex natura vectis, momentum, quod habebit vis motrix m in loco vectis B, & quod erit $\frac{pm}{q}$; faciendo scilicet $q : p = m : \frac{pm}{q}$; atque sic $\frac{pm}{q}$ erit vis motrix, qua corpus *B* immediate urgeri intelligitur; quare dividendo per massam *B*, habebitur $\frac{pm}{qB} =$ vi acceleratrici absolutæ corporis *B*, qua describit arculum Bb.

COROLLARIUM.

Dividendo porro inventam vim acceleratricem absolutam $\frac{pm}{qB}$ per distantiam CB, seu per q, habebitur vis acceleratrix angularis $= \frac{pm}{qqB}$, qua nimirum angulus BCb crescendo ampliatur. Mutatis distantia CB & massa *B*, ita ut illa jam sit $= r$, hæc vero $= E$; erit utique vis acceleratrix angularis $= \frac{pm}{rrE}$. Quod si ergo hæ duæ vires acceleratrices angulares debeant esse æquales, oportet ut sit $\frac{pm}{qqB} = \frac{pm}{rrE}$, adeoque $qqB = rrE$; hoc est, massæ *B* & *E* debent esse reciproce proportionales quadratis distantiarum a centro rotationis.

Dico itaque eandem vim motricem requiri in puncto A applicandam, ad id ut angulus ACa eadem acquirat incrementa, quocunque in loco locetur corpus *B*; modo ejus massa sit reciproce proportionalis quadrato distantiæ suæ a centro circulationis C.

V I I.

TAB. LXXXV. *Fig.* 7.

Sit nunc vectis C A mobilis circa centrum C, & oneratus pluribus corporibus *B*, *E*, *F* &c. quamcunque rationem inter se habentibus, & in quibuscunque distantiis CB, CE, CF &c. positis. Vis motrix autem *m* applicata in A, secundum directionem D A, sit ea, ut in dato tempusculo vectem AC promoveat ex situ AC in situm aC, hoc est, ut angulus ACa sit vis acceleratrix angularis. Dico, si sublatis corporibus *B*, *E*, *F* &c. alia totidem substituantur in puncto A locanda, & quidem $\frac{CB^2}{AC^2} \times B$ pro *B*, $\frac{CE^2}{AC^2} \times E$ pro *E*, $\frac{CF^2}{AC^2} \times F$ pro *F*, &c. Dico, inquam, eandem vim motricem *m* imprimere toti massæ collectæ $\frac{CB^2 \times B + CE^2 \times E + CF^2 \times F, \&c.}{AC^2}$ similem vim acceleratricem angularem ACa; ita ut, eodem dato tempusculo, vectis ex situ AC veniat in situm aC.

Veritas hujus patet ex præcedenti; cum enim eadem vis requiratur in A, ad pellendum corpus *B* per B*b*, quæ requiritur ad pellendum corpus $\frac{CB^2 \times B}{AC^2}$, in A locatum, per A*a*, in eodem tempusculo; vocetur illa vis α: & vis alia in A requiritur eadem, ad pellendum corpus *E* per E*e*, quæ requiritur ad pellendum $\frac{CE^2 \times E}{AC^2}$, in A locatum, per A*a*; vocetur illa vis β: itemque etiam alia vis in A requiritur eadem, ad propellendum corpus *F* per F*f*, qua opus est ad propellendum corpus $\frac{CF^2 \times F}{AC^2}$, in A locatum, per A*a*, quæ vis dicatur γ; omnes itaque vires $\alpha + \beta + \gamma$ vocari possunt *m*. Ergo &c.

Idem

VIII.

Idem quoque valet de vecte plurium brachiorum, quorum unumquodque ſuum peculiare corpus, ſine gravitate conſideratum, in extremitate alligatum habeat. Ut ſi circa punctum C moveatur vectis CA, in communi plano cum brachiis CB, CE, CF &c. onuſtis corporibus *B*, *E*, *F*, &c. ac angulos invariabiles ACB, ACE, ACF &c. facientibus, adeo ut cum CA transfertur in C*a*, veniant quoque brachia CB in C*b*, CE in C*e*, CF in C*f*, &c. ſub angulis BC*b*, EC*e*, FC*f*, &c. ſingulis æqualibus angulo AC*a*. Conſtat utique, ex natura vectis, vim motricem *m*, in A applicatam, haud aliter agere in corpora *B*, *E*, *F*, &c. quam ſi illa eſſent omnia alligata in ipſa recta AC in diſtantiis reſpective æqualibus ipſis CB, CE, CF. Ac proinde nunc etiam vis motrix *m* toti Syſtemati corporum eandem vim acceleratricem angularem circa centrum C imprimit, quam imprimeret unico corpori in A locando, quod eſſet æquale $\frac{CB^2 \times B + CE^2 \times E + CF^2 \times F, \&c.}{AC^2}$. Etenim in corporibus *B*, *E*, *F*, &c. gravitatis expertibus, nulla alia vis reſiſtens concipitur, quam quæ ab eorum inertia oritur. Hæc autem ſemper agit in oppoſita tendentia ad motum, hoc eſt, corpora *B*, *E*, *F*, &c. reſiſtunt per inertiam ſuam in directionibus *b*B, *e*E, *f*F, &c. normalibus ad CB, CE, CF; eodem prorſus modo ac ſi ſingula corpora exiſterent in ipſo vecte AC ad æquales a puncto fixo C diſtantias CB, CE, CF. TAB. LXXXV. *Fig.* 8.

IX.

Hinc nova deducitur Theoria pro determinatione Centri oſcillationis, quæ elegans eſt, & maxime genuina. Finge in plano verticali lateraliter oſcillanti circa punctum ſuſpenſionis C [ad hunc namque modum oſcillandi omnium figurarum corporearum oſcillationes reduci poſſunt;] finge, inquam, plura corpuſcula gravia *B*, *E*, *F* &c. invariabilem inter ſe ſitum haben- TAB. LXXXV. *Fig.* 9.

tia, in hoc plano simul osculari circa punctum C. Quæritur longitudo Penduli simplicis, quod sit isochronum oscillationibus Systematis corpusculorum *B*, *E*, *F* &c?

Per centrum gravitatis A totius Systematis ducatur & producatur recta CA, atque etiam agantur rectæ AB, AE, AF, &c. quæ considerentur tanquam totidem brachia vectis principalis CA, ita ut si tantillum dimoveatur ex situ verticali ad intervallum AD, ille mox postea sibi relictus a pondere Systematis incipiat oscillari.

Dicatur gravitas naturalis g, qua animantur corpora B, E, F, &c. adeo ut eorum pondera sint gB, gE, gF, &c. totiusque Systematis pondus $= g(B+E+F$ &c.$) =$ [nominando M totam massam corporum] gM. Separemus jam, in cogitatione nostra, gravitationes a corporibus, ita ut nihil in ipsis remaneat, præter propriam singulorum inertiam, & loco ablatarum virium gravitantium collecta concipiatur in centro gravitatis vis motrix immaterialis æquivalens gM: constat utique, ex natura Centri gravitatis, Systema corporum non gravium B, E, F, &c. eodem modo ad descensum animari a vi motrice collecta gM, quo modo junctim descendunt propriis suis ponderibus gB, gE, gF, &c. Tollamus nunc quoque corpora ipsa, & substituamus pro B corpus aliud in A locandum, quod sit $= \frac{AB^2 \times B}{CA^2}$; aliudque pro E, quod sit $= \frac{AE^2 \times E}{CA^2}$, ut & aliud pro F, quod pariter sit $= \frac{AF^2 \times F}{CA^2}$ &c. Ergo per §. preced. hæc nova corpora collecta in puncto A, in unam coeunt massam $= \frac{AB^2 \times B + AE^2 \times E + AF^2 \times F \text{ \&c.}}{CA^2}$, quæ igitur eandem acquirit vim acceleratricem angularem circa punctum C, quam habet ipsum Systema corporum separatorum.

Ista autem vis acceleratrix reperitur dividendo vim motricem gM seu $g(B+E+F$, &c.$)$, per massam concentratam [quam imme-

immediate sollicitat] $\frac{AB^2 \times B + AE^2 \times E + AF^2 \times F \&c}{CA^2}$. Quo facto habebitur vis acceleratrix $= \frac{g(B+E+F\&c.) \times CA^2}{AB^2 \times B + AE^2 \times E + AF^2 \times F\&c.}$. En itaque Systema oscillans corporum separatorum $B+E+F$&c. reductum ad Pendulum simplex isochronum longitudinis CA, sed quod animatur vi acceleratrice $= \frac{g(B+E+F\&c.) \times CA^2}{AB^2 \times B + AE^2 \times E + AF^2 \times F\&c.}$. Dudum vero constat [quod & ego demonstravi in *Actis Lips.* 1713, p. 79*] duo Pendula simplicia a diversis viribus acceleratricibus agitata fore isochrona, quando eorum longitudines ipsis his viribus quibus animantur sunt proportionales. Instituendo proin hanc analogiam; Ut se habet inventa vis acceleratrix $\frac{g(B+E+F\&c.) \times CA^2}{AB^2 \times B + AE^2 \times E + AF^2 \times F\&c.}$ ad vim acceleratricem naturalem g; hoc est, ut $(B+E+F\&c.) \times CA^2$ ad $AB^2 \times B + AE^2 \times E + AF^2 \times F$ &c. ita erit CA ad quartam $\frac{AB^2 \times B + AE^2 \times E + AF^2 \times F\&c.}{(B+E+F\&c.) \times CA}$, cui si æqualis sumatur CO, prodibit hæc ipsa CO æqualis longitudini Penduli simplicis naturalis, & isochroni Pendulo composito Systematis oscillantis $B+E+F+$&c. Id quod omnino conforme est Regulæ *Hugenianæ*, quamvis elicitæ ex principio indirecto, fundato in æqualitate descensus & ascensus communis centri gravitatis, quod redit ad suppositionem Conservationis virium vivarum; Conferantur quæ dedi in *Actis Lips.* 1714 †, ad uberiorem hujus Regulæ confirmationem, ex fonte maxime genuino atque directo petita; quamquam per methodum ab hac quam hic aperui longe diversam; haud ingratum fore ratus, si eadem veritas sub multiplici habitu exposita sibi semper tam pulchre constare comperiretur.

* N°. XC. pag. 518, *Tom. I.* † N°. XCVI, pag. 168, *Tom. II.*

X.

De communicatione motus per Vectem.

Sint in plano horizontali duo corpora A & B perfecte elastica, quorum A moveatur velocitate a, atque directe impingat in corpus B quiescens. Notum est, per regulas communicationis motus, quas demonstratas dedi in *Dissertatione mea* Gallice edita pag. 27, & seqq. *, fore post conflictum velocitatem corporis $A = \frac{aA - aB}{A + B}$, velocitatem vero corporis $B = \frac{2aA}{A + B}$. Quare in casu, ubi corpora A & B sunt æqualia, quiescet A post ictum, ejusque velocitatem integram a accipiet corpus B. Quod si itaque hoc alligatum esset in una extremitate alicujus vectis, vel virgæ rigidæ, mobilis circa alteram extremitatem tanquam circa centrum fixum; manifestum sane est corpus B, acquisita sua velocitate a, circulaturum circa idem illud centrum fixum. At vero generatio motus in corpore B ab impulsu orta haud aliter peragitur, quam fit per applicationem alicujus vis motricis in corpus movendum agentis. Statim enim ac corpus A attingit corpus B, fit promta compressio elaterii interpositi inter utrumque corpus A & B; hoc dum ita peragitur, nisus elaterii, in utramque plagam restitutionem affectantis, concitat promtissime in motum corpus B quod quiescebat, & redigit ad quietem corpus A quod movebatur. Hujusmodi vis, quæ oritur ex mutua actione corporum in se invicem, est ex earum numero, quas vocare soleo *Vires immateriales* †; quia quasi extra materiam existentes concipiendæ sunt, dum non magis pertinent ad corpora moventia, quam ad movenda. Etsi vero collisio corporum in uno veluti momento absolvatur; clarum tamen est, atque res per se loquitur, actionem illam non esse instantaneam, sed habere suum initium, medium, & finem; tanta tamen rapiditate sibi succedentes gradus, ut sensibus percipi non possint.

XI.

* N°. CXXXV. pag. 28, & seq. *Tom. III.*
† Vide infra Numerum CLXXIX.

X I.

His probe intellectis, haud ægre patebit, quomodo effici possit, ut corpus aliquod in motu constitutum, omnem suam vim vivam transferat in aliud corpus majus seu minus, ita ut, priori illo ad quietem redacto, hoc alterum, quod antea quieverat, nunc solum receperit vim omnem quam prius illud habebat. Sit vectis rigidus CG mobilis circa punctum fixum C; in extremitate, vel in quolibet alio loco; sit alligatum corpus elasticum *G*, in quod impingat aliud corpus elasticum *F* ipsi *G* æquale, velocitate & in directione FG perpendiculari ad lineam vectis CG. Post percussionem amittet corpus *F* suam velocitatem, cui æqualem GR acquiret corpus percussum *G*, cum qua acquisita velocitate pergeret circulari circa centrum C. Fingamus jam ante allapsum corporis *F* ad *G*, hoc ipsum *G* subito tolli, atque pro eo aliud *H* substitui in alio vectis loco, ubi CH^2 sit ad CG^2, ut corpus *G* ad corpus *H*; unde $H = \frac{CG^2 \times G}{CH^2}$, vel $CH^2 \times H = CG^2 \times G$. Patet ergo ex §. 6, corpus impingens in punctum G, eundem omnino effectum facere pro acceleratione angulari vectis CG, sive adsit corpus *G* sine *H*, sive adsit corpus *H* sine *G*; adeoque in utrovis casu velocitas FG in corpore *F* post ictum destruetur; consequenter quicquid erat virium vivarum in corpore *F*, id nunc reperietur, vel in solo corpore *G*, vel in solo corpore *H*. TAB. LXXXV. *Fig.* 10.

Corollarium.

Eodem modo fieri potest, ut corpus impellens *F* quamtumvis magnum, omnem suam vim consumat in movendo alio corpore quantumvis parvo *P*. Prolongetur namque vectis CG ad P, ita ut CP^2 sit ad CG^2, ut corpus *F* ad corpus *P*, ponendum in ipso puncto P. Liquet corpus *F*, cum impegerit in punctum G, & quod pergeret velocitate GR, vel FG, si corpus *P* non adesset; mox omnem motum, adeoque omnem vim TAB. LXXXV. *Fig.* 11.

suam

ſuam amiſſurum, quam recipiet corpus *P* in puncto P poſitum; acquiretque hoc velocitatem abſolutam P*p*, ita ut velocitas angularis PC*p* prorſus eadem ſit cum GCR quam habuiſſet corpus *F*, ſi cum vecte CG moveri perrexiſſet, ſine annexo corpore *P*.

XII.

SCHOLIUM.

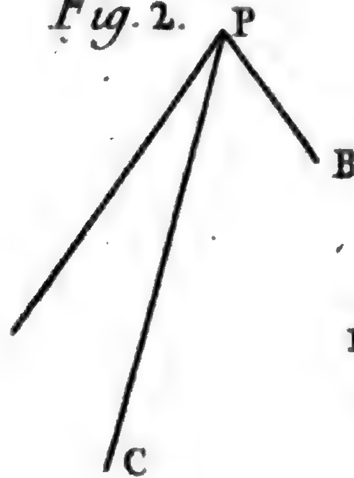
Ex his confirmatur vera æſtimatio virium Vivarum, in eo ſita, quod illæ Vires, ſeu facultates agendi, ſint in ratione compoſita ex ſimplici maſſarum & duplicata velocitatum. Cum enim Vis viva quæ erat in corpore *F*, poſt impulſum in vectem jam tota translata reſideat in corpore *H*; procul dubio, altera alteri æqualis eſt. Atqui corpus *F* eſt ad corpus *H*, ut quadratum CH ad quadratum CG, hoc eſt, ut quadratum celeritatis HS ad quadratum celeritatis GR; ob æqualitatem celeritatum angularium HCS & GCR. Similiter in *Fig.* 11; probatur ex eo, quod vires vivæ corporis *F* & corporis *P* ſunt æquales, utpote altera alterius effectus plenus & adæquatus; fore maſſam corporis *F* ad maſſam corporis *P*, reciproce ut quadratum velocitatis P*p* ad quadratum velocitatis GR. Unde generaliter fluit, corporum Vires vivas, ſeu facultates agendi, habere rationem compoſitam ex ſimplici maſſarum & quadrata velocitatum.

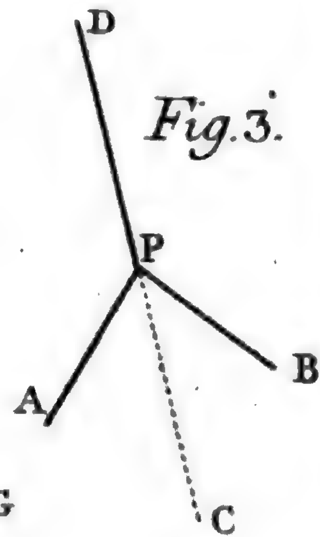
TAB. LXXXV. *Fig.* 10. & 11.

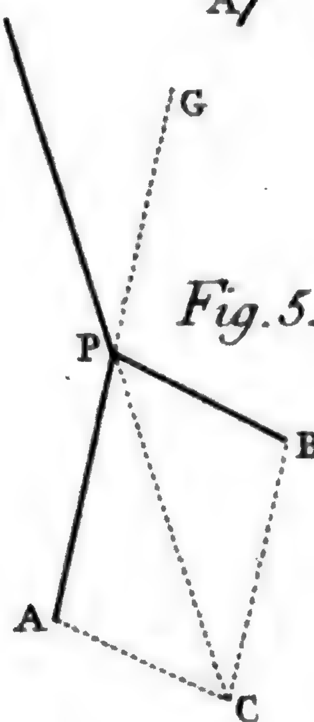
XIII.

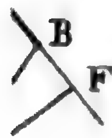
Si noſter hic demonſtrandi modus jam tum cognitus fuiſſet, cum vivide ageretur lis inter LEIBNITIUM & PAPINUM de vera æſtimatione Virium vivarum, atque PAPINUS uſque adeo ad incitas redactus fuiſſet, ut concederet LEIBNITIO corpus *A*, cum duobus gradibus velocitatis, idem efficere poſſe, quod quadruplo majus corpus *B*, cum uno gradu velocitatis; modo poſſibile eſſet ita dirigere motum corporis *A*, ut

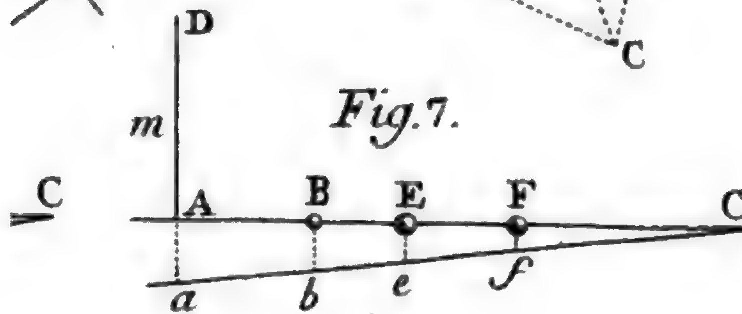
N.° CLXXVII

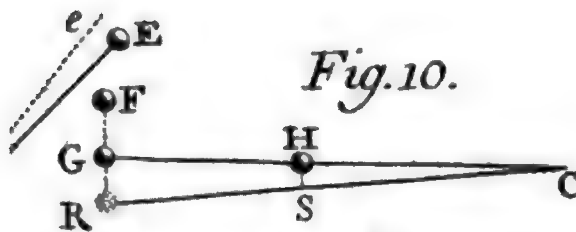

Fig. 2.
P
B
C

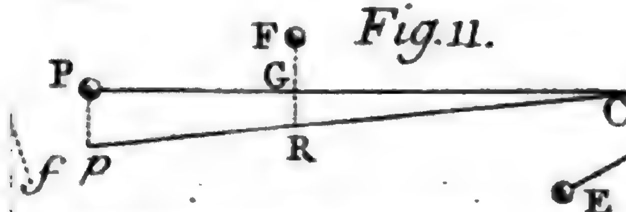

D
Fig. 3.
P
A
B
C

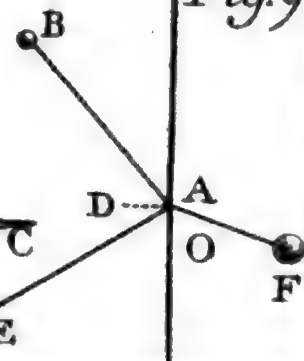

D
G
Fig. 5.
P
B
A
C


B
F


D
Fig. 7.
m
A
B
E
F
C
a
b
e
f


e
E
Fig. 10.
F
G
H
C
R
S


F
Fig. 11.
P
G
C
f
p
R


C
Fig. 9.
B
D
A
O
F
E

ut poſt conflictum quieſceret, & omnem ſuam vim transfunderet in B; quod autem cum in praxi effici non poſſit [ſicuti opinabatur PAPINUS] quia duorum corporum perfecte elaſticorum, ſed inæqualium, illud quod alterum quieſcens directe pellit, ſemper vel retro pellitur, ſi minus eſt; vel pergit moveri imminuta velocitate, ſi majus eſt. Subterfugium PAPINI omnino erat ridiculum, quaſi veritas aliqua in abſtrato ſumta dependeret a poſſibilitate, vel impoſſibilitate phyſica. Quicquid ſit, noſter, inquam, demonſtrandi modus, quo actu fieri poteſt, ut corpus aliquod vim ſuam totam transferat in aliud corpus majus vel minus, ita ut nihil in priori remaneat, omnino idoneus fuiſſet ad convincendum PAPINUM de vera Virium vivarum æſtimatione.

X I V.

De Centro ſpontaneo rotationis.

Concipe corpus aliquod, quantivis voluminis, vel etiam Syſtema plurium corporum, inter ſe invariabiles diſtantias ſervantium, a vi quadam externa impelli; ita quidem ut commune Centrum gravitatis maneat in eodem ſemper plano horizontali, aut in alio quocunque plano, ſi corpora eſſent gravitatis expertia. Duo ſunt caſus conſiderandi: aut enim tendentia, vel directio vis impellentis tranſit per Centrum gravitatis, [ſi nimirum Syſtema grave eſſet]; aut non tranſit. Si tranſit, facile percipis totum Syſtema ita obſecuturum vi pellenti, vel trahenti, ut ſingula ejus puncta incipiant pergantque moveri motu parallelo directioni potentiæ motricis. Ratio hujus eſt evidens ex eo, quia illi potentiæ nulla alia reſiſtentia opponitur, quam quæ oriunda eſt ex inertia, proportionali utique quantitati materiæ ſingularum Syſtematis partium: haud ſecus ac ipſa foret natura gravitatis, quæ hic abeſſe ſupponitur; hoc ſolo diſcrimine, quod directiones partium gravium alicujus Syſtematis parallelæ ſint, quomodocunque moveantur; heic vero, ubi

nulla ponitur gravitas, unaquæque ex partibus Systematis, diversam habens directionem motus, exercet suam resistentiam inertiæ secundum eandem suam peculiarem directionem; id quod fit, si directio potentiæ motricis non transit per punctum ubi alias esset Centrum gravitatis.

X V.

Istum casum alterum, qui altioris est indaginis, resolvendum aggredior; retento nomine *Centri gravitatis*; etsi Systema corporum a gravitate liberum esse supponitur. Hunc ad finem, concipe planum horizontale transiens per Centrum gravitatis totius Systematis: in hoc plano sit linea directionis, secundum quam potentia motrix agat ad movendum Systema corporum; atque ad istam lineam directionis ex Centro gravitatis ductam & utrimque productam intellige perpendicularem. Finge nunc porro ex singulis corpusculis minimis totius Systematis ductas esse rectas verticales ad planum horizontale, ut singula quæque corpuscula transferantur in ipsa puncta in quibus illæ verticales plano insistunt. Perspicis, haud dubie, planum istud tali projectione oneratum corpusculis particularibus, eodem prorsus modo agitatum iri a vi motrice, ac fit ipsum totum Systema in statu suo naturali: ita enim simili projectione uti solemus in investigatione Centri oscillationis; sed quæ projectio fingenda est fieri in plano verticali, transeunte per Centrum gravitatis & per punctum suspensionis.

X V I.

TAB. LXXXVI. *Fig.* 12.

Sit igitur planum horizontale projectionis AHOI, in quo firmiter hæreant, vel resideant, Systematis corpuscula projecta *K*, *L*, *M*, *N*, &c. commune Centrum gravitatis in C habentia, per quod transeat recta ABO perpendicularis ad directionem vis motricis DA, pellentis totum Systema a D versus A, una cum ipso plano, quod mobile suppono. In directione DA suma-

sumatur punctum A pro puncto applicationis potentiæ motricis [nam per §. 1, in quolibet puncto directionis sumi potest]; eo ipso itaque considerari etiam potest hoc punctum A tanquam hypomochlium, seu fulcrum, respectu reliquarum potentiarum in vectem A C O agentium, sicuti docent principia vulgaris Mechanicæ. Illæ reliquæ potentiæ sunt, quæ oriuntur a resistentiis inertiæ corpusculorum *K*, *L*, *M*, *N*, &c. a potentia D A movendorum, circa punctum aliquod immobile B in vecte A O, quod id ipsum est quod determinari debet.

X V I I.

Tale autem punctum immobile B alicubi in vecte A O existere debere, ex eo manifestum est, quod vis motrix in A extra Centrum gravitatis C perpendiculariter ad vectem applicatur; quo utique fit ut Systema corporum non possit moveri motu parallelo: ad hoc enim requireretur, ut vis motrix in ipso centro gravitatis C applicaretur. Incipiet itaque moveri motu rotationis: ergo dabitur in vecte A O punctum aliquod B, quod erit Centrum rotationis initialis, adeoque ab initio immotum, dum reliqua omnia totius Systematis puncta in motum cientur. Hæc ita fiunt ab initio gyrationis, quod notanter dico; postea enim, cum in motum sensibilem Systema erumpit, ipsum quoque hoc Centrum abripitur, propter nascentem vim centrifugam corporum *K*, *L*, *M*, *N*, &c. quemadmodum fieri cernimus in projectilibus, quæ provolitant gyrando, impetu concepto a vi quadam impressa in puncto diverso a centro gravitatis.

X V I I I.

Hoc cum ita se habeat, Theoria nostra valebit iis præsertim in occasionibus, ubi agitur de motibus non in longum excurrentibus; ut in tremulationibus, item in vibrationibus, vel oscillationibus minimis. In his ergo & similibus, opus est, ante omnia, ut probe determinetur Centrum rotationis sponta-

neum B; voco *spontaneum*, quia a natura sponte quasi eligitur, pro diversitate circumstantiarum; ita ut non sit in potestate nostra illud ponere pro lubitu. Datur tamen criterium, unde cognoscere possumus, qua conditione gaudere debeat punctum B, ad id ut unicum maneat stabile, dum reliqua omnia puncta plani horizontalis de loco suo dimoventur. Hoc vero criterium in eo consistit, quod debeat esse æquilibrium inter pressiones, quas punctum B patitur ab utroque latere, respectu vectis AO; hoc est, quod quantum hoc punctum urgetur in directione perpendiculari ad AO versus unam plagam, tantundem simul retro urgeatur versus plagam oppositam; scilicet utrumque per vires ex inertia corporum resultantes.

XIX.

Ponamus nunc potentiam motricem DA promovere punctum A in *a*, circa Centrum rotationis B, quo ipso fiet ut corpuscula *M*, *L*, *K*, *N*, &c. promoveantur ad *m*, *l*, *k*, *n*, in directionibus perpendicularibus ad BM, BL, BK, BN; ita ut velocitates eorum initiales, designatæ per lineolas M*m*, L*l*, K*k*, N*n*, &c. futuræ sint proportionales radiis BM, BL, BK, BN. Sunt autem resistentiæ ab inertia oriundæ, conjunctim ut massæ & velocitates initiales, hoc est, ut $BM \times M$, $BL \times L$, $BK \times K$, $BN \times N$; adeoque, exempli gratia, corpus *M* renititur rotationi, vi suæ inertiæ expressa per $BM \times M$, idque in directione MH normali ad BM. Ex hac resistentia resultat aliqua vis impressionis [quæ vocetur *P*], qua centrum B urgetur normaliter ad AB, & quidem hic in eandem plagam qua tendit vis motrix DA. Ut autem determinetur quantitas hujus pressionis, demitto in directionem inertiæ MH perpendicularem AH, atque sumto A pro fulcro in vecte inflexo HAB, cujus unum brachium est AH, alterum AB; erit momentum vis inertiæ $BM \times M$ in H applicatæ $= AH \times BM \times M$; cui æquale esse debet momentum pressionis P applicatæ

in

in B. Ergo $P = \frac{AH \times BM \times M}{AB}$. Sunt vero [ducta MF perpendicularis ad BA,] duo triangula AHE, FBM, inter ſe ſimilia, adeoque AH: AE = BF: BM, unde AH × BM = AE × BF, erit igitur $P = \frac{AE \times BF \times M}{AB}$ = [ob AE = AB — EB] $\frac{AB \times BF \times M - EB \times BF \times M}{AB} = BF \times M - \frac{EB \times BF \times M}{AB}$ $= BF \times M - \frac{BM^2 \times M}{AB}$. Simili modo idem de ſingulis reliquis preſſionibus demonſtratur; quare ſumma omnium preſſionum in punctum B exercitarum [quarum quædam affirmativæ, quædam negativæ ſunt, ut ſe mutuo in æquilibrio teneant] erit cenſenda = o; hoc eſt, $\int P = \int BF \times M - \int \frac{BM^2 \times M}{AB} = o$, [NB, intelligo per præfixum ∫ ſummam collectam ex hujuſmodi functionibus ſingulorum corporum *M*, *L*, *K*, *N*, &c.].

X X.

Notum eſt ex natura Centri gravitatis, nominando *S* ſummam omnium corporum totius ſyſtematis, fore $\int BF \times M = BC \times S$; adeoque etiam $BC \times S - \int \frac{BM \times M}{AB} = o$; unde ſequitur $BC \times S = \int \frac{BM^2 \times M}{AB}$; proinde $AB = \frac{\int (BM^2 \times M)}{BC \times S}$. Hinc videmus centrum ſpontaneum rotationis B eo in loco fore, ubi Syſtema *M*, *L*, *K*, *N*, &c. tanquam Pendulum grave conſideratum, atque ſuſpenſum ex puncto B, habeat centrum oſcillationis in A; hoc eſt, cui iſochronum ſit Pendulum ſimplex longitudinis BA. Aut quia, demonſtrante jam HUGENIO, Pendula compoſita eam habent proprietatem, ut punctum ſuſpenſionis & Centrum oſcillationis poſſint converti, poterit Syſtema *M*, *L*, *K*, *N*, &c. ſumi pro Pendulo compoſito oſcillationis circa punctum ſuſpenſionis A; habebitque Centrum oſcillatio-

cillationis in B; quod itaque erit ipsissimum quod quærimus Centrum spontaneum rotationis. *Q. E. I.*

XXI.

Ejusdem puncti determinatio ex alio principio.

Fingamus primo in vecte per centrum gravitatis C transeunte, sumi punctum B ad lubitum pro fulcro fixo, ex quo procedant brachia ad corpora Systematis alliganda BM, BL. BK, BN, &c. Ponamus dein corpora Systematis *M*, *L*, *K*, *N* &c. omnino tolli, eorumque loco totidem alia substitui in unam massam colligenda, atque directe opponenda vi motrici DA, quæ massa a vi motrice eadem velocitate angulari moveatur circa fulcrum B, qua ante substitutionem Systema ipsum *M*, *L*, *K*, *N*, &c. circa B moveretur. Ex §. 8 patet massam illam in A substituendam, in qua sola vis motrix DA eandem excitat vim acceleratricem angularem, quam excitaret in Systemate corporum; patet, inquam, massam substituendam debere esse æqualem huic $\frac{BM^2 \times M + BL^2 \times L + BK^2 \times K + BN^2 \times N + \&c.}{AB^2}$.

XXII.

Jam vero, si locus fulcri B non ex nostro arbitrio ponitur, sed si rei naturæ relinquitur cura eligendi fulcrum, circa quod potentia motrix queat circumvolvere Systema, omni qua potest fieri facilitate; hoc sane tunc fieri manifestum est, cum Centrum circulationis vel rotationis ad eum se componit locum B, ex quo oritur massa substituenda, quæ omnium possibilium sit minima; utpote quæ potentiæ motrici opponit obstaculum facillime superandum. Ecce quem facio calculum: Sit data $AC = a$, quæsita $CB = x$, $CM = m$, $CL = l$, $CK = k$, $CN = n$. His positis, massa substituenda $\frac{BM^2 \times M + BL^2 \times L + BK^2 \times K + BN^2 \times N + \&c.}{AB^2}$ erit, per proprietatem Centri

tri gravitatis $= \frac{BC^2 \times S + CM^2 \times M + CL^2 \times L + CK^2 \times K + CN^2 \times N + \&c.}{AB^2}$
$= \frac{xxS + mmM + llL + kkK + nnN + \&c.}{(a+x)^2}$; quæ, ut fit minima, oportet eam differentiare, & æquare zero; quo facto, prodibit $2xSdx(a+x)^2 - (xxS + mmM + llL + kkK + nnN + \&c.).(a+x)2dx = 0$, seu $xS(a+x) = xxS + mmM + llL + kkK + nnN + \&c.$ &, facta reductione, $axS = mmM + llL + kkK + nnN + \&c.$); unde $x = \dots\dots$ $\frac{mmM + llL + kkK + nnN + \&c.}{aS}$; & $a + x$, seu $AB =$ $a + \frac{mmM + llL + kkK + nnN + \&c.}{aS}$; id quod rursus indicat punctum B esse Centrum oscillationis Systematis M, L, K, N, &c. circa punctum A oscillantis.

XXIII.

SCHOLIUM.

En ergo insigne exemplum Naturæ operantis per modum simplicissimum; ut quasi ex instinctu sapientiæ agere videatur. Quem quidem modum, licet indirectum, a Filio quoque meo *Daniele* observatum fuisse intellexi, postquam dudum hæc scripseram. Interim quamvis causæ finales ex physicis proscribantur vulgo, mirari tamen satis non possumus, quod Naturæ effectus, ex legibus pure mechanicis explicati, conspirent semper cum generalissimo Canone metaphysico, qui nobis dictat, *Naturam nihil facere frustra; semper agere per viam brevissimam; nihil de vi sua prodigere præter necessitatem ad producendum aliquem effectum; quæ possunt fieri per pauca nunquam a Natura fieri per plura*, &c. Quis autem ausit eo dementiæ procedere ut cogitet, nedum dicat, omnia quæ ita fiunt secundum leges Mechanico-Dynamicas, etsi videantur promanare ex prudentiæ consilio, non tamen nisi fortuito casui mirabilem istum concentum esse attribuendum? Dicamus potius Ens perfectissimum tanta perfectione, tanta ar-

te & induſtria condidiſſe hoc Univerſum ; ut undique elucerent in phænomenis veſtigia Omnipotentiæ conjunctæ cum Sapientia perfectiſſima. In quibuſdam nexus neceſſitatem non percipimus, ob imbecillitatem noſtram; in quibuſdam aliis rationem aliquam ejus reddere poſſumus. Sic, in caſu noſtro hucuſque pertractato, pronum eſt conjicere, ſi Centrum rotationis B in alio loco ſumeretur & figeretur, quam qui locus ſponte a natura ſe prodit, id futurum eſſe, ut vis aliqua ex effectu inertiæ corporum reſultans, ab uno latere vectis fortior quam ab altero, ſuſtineri debeat a puncto rotationis B, a cujus exceſſu, qui influit quoque in punctum A, fit ut corpus ſubſtituendum in hoc puncto majus eſſe debeat; cum in finem ut reſiſtat vi motrici BA, non tantum æquipollenter inertiæ Syſtematis, ſed etiam ei vi quæ punctum B plus premit ab una parte quam ab altera. Hoc autem, cum non ſit metuendum a Centro ſpontaneo; certe nulla alia reſiſtentia in A opponitur vi motrici DA, quam quæ originem habet a ſola inertia corporum *M*, *L*, *K*, *N*, &c.

Hoc præterea notare debemus, hujuſmodi Principium metaphyſicum caute tractandum eſſe in rebus mere phyſicis vel mechanicis; atque tunc tantum adhibendum, confirmationis gratia, quando jam conſtat de rei veritate ex cauſis mere dynamicis; uti in hoc noſtro Exemplo vidimus. Quod ſi enim duæ pluresve eſſent prærogativæ, quæ æquali jure admitti poſſent, ſed diverſos darent effectus; quamnam ergo ex illis diceremus eligi a Natura, ita ut præſtantiſſimum eligeret? Certe tale quid contingit in materia præſenti: nam quamvis verum ſit rotationem circa Centrum oſcillationis fore celerrimam; ſed ſi nobis perſuaderemus Centrum ſpontaneum rotationis fore in eo puncto, circa quod Syſtema corporum eadem vi rotatum faciat ut Centrum commune gravitatis [quod utique in recta linea movebitur] moveatur celerrime; inveniretur, facto computo, Centrum ſpontaneum fore in loco diverſo a Centro oſcillationis. Confugiendum igitur erit ad ſolutionem noſtram directam, ex Principio pure dynamico deductam, per quam ſtabilietur hypotheſis prior. XXIV.

XXIV.

Agendum nunc esset de iis casibus, ubi plures potentiæ motrices, in diversis locis applicatæ, Systema ad rotandum incitarent; conabor vero hoc paucis absolvere. Directiones potentiarum illarum sunt, vel parallelæ, vel non parallelæ. Si prius, habebunt omnes communem perpendicularem ductam ex Centro gravitatis C Systematis pro vecte sumendam, adeoque considerando omnia puncta A tanquam totidem puncta, gravitantia perpendiculariter ad vectem in ratione potentiarum motricium quas repræsentant, ac tum in Centro gravitatis horum punctorum gravitantium omnes potentias in unam colligendo, clare intelligimus, ex natura Centri gravitatis Centrum spontaneum rotationis B in eodem fore loco, eodemque ritu rotatum iri totum Systema, sicuti fieret, si potentiæ dispersim agerent. Quod si directiones potentiarum non sunt parallelæ; possunt, per vulgarem Regulam compositionis virium, omnes in unam transformari, tum potentiam, tum directionem; ad quam dein ducta perpendiculari ex Centro gravitatis C totius Systematis, habebimus Casum simplicem, dilucide satis explicatum.

XXV.

De motu corporum irregularium, ex percussione, vel collisione aliorum producto.

Auctores, qui de communicatione motus tractant, haud aliter considerant corpora quam si essent sphærica, vel ita saltem posita, ut directio impulsionis transeat per Centra gravitatis corporum impellentis & impulsi; quo quidem casu, evidens est corpora, post impulsum, motum iri sine rotatione. De hac enim, si quæ accidit rotatio, ne cogitarunt quidem; unice solliciti de velocitate determinanda, secundum rectas lineas parallelas inter se, quas supponunt describi a singulis punctis corporis im-

pulsi. Lubet vero Exemplum proponere, quo patefiet, qua lege debeat moveri corpus ab alterius incursu, tendente, non per Centrum gravitatis, sed in directione quæ Centrum illud ab alterutro latere relinquit. Esto corpus percutiendum figuræ cujuscunque FDGE, aliudque HLD, quod moveatur in directione RD, occurrens quiescenti FDGE in puncto contactus D, ubi utriusque corporis superficies habent communem tangentem MN, quam trajiciat recta perpendicularis TDE. Liquet ergo in collisione oriri, per compressionem corporum, potentiam motricem immaterialem, quæ ab una parte propellit corpus FDGE in directione DE, repellit vero alterum HLD in directione DT.

TAB. LXXXVI. *Fig. 13.*

XXVI.

Ponamus ambo corpora esse elastica, atque per Centrum gravitatis C ducta sit BCA perpendicularis ad DE. Ex Theoria in præcedentibus exposita sequitur, potentiam motricem in D excitatam, considerari posse tanquam applicatam in puncto A; hoc itaque sumto pro puncto suspensionis, ex quo nimirum figura FDGE instar Penduli suspensa intelligitur, cujus Centrum oscillationis sit in B, quod utique datum erit, ob datam figuram, & datum punctum suspensionis A. Dico itaque hoc punctum B fore Centrum spontaneum rotationis initialis, circa quod corpus percussum primo momento gyrari incipiet: Id quod primum est. Secundo, si corpus impellens DHL eo momento, quo incurrit in FDGE, ita situm est ut recta DT normalis ad tangentem transeat per Centrum gravitatis corporis DHL; hoc sane, post peractam impulsionem, retinebit parallelismum in motu suo, id est, plane non rotabitur: sin vero DT non transit per Centrum gravitatis, subibit corpus DHL etiam rotationem, cujus Centrum spontaneum simili modo determinatur, ut factum est in priori.

XXVII.

XXVII.

Ut nunc determinemus velocitates corporum post collisionem ortas; tres distinguendi sunt casus. 1°. Aut transit recta TDE per ambo Centra gravitatis corporum. 2°. Aut transit tantum per alterutrum, ex. gr. per Centrum gravitatis corporis HLD, relinquens extra se Centrum gravitatis C corporis FDGE. 3°. Aut transit per neutrum. Quod ad primum attinet casum, nulla adest difficultas; utpote qui casus est vulgaris, dudum resolutus; etenim ambo corpora movebuntur, post ictum, motu parallelo in partibus sine rotatione, & ita quidem ut si massa corporis HLD perpendiculariter impingentis in directione TD dicatur $= A$, ejusque velocitas ante ictum $= a$, & massa corporis FDGE $= B$, ejusque velocitas ante ictum [si quam habet in eadem directione DE præcedens] $= b$, minor quam a; futura sit post ictum velocitas corporis $A = \frac{aA - aB + 2bB}{A + B}$; in eandem partem, si hæc quantitas est affirmativa; sed in contrariam, si negativa: & velocitas corporis B post ictum $= \frac{2aA - bA + bB}{A+B}$; id quod docent vulgares Regulæ de communicatione motus traditæ pro corporibus elasticis. Vide *Dissertationem meam* hac de re Gallice editam p. 26. * Si corpus B ante ictum quiescit, [ut hic, brevitatis gratia, supponimus] erit, ut patet, velocitas post ictum, corporis A $= \frac{aA - aB}{A+B}$, & illa corporis $B = \frac{2aA}{A+B}$. Quod si corpus A, vel HLD, oblique feriat corpus B, secundum directionem RD, decomponendus est hic motus, more solito, in collaterales RT & TD, illum parallelum tangenti MN, hunc eidem perpendicularem: atque tum, si velocitas perpendicularis TD vocetur a, prodibunt eædem formulæ pro velocitatibus post ictum orituris; ubi nihil aliud præterea agendum, quam ut cum illa velocitate post ictum, pro corpore A obli-

* N°. CXXXV, pag. 28. & seqq. *Tom. III.*

que feriente, rurſus componatur velocitas parallela, quam habebat ante ictum.

XXVIII.

Videamus autem porro, quid ſit faciendum pro duobus reliquis caſibus, hactenus a nemine conſideratis; ubi nimirum recta TDE, perpendicularis ad communem tangentem MDN, non tranſit, per Centra gravitatis utriuſque corporis, aut ſaltem ſi per alterutrum non tranſit. Interim, ut brevitati conſulamus, lubet ſupponere corpus percutiendum FDGE, cujus maſſam vocavimus *B*, quieſcere ante ictum, ejuſque Centrum gravitatis C eſſe extra rectam DE, in qua directione percutitur, non attendendo ad directionem, in qua movetur corpus *A*, ſeu HLD, ante ictum; ſive id fiat oblique per RD, ſive normaliter per TD; neque etiam attendendo an tranſeat, an non tranſeat recta TD per Centrum gravitatis corporis HLD. Quare ante omnia determinari debet locus Centri rotationis B, circa quod nempe corpus percuſſum FDGE rotari incipit; quod utique ſecundum Theoriam noſtram, erit in recta AC perpendiculari ad lineam directionis motus initialis DAE: nam quia vis motrix, a compreſſione orta inter utrumque corpus, agit in percuſſum ſecundum rectam DA normalem ad CA; poteſt conſiderari illa vis, veluti applicata ad extremitatem A vectis ACB. Proinde per §. 20, punctum rotationis B, erit in Centro oſcillationis corporis FDGE ſuſpenſi ex puncto dato A: hinc ergo dabitur longitudo AB, quæ vocetur *L*.

XXIX.

Velocitatem initialem puncti A, in directione AE, venabimur ſequenti modo. Fingamus corpus percutiendum FDGE diviſum in infinita corpuſcula minima, quale unum eſt *m*; ad quæ ſingula, ex puncto rotationis B, ductæ intelligantur rectæ B*m*, omnino ut fecimus in §. 16, pro Syſtemate ex pluribus cor-

corpusculis conflato. Hæ rectæ erunt instar totidem brachiorum vectis principalis AB, quorum unumquodque secum vehit suum sibi alligatum corpusculum *m*. Quare si sublato toto corpore FDGE, ei substituamus in puncto A collocandum corpus aliud, quod sit æquale summæ omnium $Bm^2 \times m$, divisæ per AB^2 [id quod in hunc modum $\int \frac{Bm^2 \times m}{AB^2}$ exprimi potest]; erit per §. 8, hoc corpus $\int \frac{Bm^2 \times m}{AB^2}$ collective sumtum, atque in puncto A locandum, æquipollens figuræ corporeæ FDGE; hoc est, acquiret illud a potentia motrice eandem velocitatem, quam ab initio acquireret punctum A, in ipsa figura circa B rotanda. Quod si directio RD corporis incurrentis HLD talis sit, ut per decompositionem in collaterales DT & RT, illa DT transeat per Centrum gravitatis ipsius corporis; nulla fiet in illo rotatio; nulla proin facienda substitutio, sed corpus ipsum impingens jam faciet, cum priori illo substituto $\int \frac{Bm^2 \times m}{AB^2}$, necessariam compressionem, ut inde resultet vis motrix, quæ ei dabit velocitatem eandem, quam ab illa vi acquireret ab initio rotationis punctum A figuræ percussæ FDGE. Sin vero directio TD non transeat per Centrum gravitatis corporis impingentis HLD; tunc utique pro hoc etiam facienda est substitutio alius corporis, simili modo quo facta est pro corpore impulso; atque ita res redacta erit ad casum ordinarium duorum corporum se mutuo centraliter impellentium.

XXX.

Ex hoc vero quod puncta A & B eam inter se habent relationem, ut, uno existente puncto suspensionis, alterum sit Centrum oscillationis in corpore FDGE, mutari potest formula $\int \frac{Bm^2 \times m}{AB^2}$, quæ ex infinitis terminis componitur, in aliam

ſimplicem, uno tantum termino conſtantem; nempe ſic. Sumto B pro puncto ſuſpenſionis, erit, ut jam dictum eſt, punctum A Centrum oſcillationis; ergo ex demonſtratis $BA = \int \frac{Bm^2 \times m}{BC \times B}$ [nominando ſcilicet *B* maſſam corporis FDGE]; ac proinde $\int (Bm^2 \times m) = BA \times BC \times B$. Dividendo utrumque per AB^2, habebitur $\int \frac{Bm^2 \times m}{AB^2} = \frac{BC \times B}{BA}$. Hinc ſi fiat BA ad BC, ita corpus *B* ad quartum; erit hoc corpus quartum, id ipſum quod quæritur ſubſtituendum pro corpore FDGE, quod nimirum, a corpore percutiente centraliter percuſſum in directione DAE, omnino eandem velocitatem acquiret, qua cum corpus FDGE ad rotandum circa B incitaretur.

XXXI.

Idem quoque obſervari debet, ſi pro corpore incurrente HLD, quod ſupra vocavimus *A*, ſubſtituere velimus aliud ſimplex, quod priori ſubſtituto incurrens eidem eandem iterum velocitatem imprimet: concipiendo enim in figura corporis HLD litteras α, β, γ analogas litteris A, B, C, id eſt, idem cum hiſce ſignificantes; facile intelligimus corpus ſubſtituendum pro corpore *A*, vel HLD, fore $= \frac{\beta\gamma \times A}{\beta\alpha}$. Dico itaque ſi hoc corpus elaſticum $\frac{\beta\gamma \times A}{\beta\alpha}$, velocitate & directione RD, impingat in alterum illud pariter elaſticum & quieſcens $\frac{BC \times B}{BA}$, habeatque utrumque figuram globi, eam inde præciſe velocitatem impreſſum iri quieſcenti, quam acquireret corpus FDGE in puncto A, ad rotandum circa punctum B. Vocetur illa velocitas $= V$, eritque puncti A velocitas angularis $= \frac{V}{AB} =$ velocitati angulari Centri gravitatis C: unde ſequitur velocitatem abſolutam hujus centri fore $= \frac{CB \times V}{AB}$. Eſt enim velocitas abſoluta puncti

A

A ad absolutam velocitatem Centri gravitatis C, ut AB ad CB.

XXXII.

Finge jam, in ipso percussionis momento punctum B reddi immobile, infixo axiculo, ita tamen, ut tota figura FDGE liberrime circulari possit circa punctum illud B; utique facile percipies id futurum esse, ut, peracta percussione, postquam corpora impellens & impulsum jam iterum a se invicem sunt separata, quod brevissimo fit tempusculo, Centrum gravitatis C, sua semel acquisita velocitate $\frac{CB \times V}{AB}$, continuo circulari pergat circa B, simul cum singulis reliquis punctis corporis impulsi; quorum unumquodque eam habebit velocitatem absolutam, quæ proportionalis est distantiæ ab axiculo in B infixo. Quid autem fiet, si remoto nunc axiculo, figura circulans FDGE in libertatem restituitur? Hoc sane futurum prævideo, ut more projectilium [a quorum gravitate abstrahitur] Centrum gravitatis C protinus incipiat moveri secundum directionem rectilineam, in qua tunc reperitur, & quidem celeritate uniformi, sicuti jam dudum demonstratum est; atque ita, perseverante rotatione, singula reliqua puncta describent curvas cycloïdales, inter quas illa, quæ ab ipso puncto B describitur, est Cycloïs ordinaria *Hugeniana*, habens pro tangente initiali ipsam BA; cæteræ vero omnes sunt Cycloïdes, vel contractæ, vel protractæ, prout a puncto C vel plus vel minus distant quam punctum B. Sed nolo nimius esse in his, quæ quilibet sua attentione assequi potest.

Hoc interim notatu dignum est, duplicem jam considerandum esse motum angularem uniformem in uno eodemque corpore FDGE; unum nempe circa Centrum gravitatis C, dum hoc Centrum movetur motu æquabili in recta ipsi DE parallela; alterum vero circa Centrum rotationis B, quod pariter motu æquabili fertur super Cycloïde ordinaria, cujus maxima altitu-

do,

do $= 2BC$, vel quæ Cycloïs deſcribitur a circulo, cujus radius $= BC$, dum hic circulus rotatur ſuper recta BP etiam parallela ipſi DE.

Poſſibilitas & veritas duorum horum motuum angularium atque uniformium, in eodem corpore ſimul exiſtentium, [quorum alter alteri æqualis eſt] patebit attente conſideranti proprietatem Cycloïdis ordinariæ.

XXXIV.

Ex data velocitate motus progreſſivi Centri gravitatis C in recta ipſi DE parallela, atque ex data velocitate motus angularis circa C, determinari poteſt locus puncti B; atque ex his locus puncti A, ubi vis motrix applicanda eſt, ut tales duo motus [datam proportionem inter ſe obſervantes] in corpore FDGE generari poſſint. Contemplatio iſta fortaſſis uſum ſuum habere poteſt in Phyſica cœleſti. Vulgaris opinio eſt, nullum eſſe nexum, nullam dependentiam neceſſariam inter motum diurnum & motum annuum Planetarum: motus iſti, ad ſenſum quidem uniformes vel æquabiles, tamen in unoquoque Planeta apparent tales vel tales eſſe ex fortuito naturæ eventu: nam etiamſi, quod ſpectat ad motus annuos circa Solem, hanc obſervent legem neceſſariam, ut eorum tempora periodica ſint in ſeſquiplicata ratione diſtantiarum; nulla tamen hactenus ratio ex naturæ legibus allegari potuit, cur hic vel ille Planeta revolutiones ſuas diurnas peragat tali potius tempore, quam alio; cur ex. gr. Terra, quæ anni ſpatio orbitam ſuam abſolvit, opus habet 24 horis pro una gyratione circum-centrali: Jupiter vero, qui quinquies circiter longius abeſt a Sole, & cujus maſſa pluſquam millies ſuperat Terram, atque 12 propemodum annorum tempore ſemel circuitum facit circa Solem, non omnino tamen decem horas impendat in unam revolutionem circa ſuum centrum.

XXXV.

Non putem hujus rei aptiorem causam assignari posse, quam dicendo, in singulis Planetis, utriusque hujus motus relationem ad se invicem originem habere a primitiva applicatione potentiæ motricis; a qua quippe sola uterque motus produci potuit. Finge enim Planetam FDGE, quamcunque habeat figuram, ab initio existentiæ suæ accepisse impulsum in directione DE. Quod si hæc directio forte transiisset per Centrum gravitatis C; facile percipis, ex isto impulsu nullum alium motum subsecuturum, quam progressivum secundum eandem directionem, sine omni rotatione: adeoque talis Planeta, si quis esset, careret motu diurno. Sed si primordialis directio DE per Centrum gravitatis C non transiisset; intelligis utique ex ante dictis, præter motum progressivum, alterum insuper circulantem circa C æque ac circa aliud quoddam B produci debuisse.

XXXVI.

Verum, & hoc præterea facile perspicimus, motum hunc rotationis vel tardiorem esse, vel celeriorem, prout recta DE vel propius, vel remotius a centro C distiterit. Ut igitur detegamus, in quolibet Planeta, causam sui motus diurni, hujusque celeritatis; id certe aliunde peti non potest, quam ex ipsis phænomenis. Hunc in finem, per Centrum gravitatis C ductam fingamus rectam BCA normalem ad DAE; in hac BA indagandum est punctum B, quod sit Centrum initiale rotationis; ex quo cognito, cognoscetur punctum A, ubi potentia motrix applicanda fuerit. Ex consideratione Cycloïdis vulgaris *Hugenianæ*, quam punctum B describere debet, haud difficulter vidi, instituendam esse hanc analogiam: *Ut se habet circuli peripheria* p *ad radium* r, *ita longitudo* L *viæ, quam Planeta percurrit in sua orbita circa Solem, durante una revolutione circa suum Centrum gravitatis C, se habebit ad quartam CB.* Erit itaque $CB = \frac{rL}{p}$.

Reliqua nunc ſponte fluunt: nempe ex dato jam puncto ſuſpenſionis B & Centro gravitatis C, invenietur Centrum oſcillationis A Planetæ FDGE ex puncto B ſuſpenſi; atque id ipſum punctum A erit quod quæritur [per §. 28]; ubi ſcilicet potentia motrix applicata dedit Planetæ ambos motus, annuum & diurnum, ea lege ſe habentes, quam docet experientia. Qua quidem ratione explicare voluimus, quo pacto poſſibile ſit, ut in quolibet Planeta uterque motus ex uno eodemque principio originem ſuam traxerit; ac proinde non ſit fortuito caſui adſcribendum [ut hactenus creditum eſt], quod iſti duo motus hanc & non aliam inter ſe ſervent proportionem, reſpectu temporum periodicorum.

XXXVII.

Ut uſus noſtræ Regulæ clarius pateat, ſumamus pro exemplo duplicem motum Terræ, annuum & diurnum; ex quorum comparatione inveniendus ſit locus A, ubi vis motrix primitive applicata, potuerit producere ambos hos motus in Globo terreſtri. Supponamus autem Terram perfecte ſphæricam, atque ex materia homogenea conflatam; quo fiet ut ejus Centrum gravitatis C ſit in ipſo centro Globi. Dicatur $\frac{p}{r}$ ratio peripheriæ circuli ad radium, ipſa vero ſemidiameter Terræ dicatur $= R$. Erit, ex Aſtronomorum ſententia, ſemidiameter orbitæ Terræ circa Solem $= 22000 R$. [Supponimus enim orbitas planetarias eſſe circulares, vel parum a circulis diſcrepantes] adeoque circumferentia orbitæ Terræ $= \frac{22000 pR}{r}$. Eſt vero tempus revolutionis annuæ ad tempus revolutionis diurnæ [hoc eſt, neglecta fractione, 365 ad 1] ut circumferentia orbitæ annuæ $\frac{22000pR}{r}$ ad L, ſeu ad longitudinem viæ una revolutione diurna emenſæ; erit ergo $L = \frac{22000pR}{365r} = \frac{4400pR}{73r}$, ac proinde, per Regulam noſtram, $\frac{rL}{p}$, ſeu CB $= \frac{4400 R}{73}$.

Su-

Sumendo nunc, vi Regulæ *Hugeniana* [vid. *Horol. oscill.* fol. 142.] duas quintas tertiæ proportionalis ad CB & radium *R*, habebitur $CA = \frac{2 \times 73\, R}{5 \times 4400} = \frac{73\, R}{11000} = \frac{1}{150} R$, quam proxime.

Dico itaque si Globus aliquis [Terram repræsentans] confectus ex materia homogenea, quiescens primo, postea in motum agitetur a quacunque vi motrice applicata perpendiculariter ad distantiam a Centro quæ sit sesquicentesima pars radii; dico, inquam, hunc Globum duos inde motus acquisiturum, unum progressivum, alterum circulantem, qui accurate satis respondebunt motui annuo & diurno Telluris.

COROLLARIUM.

Videmus hinc, punctum B, quod supra §. 18 nominavimus Centrum spontaneum rotationis tam procul a Terra existere, ut CB, seu ejus distantia a centro, sit $= \frac{4400\, R}{73} =$ circiter 60 diametris Terræ; atque adeo pertingat usque ad regionem Lunæ. Quod an sit inter raro contingentia numerandum; an vero ex necessitate aliqua physica, effectui Lunæ attribuenda, consequatur; de eo dispiciant Physici. Fortassis reperient aliquam rationem a motu & distantia Lunæ repetendam, cur motus annuus & diurnus Terræ eam inter se habeant relationem quam habent; ita ut aliam habere non possint.

XXXVIII.

SCHOLIUM.

Simili calculo supputantur distantiæ illæ CB & CA pro reliquis Planetis, quorum constat ratio inter tempora unius revolutionis circa Solem & unius revolutionis circa axem. Sic inveni pro Marte, cujus semidiameter *M* ad semidiametrum Terræ *R* statuitur ab hodiernis Astronomis ut 3 ad 5, ita ut *M* sit

$= \frac{3}{5} R$; inveni, inquam, pro Planeta Martis CB $= \frac{41930 M}{501}$, seu $84 M$ quam proxime, & CA $= \frac{1}{418} M$ quam proxime.

Jupiter, qui omnium maximus est Planeta, habet semidiametrum N decuplo majorem semidiametro Terræ R, hoc est, $N = 10 R$; pro hoc autem invenitur, Regulæ meæ ductu, CB $= \frac{2288 N}{2103} = \frac{11}{10} N$ quam proxime, & per Theorema *Hugenianum*, CA $= \frac{2 \times 2103 N}{5 \times 2288} = \frac{2103 N}{5720} = \frac{7 N}{19}$ quam proxime. Mirum hic est Centrum spontaneum rotationis primitivæ tam parum abesse a centro ipso Globi Jovialis, ut ejus distantia superet semidiametrum Jovis vix decima sui parte, vel una tantum semidiametro Terræ; cum in minoribus Planetis, Terra nempe & Marte, distantia illa in priore quinquies duodenis, in altera septies duodenis vicibus suam respective semidiametrum omnino excedat.

Quod attinet ad Saturnum & Mercurium; hac de re pro illis nihil asserere possumus, quoniam eorum revolutiones circa axes suos hactenus sunt ignotæ: neque etiam quicquam decernere volumus de Venere, ob incertam ejus atque dubiam revolutionis diurnæ durationem; dum aliqui illam statuunt 23 horarum, alii vero, ut BIANCHINUS, totidem dierum.

Cæterum silentio non prætereundum est, Planetas fuisse hic consideratos ut nudos, atque liberos a circumfusis atmosphæris; cum autem probabiliter singuli Planetæ, saltem primarii, ut Terra, suas habeant atmosphæras, quæ, simul cum Planetis quos ambiunt, circumrotantur, atque ita cum illis constituant singuli unam continuam massam; non videtur dubitari posse, quin aliter se habeant loca punctorum B & A, quam a nobis determinata sunt: an autem ab accessione atmosphæræ magna & sensibilis oritura esset differentia, merito dubitamus, ob raritatem materiæ atmosphærarum, usque adeo rarescentis ascendendo a superficie Planetarum per regiones altissimas, ut omnis

nis

nis ejus quantitas collectim sumta tantum non pro nihilo reputari possit, respectu habito ad molem ingentem materiæ densissimæ, ex qua constant Planetæ: id quod facile per calculum demonstrari posset, sed brevitati studendum est. In eadem sententia fuisse NEWTONUM patet ex ejus *Principiis Phil. Natural. p.* 470. Edit. secundæ; ubi hæc habet verba: *Globus aëris nostri digitum unum latus, ea cum raritate quam haberet in altitudine semidiametri unius Terrestris, impleret omnes Planetarum regiones, ad usque spharam Saturni & longe ultra.*

XXXIX.

Ad clariorem intelligentiam eorum quæ sequuntur, præmittendum est hoc

LEMMA.

Data, in oscillationibus minimis, relatione inter vires acceleratrices & excursiones a puncto quietis; invenire longitudinem Penduli simplicis isochroni oscillationibus illis.

SOLUTIO.

Esto semi-Cycloïs ABD inversa, cujus vertex D; evoluta AFE est etiam semi-Cycloïs ipsi DBA æqualis. Notum est ultimum radium evolutionis DE esse pariter æqualem semi-Cycloïdi ABD, & esse longitudinem Penduli simplicis, cujus semi-oscillatio minima est isochrona descensui corporis gravis per semi-Cycloïdem, vel per arcum BCD, incipiendo descendere a quocunque puncto B. Notum est denique, vim acceleratricem tangentialem corporis descendentis, in quolibet puncto B, esse ad vim acceleratricem naturalem, in puncto A, secundum tangentem verticalem, ut se habet longitudo arcus BD ad longitudinem semi-Cycloïdis ABD, seu rectæ ED. Esto jam alicubi corpus quoddam C, ab aliqua causa constitu- TAB. LXXXVI. Fig. 14.

 tum

tum in motu oſcillatorio, ita ut, pro quavis aſſumta excurſione t a puncto quietis, data ſit ejus competens vis acceleratrix γ, proportionalis utique excurſioni t; lubeatque jam invenire longitudinem Penduli ſimplicis, corporis C oſcillationibus iſochroni. Ad hoc obtinendum, fingamus excurſionem t eſſe portiunculam DC infimam Cycloïdis quærendæ, ita ut vertex D ſit in puncto quietis, a quo fiunt excurſiones. Erit igitur, per prædictam proprietatem Cycloïdis, ut vis acceleratrix γ in loco C, ad vim acceleratricem naturalem g in initio Cycloïdis A, ita longitudo excurſionis t, ſeu DC, ad ABD, quæ erit longitudo quæſita Penduli ſimplicis iſochroni ED $= \frac{gt}{\gamma}$.

X L.

De corporum aquæ inſidentium oſcillationibus, & de invenienda longitudine Penduli ſimplicis oſcillationibus illis iſochroni.

De corporibus humido inſidentibus jam aliquid ſcripſit ARCHIMEDES, quod extat inter ejus Opuſcula; ubi id tantum egit, ut definiret ſitum, quem quædam ſolida, præſertim Conoidea Parabolica, in aqua ſtagnante acquirere debent, ut in quiete permaneant; ad eundemque redeant, ſi ex iſto ſitu nonnihil fuerint deturbata. Hujus rei natura nititur duobus Principiis, quorum unum eſt, quod Centrum gravitatis ſolidi inſidentis ſit in eadem recta verticali cum Centro gravitatis voluminis aquei, cujus ſpatium occupat ſolidum inſidens. Hujus Principii veritas haud longe eſt petenda, & fere per ſe patet. Alterum vero Principium, quod demonſtrari poteſt, in hoc conſiſtit, ut intervallum duorum planorum horizontalium, per duo illa Centra gravitatis tranſeuntium, ſit vel minimum, vel maximum; nempe minimum, ſi Centrum gravitatis ſolidi fuerit altius Centro gravitatis voluminis aquei, uti ſi ſolidum eſt ex materia homogenea; maximum vero intervallum erit, ſi gra-

Centrum gravitatis solidi fuerit profundius quam Centrum gravitatis voluminis aquei, id quod contingere potest, in casibus ubi materia solidi est heterogenea, seu non uniformiter densa.

XLI.

Concipiamus igitur, in aqua stagnante, corpus aliquod solidum CAEB specifice levius quam aqua; quod suo pondere demersum hæreat, usque ad superficiem primo horizontalem AB: sit vero G, Centrum gravitatis totius corporis CAEB; quod, ut rem generalissime pertractemus, supponimus quomodocunque heterogeneum. Intelligatur jam planum aliquod verticale transiens per Centrum gravitatis G; cujus plani sectio in superficie corporis formet curvam CAEB. Clarum est, ex Staticis, rectam verticalem EGI, ductam per Centrum gravitatis G corporis solidi, transituram quoque esse per punctum O, quod foret Centrum gravitatis voluminis aquei, cujus spatium occupatur a parte corporis immersa AEB. Vis enim aquæ corpus sursum pellere nitens, concentrata in O, debet esse æqualis, & directe opposita vi ponderis in G collectæ, & corpus deorsum urgenti; alioquin corpus in æquilibrio subsistere non posset. TAB. LXXXVI. *Fig.* 15.

XLII.

PROBLEMA I.

Moveatur corpus paulisper circa punctum G, ita ut recta GOI ex situ verticali G*i* inclinetur, faciatque cum ea angulum acutissimum IG*i*; quo fiet ut etiam planum sectionis aquæ AIB, quod erat horizontale, jam faciat cum nova sectione *a*I*b* angulum acutissimum, & quidem æqualem angulo IG*i*. Corpus vero nunc sibi relictum remeabit ad situm quietis & ultra, [præsertim si G fuerit infra O;] atque motu reciproco formabit oscillationes. Quæritur longitudo Penduli simplicis, quod faciat cum illis oscillationes contemporaneas?

SOLU-

SOLUTIO.

Hoc Problema excogitatum primo, atque solutum ab ingeniosissimo nostro EULERO [cujus autem analysin ipsam hactenus nondum vidi] ex meis principiis solvitur sequentem in modum. Ante omnia observo, corpus CAEB, inter oscillandum, semper occupare volumen aqueum æquale dato; ut nimirum eadem semper servetur ratio inter volumen partis immersæ & volumen corporis totius; quod sane ex æquilibrii natura manifestum est.

Hinc sequitur, volumen aqueum ungulæ AI*a*, inter plana AI & *a*I contentæ, esse æquale alteri volumini BI*b*, quod ex aqua emersit.

Quod si jam *o*, in recta verticali G*i*, fuerit Centrum gravitatis voluminis aquei, existente scilicet corpore in statu quietis, seu æquilibrii; erit ducta GI perpendiculari ad AB, sumtaque GO $=$ G*o*, erit, inquam, punctum O Centrum gravitatis voluminis aquei *a*E*b*; ipsaque O*o*, ob parvitatem anguli OG*o*, haberi potest pro horizontali linea, quæ producta, transibit per ω Centrum gravitatis voluminis aquei *a*E*b*, quod occupat corpus in situ inclinato. A determinatione hujus puncti ω dependet Problematis solutio.

In hunc finem, posito angulo acutissimo AI*a*; vel BI*b*, vel *o*GO $= n$; erit O*o* $= n \times$ G*o*. Concipiatur totum volumen aqueum a corpore occupatum [quod dicatur *V*] divisum in strata verticalia parallela plano AEB vel *a*E*b*; quo ipso, utraque ungula resolvetur in stratula triangularia acutissima, habentia singula suos angulos acutos æquales ipsi AI*a*, vel BI*b*. Quare, si in unoquoque stratulorum, latus illud quod ipsi AI est parallelum dicatur y; ut &, ab altera parte, in unoquoque stratulorum latus illud quod ipsi IB est parallelum, vocetur z; ipsa vero crassities communis stratulorum nominetur dx; erunt utique singula stratula ipsi AI*a* parallela $= \frac{1}{2} nyydx$, & pariter ab altera parte singula ipsi BI*b* parallela $= \frac{1}{2} nzzdx$; unde contentum ungulæ inter plana AI & *a*I $= \frac{1}{2} n\int yydx$, & contentum alterius ungulæ inter BI & *b*I $= \frac{1}{2} n\int zzdx$.

Porro,

Porro, nominando g vim gravitatis naturalis, qua corpora animantur; atque V volumen AEB vel aEb, quod corpus occupat in aqua; erit utique pondus ejus aquæ, quæ hoc volumen repleret, $= gV =$ [per Legem Hydrostaticam] ponderi ipsius corporis aquæ insidentis; tanta enim vi gV ab aqua ambiente sursum urgetur corpus, quanta ipsum suo pondere nititur deorsum; quæ causa est, ut, cum duo Centra gravitatis o voluminis aquei & G totius corporis respondent sibi mutuo in eadem recta verticali Go, servetur æquilibrium. Videndum itaque est, quid fiat, si recta conjungens centra ex situ verticali Go paululum inflectatur in situm obliquum GO. Hic quidem statim obvium fit, punctum O, etsi sit centrum voluminis AEB, non tamen esse Centrum voluminis nunc occupati aEb; utpote cujus Centrum erit alicubi in ω, prolongando scilicet lineolam oO, ut modo supra jam innui. Est vero pondus ungulæ aqueæ AIa $= \frac{1}{2}gnfyydx$, & pondus ungulæ BIb [si nempe aqua esset plena] $= \frac{1}{2}gnfzzdx$.

Intelligatur nunc super GI [quæ transit per Centrum gravitatis O voluminis uniformiter densi AEB] erectum esse planum perpendiculare plano sectionis AEB, vel aEb; erit, ex principio Statico, O$\omega \times gV$ [quatenus volumen AEB venit in situm aEb] $=$ momento ponderis voluminis aquei, respectu plani super EI erecti. Hoc autem momentum est æquale summæ momentorum partium, hoc est, momento voluminis totius AEB, plus momento ungulæ AIa, minus momento ungulæ BIb. Quia vero volumen aqueum AEB habet suum Centrum gravitatis O in ipso plano super GI perpendiculari; erit ejus momentum $= 0$, atque alterum momentum ipsius BIb, utpote priori AIa oppositum, adeoque hujus respectu negativum, fiet affirmativum, ob negationem negativi.

Ungulæ momentum habetur, sumendo aggregatum momentorum, quod fit ex momentis singulorum stratorum triangularium, quorum unumquodque momentum strati in ungula AIa est $= \frac{2}{3}$ AI $\times \frac{1}{2}gn$ AI^2 $dx = \frac{1}{3}gn$ AI^3 $dx = \frac{1}{3}gny^3dx$; ac pariter unumquodque momentum strati in altera ungula BI$b = \frac{1}{3}gnz^3dx$. Hinc igitur O$\omega \times gV = \frac{1}{3}gnfy^3dx + \frac{1}{3}gnfz^3dx = \frac{1}{3}gnf(y^3+z^3)dx$,

adeoque $O\omega = \frac{n\int(y^2+z^2)\,dx}{3V}$; & $Oo + O\omega$, seu $o\omega = n\,Go + \frac{n\int(y^2+z^2)\,dx}{3V}$.

Inventa hoc modo distantia $o\omega$; ducatur porro verticalis ωR, occurrens in R horizontali GR ductæ ex puncto G, quod considerari potest instar puncti suspensionis Penduli inversi, circa quod tota figura solida CAEB suas oscillationes facit: ita ut $o\omega$ designet excursionem Centri gravitatis ω voluminis aquei a corpore occupati, interea dum Oo est excursus, ipsius puncti O, quatenus in corpore oscillante eundem semper locum occupat, atque ad punctum stabile o hinc inde reciprocando tendit. Patet enim motum puncti G, si quem haberet sursum vel deorsum versus, debere esse infinities minorem, quam est motus oscillatorius Centri gravitatis o in directione horizontali Oo; qui motus jam ipse tardissimus est, utpote qui supponitur facere oscillationes minimas tempore finito. Quod cum ita sit, habebimus vectem rectangularem oGR, super hypomochlio G, ad cujus brachii horizontalis GR extremitatem R, applicari intelligitur tota vis voluminis aquei gV sursum tendens in directione verticali Rω.

Instituendo itaque, ex natura vectis, hanc analogiam: Ut se habet longitudo brachii Go, ad longitudinem brachii GR, seu $o\omega$, seu $n.Go + \frac{n\int(y^2+z^2)\,dx}{3V}$, ita erit vis ponderis gV punctum R sursum urgentis ad $gnV + \frac{gn\int(y^2+z^2)\,dx}{3Go}$, sive ad $\frac{gnV}{Go} \times \left(Go + \frac{\int(y^2+z^2)\,dx}{3V}\right)$; id quod erit vis motrix [quæ pro vi ponderis gV substituenda est] applicanda in o horizontaliter ad restituendum corpus insidens oblique ad situm æquilibrii verticalem.

Restat ut investigetur, ex ista vi motrice, vis acceleratrix; quod peragitur, si concipiatur corpus CAEB resolutum in particulas minimas p, quarum singularum densitas propria dicatur δ, ita ut δp significet quantitatem materiæ singulis particulis com-

competentem [hoc ita facio quia ſupponitur corpus inſidens eſſe heterogeneum, ſeu non uniformiter denſum]; ſit vero denſitas aquæ, utpote uniformiter denſæ = 1. Dicatur porro r diſtantia particulæ cujuſlibet ab axe per punctum G tranſeunte, circa quem corpus inſtar Penduli inverſi oſcillatur. Hinc ſi, loco totius corporis, intelligamus in puncto o concentratam eſſe quantitatem materiæ, quæ ſit $= \frac{\int rr\,\delta p}{Go^2}$, concludimus ex §. 8 hanc maſſam concentratam a vi motrice eodem modo oſcillaturam, ac facit corpus ipſum CAEB. Quare ſi dividatur vis illa motrix quæ eſt $\frac{gnV}{Go} \times (Go + \frac{\int (y^2 + z^2)\,dx}{3V})$ per quantitatem materiæ $\frac{\int rr\,\delta p}{Go^2}$; prodibit vis acceleratrix horizontalis $= \frac{gnV \times Go}{\int rr\,\delta p} \times (Go + \frac{\int (y^2 + z^2)\,dx}{3V})$. Cognita jam vi acceleratrice horizontali, & data longitudine excurſionis Oo, quæ eſt $= na$ ſeu n. Go, facile invenimus, ex natura Cycloïdis, longitudinem Penduli ſimplicis iſochroni cum corpore in aqua lateraliter oſcillante; faciendo ſcilicet tantum hanc analogiam [per *Lemma* ad §. 39]: Ut ſe habet vis acceleratrix $\frac{gnV \times Go}{\int rr\,\delta p} \times (Go + \frac{\int (y^2 + z^2)\,dx}{3V})$ ad vim acceleratricem naturalem g, ita longitudo excurſionis n.Go ad quartam, quæ erit $\frac{3\int rr\,\delta p}{3V.Go + \int (y^2 + z^2)\,dx}$ = longitudini Penduli ſimplicis iſochroni.

XLIII.

ALITER.

Ex puncto O, in quo maſſa materiæ $\frac{\int rr\,\delta p}{Go^2}$ concentrata ponitur, erigatur verticalis OS, atque ſecundum hanc directionem vis motrix ſurſum trahens eam maſſam habetur, faciendo, ex natura vectis, ut Oo ad ωo, ita vis voluminis aquei collecta

 in

in ω, hoc est, gV, ad $\frac{gV.\omega o}{Oo}$ = [substituendo pro Oo & ωo eorum valores] $gV + \frac{g\int(y^3+z^3)dx}{3Go}$. Et sic res reducta est ad considerationem Penduli simplicis inversi, cujus longitudo est Go, vel GO, punctum suspensionis G, corpus in o vel O sursum gravitans $=\frac{\int rr\delta p}{Go^2}$, gravitatio ipsa, seu vis motrix, sursum tendens $= gV + \frac{g\int(y^3+z^3)dx}{3Go}$. Quare, dividendo hanc vim motricem per massam corporis $\frac{\int rr\delta p}{Go^2}$; prodibit vis acceleratrix, qua hoc corpus animatur, $=\frac{gV\times Go^2+\frac{g}{3}Go.\int(y^3+z^3)dx}{\int rr\delta p}$. Jam vero, per Propositionem supra citatam §. 9, quam demonstravi in *Actis Lips.* 1713, p. 79, * duo nimirum Pendula simplicia a diversis viribus acceleratricibus agitata esse isochrona, si habuerint longitudines suis viribus acceleratricibus quibus animantur proportionales. Proinde dicendo, ut se habet corporis nostri $\frac{\int rr\delta p}{Go^2}$ vis acceleratrix $\frac{gV\times Go^2+\frac{1}{3}g\times Go\times\int(y^3+z^3)dx}{\int rr\delta p}$ ad vim acceleratricem naturalem g, ita longitudo Go ad $\frac{3\int rr\delta p}{3V\times Go+\int(y^3+z^3)dx}$, quæ erit longitudo quæsita Penduli simplicis isochroni; prorsus ut ante.

COROLLARIUM.

Si corporis $CAEB$ Centrum gravitatis G est altius quam Centrum gravitatis o voluminis aquei; id quod necessario fieret, si corpus esset homogeneum; evadit Go negativa: quo casu gravitatio, seu vis motrix corpus sursum urgens, exprimenda est per $gV - \frac{g\int(y^3+z^3)dx}{3Go}$; atque ita accidere potest ut valor ejus fiat omnino negativus, quando scilicet $\frac{\int(y^3+z^3)dx}{3Go}$ supe-

* N°. XC, pag. 518, Tom. I.

ſuperat ipſum V; quod ubi contingit, viſibile utique eſt corpus, tantillum inclinatum ex ſtatu æquilibrii, non poſſe reſtitui, ſed prorſus præceps ſubverſum iri.

XLIV.

SCHOLIUM.

Gravitatio, ſeu vis motrix qua corpus inter oſcillandum ſurſum urgetur, eſt forſan illa ipſa, quæ ab EULERO noſtro, in litteris ſuis die 30 Julij, 1738, ad me datis, vocatur *vis firmitatis reſiſtens inclinationi corporis*: revera enim formula mea $gV + \frac{g\int(y^3+z^3)\,dx}{3Go}$, vel, quæ eodem recidit, $\frac{gV}{Go} \times (Go + \frac{\int(y^3+z^3)\,dx}{3V})$ nihil differt ab *Euleriana*, $M(GO + \frac{\int(y^3+z^3)\,dx}{3V})$; ubi M idem denotat quod apud me gV; nempe pondus Corporis oſcillantis, vel, quod perinde eſt, voluminis aquei a corpore occupati; niſi quod diſcrimen aliquod utrobique obſervetur, dum apud me hoc pondus gV vel M diviſum conſpicitur per Go vel GO; apud EULERUM vero non item; quod forſan per inadvertentiam ſubſcribere omiſit: in qua conjectura eo magis confirmor, quia alias vis firmitatis compararetur cum pondere multiplicato per lineam, quæ ſunt res inter ſe incomparabiles: talis autem incongruentia non reperitur in mea expreſſione, in qua quippe linea $Go + \frac{\int(y^3+z^3)dx}{3V}$, diviſa per lineam Go, dat numerum, quiſquis ille ſit; qui indicat, quoties ſumendum ſit pondus gV, vel M, ut fiat æquale vi firmitatis, vel, ut ego voco, vi motrici ex oſcillatione oriundæ & ſurſum tendenti. Atque ita vis cum pondere comparatur, homogeneum cum homogeneo; quæ utique non ſunt aſyſtata.

XLV.

Problema II.

Corpore dato oscillante verticaliter in aqua, hoc est, sursum deorsum alternatim ascendente & descendente per excursiones minimas; invenire ejusdem oscillationum legem; seu determinare longitudinem Penduli simplicis isochroni.

Cum primum mihi proponeretur Problema præcedens, de corporibus in fluido lateraliter vel horizontaliter oscillantibus, protinus incidi in hoc alterum Problema de eorundem oscillationibus verticalibus determinandis; quod etsi sit solutu multo facilius priori, non tamen minus curiosum & utile deprehendi. Solutionem meam communicavi cum Exc. Eulero; qui deinde & suam perscripsit cum mea apprime conspirantem. Ecce nunc viam solvendi quam inieram.

Solutio.

Monendum est in antecessum, hic non venire in considerationem, utrum corpus aquæ insidens, sit ex materia per totum homogenea, an heterogenea; modo totius gravitas specifica habeat rationem datam ad gravitatem specificam aquæ. Sit
TAB. LXXXVI. Fig. 16. igitur in vase, si vis, cylindrico ABCD [neque enim figura vasis aliquid ad rem facit] sufficiens quantitas aquæ, in qua suspensum hæreat in æquilibrio corpus GHLM; sitque tunc aquæ superficies EF in altitudine BE vel CF. Quo posito, duo sunt casus expendendi; vel enim vas satis est angustum, ut superficies EF comparari possit cum area sectionis HM quam corpus format in superficie EF; vel vas tantæ est amplitudinis, ut superficies EF infinities quasi superet aream HM. Prior casus solutus dabit, per Corollarium, solutionem posterioris.

Sit igitur area sectionis HM $= a$, area vasis amplitudinis EF $= b$, massa corporis $= M$, vis gravitatis, qua corpora naturaliter ad accelerationem animantur, $= g$; adeoque corporis pondus,

pondus, seu vis motrix qua ad descensum sollicitatur, $= gM$. Hæc vis, existente corpore in æquilibrio, destruitur a vi contraria & æquali, quam aqua exercet sursum in corporis partem demersam; hæcque vis aquæ, per Principium Hydrostaticum, æqualis est ponderi aquæ, quæ in volumine a corpore occupato contineri potest. Dicatur hoc volumen $= V$.

Concipe jam corpus GL ex situ æquilibrii elevari verticaliter ad parvam altitudinem expressam per $EN = x$; quo ipso descendet superficies EF per altitudinem EP, quæ erit $= \frac{ax}{b-a}$; oportet enim ut $EN \times HM$ sit $= EP \times (EF - HM)$. Hinc $NP = \frac{ax}{b-a} + x = x\left(\frac{b}{b-a}\right)$; quod multiplicatum per HM, seu a, dabit $HM \times NP = ax \times \left(\frac{b}{b-a}\right) =$ decremento voluminis aquei. Perspicuum autem est, ex Hydrostaticis, quod quanta pars voluminis in aqua occupati per ascensum corporis amittitur, tanta vicissim pars destructæ vis motricis in corpore recuperetur.

Faciendo itaque, ut se habet volumen V ad decrementum voluminis $ax \times \left(\frac{b}{b-a}\right)$, ita vis motrix totalis gM ad quartum $\frac{gMax}{V} \times \left(\frac{b}{b-a}\right)$, quod erit $=$ vi motrici, quæ divisa per massam corporis M, dat vim acceleratricem $= \frac{gax}{V} \times \left(\frac{b}{b-a}\right)$, proportionalem ipsi x, seu distantiæ a situ æquilibrii: unde statim patet oscillationes esse tautochronas. Sed ut determinetur longitudo Penduli simplicis isochroni; instituenda est hæc altera analogia [per *Lemma* ad §. 39]: Ut vis acceleratrix inventa $\frac{gax}{V} \times \left(\frac{b}{b-a}\right)$ ad vim acceleratricem naturalem g; ita x, seu distantia a situ æquilibrii, ad quæsitam longitudinem Penduli simplicis isochroni; quæ proin longitudo erit $= \frac{(b-a)V}{ab}$ $= \frac{V}{a} - \frac{V}{b}$.

Co-

COROLLARIUM.

Hinc ſponte fluit caſus alter, ubi nimirum vas eſt ampliſſimum; quo caſu $\frac{V}{b}$ evaneſcet juxta $\frac{V}{a}$; unde longitudo Penduli fiet $= \frac{V}{a}$; ex quo hæc elegans elicitur conſtructio. Super baſi a, ſeu HM, erigatur ſolidum cylindricum, ſeu priſmaticum æquale volumini aqueo HLM; eritque altitudo illius ſolidi cylindrici æqualis longitudini Penduli ſimplicis iſochroni.

XLVI.

SCHOLIUM.

Poteſt hæc proprietas habere aliquam utilitatem in Nauticis. Ut ſi Navis quædam onuſta in Portu ad anchoram alligata hæreat, eaque incipiat a maris criſpatione acquirere [ut fieri ſolet] exiguum motum ſubſultantem ſurſum deorſum; Obſervator quiſpiam ſtans in littore, atque ad manus habens Pendulum, quod nunc elongando, nunc abbreviando, ita moderetur, donec fiat iſochronum; habebit Penduli ſui longitudinem; quam ſi multiplicaverit per aream ſectionis Navis, ſeu ſupremæ ſuperficiei voluminis aquei, quam ipſa Navis occupat in aqua, reſultabit productum, ex. gr., in pedibus cubicis expreſſum; atque ſic cognito pondere unius pedis cubici aquæ, innoteſcet pondus totius voluminis aquæ quam Navis in mari occupat, hoc eſt, pondus ipſius Navis, una cum omnibus oneribus contentis. Detracto igitur pondere Navis vacuæ omniumque utenſilium [quod ſemel exploraſſe ſuffecerit,] monſtrabit reſiduum quanti ponderis ſint merces contentæ, & quæcunque inſunt onera acceſſoria ſimul ſumta.

XLVII.

De Oſcillationibus Corporum titubantium ſuper ſuperficie aliqua immobili.

Alia datur ſpecies oſcillationum tautochronarum minimarum, quas

quas observamus in corporibus convexis gravibus, atque incumbentibus alicui superficiei immobili quam tangunt in unico puncto. Intelligimus namque istius modi corpus fore in æquilibrio positum, quamdiu ejus Centrum gravitatis est in recta verticali, quæ transit per punctum contactus: statim vero ac tantillum dimovetur ex hoc situ, quem pono corpus sponte acquisivisse ab actione suæ gravitatis, perspicuum est, ad eundem situm post titubationes multas ultro citroque faciendas, more oscillationum, esse rediturum, inibique iterum in æquilibrio mansurum. Jam igitur determinanda est longitudo Penduli simplicis titubationibus illis, sive oscillationibus, isochroni.

XLVIII.

PROBLEMA III.

Esto corpus grave, cujus sectio verticalis, transiens per Centrum gravitatis G, sit curva qualiscunque LMAN: incumbatque corpus plano horizontali PH in puncto A, ita ut AG sit verticalis, seu ad angulos rectos cum horizontali PH; quo fiet, ut corpus maneat in æquilibrio. Quod si nunc tantillum rotetur corpus, per arculum minimum A*b*, cadente puncto *b* in B, in quo jam tanget planum horizontale PH; evidens est corpus in hoc statu subsistere non posse, sed alterutrum fieri, ut, vel porro præceps rotando labatur versus H, vel remeet ad pristinum situm, & ultra nonnihil versus P, unde eundo & redeundo sæpius oscillationes faciet; qui noster est casus, quem determinare debemus. Prius fieret, hoc est, præcipitaretur corpus, si centrum C circuli osculantis curvam MAN in puncto A, esset infra centrum gravitatis G; posterius vero fiet si C est supra G, prouti hic supponimus.

TAB. LXXXVI. *Fig.* 17.

XLIX.

Finge jam corpus rotari per arculum minimum A*b*, & cadere punctum *b* in B; quo motu exiguo puncta C & G descri-

bent duas lineolas horizontales CE & GF: quarum illa CE æqualis erit ipsi Ab vel AB; hæc vero GF, quamvis revera sit arculus nascens alicujus Cycloïdis protensæ, in qua punctum G est infimum, & F supra G ascendit, sed infinities minus quam est longitudo GF, ita ut GF pro recta horizontali sumi possit, quæ erit ad CE vel AB, ut se habet AG ad AC; id quod patet ex natura generationis Cycloïdalium. Quare ducta recta AE transibit per punctum F, facietque angulum CAE æqualem angulo contactus bAB; considerando nempe circulum osculatorem, ut Polygonum infinitorum laterum. Porro puncta F & B conjungantur per rectam FB, quæ ad curvedinem nascentem GF erit normalis in F; atque ex F demittatur FD parallela verticali AC. Dicantur autem AG $= a$, AC $= b$, AB vel CE $= x$; proinde GF vel AD $= \frac{ax}{b}$, BD $= x - \frac{ax}{b} = (\frac{b-a}{b})\, x$.

L.

Sit item vis acceleratrix naturalis $= g$, massa totius corporis $= M$, adeoque pondus seu vis motrix absoluta $= gM$; quæ collecta in Centro gravitatis translato in F, nisum exerit ad redescendendum per curvedinem FG, qui nisus consistit in vi motrice oriunda ex vi absoluta gM, & quæ invenitur per decompositionem, faciendo, Ut se habet FB ad DB, ita erit gM ad $\frac{gM \times DB}{FB}$ = [quia FB æqualis censeri potest ipsi FD, vel AG, ob differentiam inassignabilem] $\frac{gM \times DB}{AG} = gM \times (\frac{b-a}{ba})\, x$ = vi motrici qua corpus urgetur ad descendendum per arculum FG.

LI.

Quærenda est insuper vis acceleratrix, ex principio nostro expli-

explicato in §§. 8 & 9. Resolvendo scilicet [sicuti jam aliquoties in hoc scripto fecimus] corpus LMAN in particulas minimas p, easque multiplicando per rr, quadrata suarum respective distantiarum ab axe rotationis perpendiculari ad sectionis planum LMAN, qui axis successive transit in singula puncta lineolæ infinite parvæ AB, quorum quodlibet inservit pro fulcro immobili, circa quod per momentum corpus aliquantillum gyratur; ita ut axis tanquam in situ invariabili considerari possit. Aggregatum igitur istorum productorum divisum per quadratum distantiæ Centri gravitatis F vel G, hoc est, $\frac{\int rrp}{aa}$ dabit corpus in Centro gravitatis concentrandum, & pro corpore dato LMAN substituendum, ad quod vis motrix $gM \times (\frac{b-a}{ba})\, x$ applicata eandem accelerationem pareret, quam producit in corpore dato. Atque ita dividendo vim motricem per massam corporis substituendi, habebimus vim acceleratricem $= gM \times (\frac{b-a}{ba})\, x : \frac{\int rrp}{aa} = gM \times (\frac{ba-aa}{b\int rrp})\, x$. Faciendo itaque, per *Lemma* ad §. 39, hanc analogiam, Ut se habet inventa vis acceleratrix $gM \times (\frac{ba-aa}{b\int rrp})\, x$ ad vim acceleratricem naturalem g; ita longitudo excursionis GF, seu $\frac{ax}{b}$, ad longitudinem quæsitam Penduli simplicis isochroni, quæ ergo reperietur $= \frac{\int rrp}{M \times (b-a)}$.

COROLLARIUM.

Si $b=a$, foret longitudo Penduli isochroni infinita, adeoque corpus ex puncto contactus A in punctum contactus B rotando inflexum, indigeret tempore infinito ad redeundum in pristinum situm; hoc est, plane non moveretur sponte. Quod vel ex eo quoque prævideri poterat, quia, centro circuli osculatoris C coalescente cum Centro gravitatis G, non potest corpus

regredi, neque etiam præceps prolabi: ergo manebit immotum, ſicuti ſequitur ex eo quod jam ſupra §. 48 innuimus.

L I I.

EXEMPLUM I.

Eſto corpus propoſitum ſegmentum Sphæræ, cujus radius ſit ipſum b, ſpectetque ejus vertex deorſum in quo tangat planum ſuper quo titubare debet; habeatque ſegmentum pro altitudine, quamcunque y. Invenio [ſalvo errore calculi] longitudinem Penduli ſimplicis iſochroni oſcillationibus hujus ſegmenti, hoc eſt, $\frac{\int rrp}{M \times (b - a)} = \frac{40bby - 6y^3}{60bb - 60by + 15yy}$. Si ſegmentum ſphæricum abit in Sphæram totam, ſeu ſi $y = 2b$; erit Penduli longitudo $= \frac{32b^3}{0bb} = \infty$, adeoque infinita, ut fieri par eſt: Sphæra enim tota in omni ſitu quieſcere debet. Pendulum quippe longitudinis infinitæ, requirit tempus infinitum ad unicam oſcillationem faciendam, hoc eſt, omnino quieſcit. Si vero ſegmentum ſit hæmiſphærium, ſeu ſi $y = b$; prodibit longitudo Penduli $= \frac{34b}{15} = 2\frac{4}{15}b$; quod per experientiam verificari poterit.

L I I I.

EXEMPLUM II.

Pro altero exemplo proponatur Conoïdes parabolicum, per revolutionem Parabolæ ordinariæ generatum, cujus parameter ſit $= 2b$, altitudo a vertice inverſo, ſeu puncto infimo $= y$. Calculus monſtrabit quod $\frac{\int rrp}{M \times (b - a)} = \frac{4by + 3yy}{6b - 4y} =$ longitudini Penduli iſochroni. Si $6b = 4y$; ſeu $y = \frac{3}{2}b$, quo caſu Centrum gravitatis Conoïdis coincidit cum centro circuli oſculatoris; erit longitudo Penduli infinita; adeoque hic pariter Conoïdes nonnihil inclinatum manebit in quiete; per conſequens non

non oscillabitur. Quod quidem in genere ita fiet, quotiescunque fit $b = a$: tunc enim semper est $\frac{\int rrp}{M.(b-a)} =$ infinito. Quod si, in hoc exemplo, esset $y = b$, seu æqualis semi-parametro, haberetur longitudo Penduli isochroni $= \frac{7}{2} b = 3\frac{1}{2} b$.

L I V.

SCHOLIUM.

Problema generalius propositum solvi potest, supponendo nempe superficiem PH, cui incumbit corpus LMAN, non esse planam, sed quamcunque aliam datam, concavam instar patellæ, super qua immobili oscillationes corporis titubantis determinandæ sint per longitudinem Penduli simplicis isochroni.

In hoc casu, ante omnia notandum, lineolam CE non esse æqualem ipsi AB; sed eam haberi, si prolongetur in mente verticalis AC ad punctum O, ita ut AO sit radius osculi sectionis superficiei PH in puncto contactus A: tunc enim ducta BO, abscindet ex horizontali CE veram longitudinem CE. Quare si dicatur AO $= c$, quæ data est, ob datam curvedinem lineæ PAH in puncto A; erit, retentis reliquis denominationibus, AO : AB = CO : CE, hoc est $c : x = c - b : \frac{c-b}{c} x =$ CE. Faciendo porro AC : CE = AG : GF, seu $b : \frac{c-b}{c} x = a : \frac{ac-ab}{bc} x =$ GF = AD. Hinc BD $= x - \frac{ac-ab}{bc} x = \frac{bc-ac+ab}{bc} x$.

Operando nunc in reliquis, ut factum est in §§. 50 & 51; invenietur longitudo Penduli simplicis isochroni $= \frac{(c-b)\int rrp}{M \times (bc-ac+ab)}$.

L V.

Hæc formula generalis complectitur utique præcedentem spe-

 cialem;

cialem: nam si superficies concava habet radium osculatoris in A infinitum, eadem est ac si in A esset plana: verum in hoc casu, ubi b evanescit juxta c, formula nostra generalis mutatur in hanc $\frac{\int rrp}{M \times (b - a)}$, quæ prorsus est eadem, quam invenimus pro plano horizontali PH.

Denique examinandum, an & qua conditione superficies PAH possit esse convexa, ut super ea oscillari queat corpus LMAN. In hunc finem, ponendum tantum est c negativum; habebitque expressio generalis hanc formam $\frac{(-c-b)\int rrp}{M \times (-bc+ac+ab)}$, vel, mutatis signis in utroque termino, hanc $\frac{(c+b)\int rrp}{M \times (bc-ac-ab)}$; unde patet, modo $bc - ac$ sit majus quam ab, seu c majus quam $\frac{ab}{b-a}$, corpus posse oscillari. Secus vero, si c minus fuerit quam $\frac{ab}{b-a}$, ultro sequitur corpus inclinatum non posse oscillando ad pristinum situm redire; sed protinus præcipitatum iri: quod quidem semper ita eveniet, quotiescunque valor formulæ in uno, vel altero, sive convexitatis, sive concavitatis, evadit negativus.

L V I.

De Pendulo luxato, & de ejus reductione ad Pendulum simplex isochronum.

Huc pertinent *Pendula*, quæ vocari possunt *luxata*. En eorum naturam: Finge Systema corporum, vel quamcunque figuram corpoream RSLT, quæ habeat ex Centro gravitatis C prodeuntem rectam CRB rigidam, seu inflexilem, ita ut eundem semper situm servet cum partibus figuræ RSLT, dum oscillatur. Ad extremitatem B concipe alligatum filum, flexile, seu inflexile, nil refert; modo, si sit inflexile, habeat in B articulationem, cujus ope

TAB. LXXXVI. Fig. 18.

ope inflecti possit in angulum OBC, instar baculi circa medium luxati in duas partes. Altera extremitate ex puncto fixo O suspensa, concitari intellige corpus RSLT in motum oscillatorium minimum: habebis, quod voco, *Pendulum luxatum.* Quæritur longitudo Penduli simplicis, quod sit cum luxato isochronum?

PRÆPARATIO.

Sit OV recta verticalis ducta per punctum suspensionis O, atque jam oscillando pervenisse ponatur Pendulum luxatum in situm OBRSLT; ubi statim video, ob impetum corporis id fieri, ut situs partis BC cadat extra situm partis OB. Concipiatur ergo pars rigida CB, producta donec secet verticalem OV in puncto A; quod erit punctum suspensionis, circa quod Pendulum instar ordinarii oscillatur, quamvis agitatum a vi motrice nondum cognita, & quæ est quærenda, ut Pendulum nostrum, ex A suspensum, comparari possit cum longitudine Penduli simplicis isochroni. In hunc finem considerentur sequentia.

1°. Pondus totius massæ ita agit, ac si in Centro gravitatis C esset concentratum; adeoque si massa corporis RSLT dicatur $= M$, & gravitas seu vis acceleratrix naturalis $= g$; erit vis motrix immaterialis in C applicanda $= gM$.

2°. Vis ista gM [ducta verticali CH, & prolongata BC ad D] impenditur tota in tensionem rectæ rigidæ BC, non obstante quod ejus directio verticalis CH differat a directione CD: nam, ob angulum HCD acutissimum, vis tensionis censetur æqualis vi motrici gM.

3°. Ab altera parte filum OB, ob angulum ABO pariter acutissimum, eadem vi resistit qua tenditur; unde punctum luxationis B, trahitur & retrahitur viribus æqualibus.

4°. Ex directionibus propriis virium in C & B, quarum illa est secundum verticalem CH, hæc vero secundum BO deduci debent per decompositionem vires normales ad BC in C & B. Ductis itaque horizontalibus DV, CE, BF, & AN normali

ad

ad OB; erit vis motrix normalis in C $= \frac{DH}{DC} \times g\ M = \frac{CE}{CA} \times g M = \frac{BF}{AB} \times g M$; altera vero normalis in B $= \frac{AN}{AB} \times g M$; adeoque vis normalis in C ad vim normalem in B, ut $\frac{BF}{AB} \times g M$ ad $\frac{AN}{AB} \times g M$, ut BF ad AN, ut OB ad OA.

5°. Habemus hoc modo vectem BC, cujus duæ extremitates C & B urgentur normaliter; sed contrario sensu, hoc est, ob angulum acutissimum CAE, tanquam horizontaliter in directione CE & in directione FB; illa ad verticalem, hæc a verticali OV tendendo.

6°. Hæ duæ vires normales, quarum una respectu alterius est negativa, habebunt commune centrum æquilibrii in D infra C; quod ita debet esse comparatum, ut sit vis normalis in C ad vim normalem in B, ut BD ad CD. Ex tribus igitur præmissis, invenitur quartum, faciendo nempe per divisionem rationum, ut se habet vis normalis in C minus vi normali in B, ad hanc vim normalem in B, ita BD — CD, seu BC, ad CD. Adeoque etiam [n. 4.] OB — OA : OA = BC : CD. Verum, ob angulos O & ABO acutissimos, censetur OB — OA = AB, & sic habebitur AB : OA = BC : CD; unde $CD = \frac{OA \times BC}{AB}$.

7°. Quod si jam removeantur vires normales, quæ sunt in C & B, illæque ambæ applicentur sub suis directionibus ad centrum æquilibrii D; ita ut inde resultet unica vis motrix $= \frac{BF}{AB} \times g M - \frac{AN}{AB} \times g M =$ (angulo FAB — ang. ABN)$\times g M$ = angulo FOB$\times g M$. Hæc certe vis motrix normaliter applicata in D, atque tendens ad verticalem OV, eodem modo urgebit corpus RSLT, ac facerent duæ illæ vires seorsim applicatæ in C & B.

8°. Habemus ergo casum in superioribus explicatum [§. 18] de natura Centri rotationis; ubi nimirum demonstravi, si corpus

pus aliquod, vel systema corporum firmiter inter se cohærentium, urgeatur a vi quadam motrice, cujus directio non transeat per Centrum gravitatis corporis vel systematis corporum, id futurum esse, ut rotari incipiat circa punctum quodpiam, quod manebit immobile, quodque ideo vocavi *Centrum rotationis spontaneum.* Hujus naturam talem esse ostendi [§. 16, & seqq.], ut sumto puncto applicationis vis motricis normalis ad rectam per Centrum gravitatis transeuntem pro puncto suspensionis, Centrum illud spontaneum fiat simul Centrum oscillationis corporis vel systematis corporum; per consequens vice versa, ut notum est, si Centrum spontaneum pro puncto suspensionis sumatur, ut punctum applicationis vis motricis normalis evadat simul Centrum oscillationis.

9°. Hinc concludimus, punctum A, quod modo supra [ante n. 1] vidimus debere considerari in Pendulo luxato tanquam punctum suspensionis Penduli ordinarii circa A oscillantis, simul fore Centrum spontaneum, quatenus corpus RSLT urgetur a vi motrice normaliter in D applicata. Duplex ista consideratio manu ducet ad æquationem quæsitam, ut sequitur.

SOLUTIO.

His ita præparatis, dicantur $OB = a$, $BC = b$, $AB = x$, adeoque $OA = a - x$; vis acceleratrix naturalis, qua scilicet corpora gravia naturaliter accelerantur, $= g$; massa corporis $RSLT = M$; ejusque pondus, seu vis motrix in directione verticali $= gM$.

Hinc [n. 6] $CD = \frac{OA \times BC}{AB} = \frac{(a-x).b}{x} = \frac{ab}{x} - b$;

cui addendo AC, seu $b + x$, habetur tota $DA = \frac{ab}{x} + x$.

Jam vero, ex natura Centri spontanei rotationis A, & ex demonstratis *Hugenianis*, erit eadem $DA = b + x + \frac{\int ttp}{(b+x)M}$;

adeoque $\frac{ab}{x} + x = b + x + \frac{\int ttp}{(b+x)M}$, proinde $\frac{ab}{x} - b = \frac{\int ttp}{(b+x(M}$.

Ut nunc commodius exprimatur $\int ttp$, per quod intelligitur aggregatum omnium productorum, quæ fiunt multiplicando ſingulas particulas minimas p corporis M per quadrata tt diſtantiarum ſuarum a recta per Centrum gravitatis C tranſeunte & parallela axi rotationis; notandum eſt, ſi corpus RSLT ſuſpenderetur ex puncto B, tanquam fixo ſuppoſito, fore ejus Centrum oſcillationis G datum, & ita quidem ut $BC \times CG \times M = \int ttp$, quæ eſt generalis proprietas Pendulorum ordinariorum jam ab HUGENIO demonſtrata.

Dicatur itaque $CG = c$, eritque $\int ttp = bcM$, quo ſubſtituto in æquatione modo ante inventa $\frac{ab}{x} - b = \frac{\int ttb}{(b+x)M}$, prodibit $\frac{ab}{x} - b = \frac{bcM}{(b+x)M}$, quæ reducta dat $xx = (a - b - c)x + ab$, unde $x = -\frac{1}{2}(a - b - c) \pm \frac{1}{2}\sqrt{((a - b - c)^2 + 4ab)}$.

Supereſt ut determinemus longitudinem Penduli ſimplicis luxato iſochroni; id quod peragitur in modum ſequentem. Conſiderare ſtatim jam licet ABC ut vectem rigidum, cujus hypomochlium fixum eſt in A, quique urgetur duabus viribus motricibus abductis, una in C verticaliter deorſum tendente, altera in B contrario niſu tendente verticaliter ſurſum; illa prior in C eſt ipſa vis ponderis $= gM$, hæc altera vero in $B = \frac{a-x}{a} gM$ [per n. 4]; ſunt enim vires verticales ipſis normalibus proportionales.

Subſtituatur nunc, loco vis motricis quæ eſt in B, alia in punctum C; quæ, ex natura vectis, idem cum illa habeat momentum; faciendo nempe ut ſe habet AC ad AB, ſeu ut $b + x$ ad x, ita $\frac{a-x}{a} gM$ ad $\frac{ax - xx}{ab + ax} gM$; erit hæc vis ſubſtituenda in C pro illa in B; atque ita habebitur in C unica vis motrix.

trix $= gM - (\frac{ax - xx}{ab + ax}) gM = \frac{ab + xx}{ab + ax} gM$; auferendo ſcilicet ſubſtituendam $\frac{ax - xx}{ab + ax}$ a priori gM, utpote ei contrariam.

Quod ſi nunc hanc vim motricem $\frac{ab + xx}{ab + ax} gM$ dividamus per maſſam in C concentrandum, ſicuti docuimus in nova noſtra Theoria de Centro oſcillationis in Pendulis ordinariis (§. 9) expoſita, obtinebimus $\frac{ab + xx}{ab + ax} gM : \frac{(b + x)^2 M + bcM}{(b + x)^2}$, ſeu $\frac{(b + x) \times (ab + xx) g}{a(b + x)^2 + abc}$ = vi acceleratrici maſſæ in C concentratæ.

Tandem, ex notiſſimo illo Theoremate, a nobis quoque dudum * demonſtrato, quod nempe longitudines Pendulorum ſimplicium iſochronorum ſint proportionales viribus acceleratricibus quibus animantur: dicendum eſt, Ut ſe habet inventa vis acceleratrix $\frac{(b + x) \times (ab + xx) g}{a(b + x)^2 + abc}$ ad vim acceleratricem naturalem g, hoc eſt. ut $(b + x) \times (ab + xx)$ ad $a(b + x)^2 + abc$, ita longitudo A C, ſeu $b + x$, ad quartam $\frac{a(b + x)^2 + abc}{ab + xx}$; quæ erit longitudo quæſita Penduli ſimplicis iſochroni Pendulo luxato.

In hac expreſſione, ſubſtituendus jam eſſet valor ipſius x ſupra inventus; ſed operatio nimis longa foret: quare per compendium procedamus. Vidimus, ab initio Solutionis, D A duplici modo expreſſam, ſcilicet $DA = \frac{ab}{x} + x = \frac{ab + xx}{x}$, & paulo poſt $DA = b + x + \frac{\int ttb}{(b + x) M} = [\text{ob} \int ttb = bcM]$ $b + x + \frac{bc}{b + x} = \frac{(b + x)^2 + bc}{b + x}$; ac proinde $\frac{ab + xx}{x}$ $= \frac{(b + x)^2 + bc}{b + x}$; unde ſequitur fore $(b + x)^2 + bc : ab + xx$ $= b$

* N°. XC. pag. 518. *Tom. I.*

$= b + x : x$; adeoque si in longitudine nostra $\frac{a(b+x)^2 + abc}{ab + xx}$, tam in numeratore quam denominatore, pro $(b+x)^2 + bc$ & $ab + xx$ scribantur eorum proportionales $b + x$ & x; prodibit fractio æquivalens $\frac{ab + ax}{x} =$ longitudini quæsitæ.

Nunc demum pro x substituatur valor inventus $\frac{1}{2}(a - b - c) \pm \frac{1}{2}\sqrt{((a - b - c)^2 + 4ab)}$, & resultabit $\frac{ab + ax}{x}$ seu $a + \frac{ab}{x}$ $= a + \frac{2ab}{a - b - c + \sqrt{((a - b - c)^2 + 4ab)}} = a + \frac{2ab(a - b - c \mp \sqrt{((a - b - c)^2 + 4ab)})}{-4ab} = a - \frac{1}{2}(a - b - c \mp \sqrt{((a - b - c)^2 + 4ab)}) = \frac{1}{2}(a + b + c) \pm \frac{1}{2}\sqrt{((a - b - c)^2 + 4ab)} =$ longitudini Penduli simplicis isochroni Pendulo luxato *Q. E. I.*

NOTA. Ut paulo simplicius exprimatur hæc longitudo; scribi potest una littera e pro $b + c$, nempe pro data BG; & erit longitudo quæsita $= \frac{1}{2}(a + e) \pm \frac{1}{2}\sqrt{((a - e)^2 + 4ab)}$.

COROLLARIUM I.

Si $a = 0$; fit longitudo quæsita $= \frac{1}{2}(b + c) \pm \frac{1}{2}(b + c) = b + c$, vel $= 0$. Prior $b + c$ manifeste satisfacit; hoc enim in casu, puncto B abeunte in punctum suspensionis, Pendulum luxatum mutatur in Pendulum ordinarium compositum, cui utique respondet Pendulum simplex isochronum habens, per hypothesin, longitudinem $= b + c = e$. Alter vero valor $= 0$, hic est inutilis.

COROLLARIUM II.

Si $a = b + c$; erit longitudo Penduli simplicis luxato isochroni $= a \pm \sqrt{ab}$.

COROLLARIUM III.

Si $b = 0$, quo casu $c = \infty$; erit longitudo quæsita $\frac{1}{2}(a+c) \pm \frac{1}{2}(a-c) = a$, vel $= c$; ubi prior a sola satisfacit; quod per se clarum est: in hoc quippe casu punctum luxationis B, existens in ipso Centro gravitatis C, facit ut, inter oscillandum, quælibet recta conjungens in corpore duo puncta moveatur motu sibi semper parallelo; & proinde tantundem est, ac si tota corporis massa esset in Centro gravitatis concentrata; ita ut Pendulum non differat a Pendulo simplici, cujus longitudo $= a$. Interim alter valor $c = \infty$, tanquam huc non quadrans, rejici debet.

LVII.

SCHOLIUM.

Concipiamus jam partem OB supra punctum luxationis B esse etiam rigidam; eamque oneratam novo pondere datæ figuræ, cujus Centrum gravitatis sit in puncto aliquo dato P in ipsa recta OB assumto. Methodus nostra determinandi longitudinem Penduli simplicis isochroni, etiam ad hunc casum porrigitur. Nam, pro corpore in P collocato, cujus massa dicatur $= m$, substitui potest aliud collocandum & concentrandum in puncto B (per §. 9); vocetur autem massa illius corporis substituenda in B $= \mu$, vis itaque motrix, quæ erat in P, $= gm$, nunc erit in P supponenda $= \frac{OP}{OB} \times gm$. Hoc modo fit, ut recta OB eadem vi ad motum angularem incitetur, sive massa m in P locanda agitetur per vim motricem gm, sive in B locetur massa μ, & urgeatur per vim motricem $\frac{OP}{OB} \times gm$. Habemus igitur vectem BC, oneratum duobus ponderibus in C & in B, quorum corpora, vel massæ corporum, sunt M & μ, quæ ut unum systema considerari debent; vis motrix in C

 $= gM$

$= gM$, altera in B $= \frac{OP}{OB} \times gm - gM$, sive $gM - \frac{OP}{OB} \times gm$, prout una vel altera prævalet. Atque ita res reducta erit ad casum præcedentem: Sufficit vestigia monstrasse, iis quibus animus est plenariam tentare solutionem.

Possemus si res tanti esset, extendere hoc negotium ad Pendula, in quibus duo, imo plura adessent puncta luxationum; sed talia relinquimus calculatoribus, qui otio abundant.

L V I I I.

De Pendulis sympathicis.

TAB. LXXXVI. *Fig.* 19.

Hoc nomine voco bina Pendula a communi quodam corpore gravi agitata, ita ut unum sine altero moveri non possit. Ad clariorem rei intelligentiam, concipe corpus grave, vel systema corporum quotcunque, per cujus Centrum gravitatis C trajectus sit paxillus tenuissimus in situ horizontali ACB, cujus duo brachia sint datæ longitudinis, nempe $AC = a$, & $BC = b$; unde totius paxilli longitudo $= a + b = c$. Ad extremitates A & B annexa sint duo fila flexilia, aut etiam rigida, sed tunc habentia in A & B luxationes, ita ut cum recta AB horizontali in angulos possint inflecti, prout res postulabit.

Sint fila verticaliter erecta $AD = m$, $BE = n$; atque suspensa ex punctis fixis D & E, ita ut corpus grave vel Systema corporum sustentetur a duabus potentiis quas opponunt fila AD & BE. Finge jam paxillum AB, ex situ quietis dimoveri paululum in plano DABE, & acquirat situm proximum ab; haud ægre percipis, mox inde oriri motum oscillatorium in eodem plano DABE, rectamque ab tam parum super AB elevari, ut censeri possit in eadem semper horizontali ultro citroque instar serræ reciprocari.

Ex quo motu parallelo singulorum corporis punctorum oppido patet, oscillationes eodem modo fieri, sive diffusum sit corporum systema, sive concentratum supponatur in suo Centro gravitatis C. Quare

Quare si massa, vel quantitas materiæ collectæ in C, dicatur $= M$, vis acceleratrix naturalis $= g$; erit pondus, vel vis motrix absoluta $= gM$. Hinc, ex natura vectis, vis motrix quam sustinet filum $AD = \frac{BC}{AB} \times gM = \frac{b}{c} \times gM$, & ea quam sustinet filum $BE = \frac{AC}{AB} \times gM = \frac{a}{c} \times gM$. Sit nunc excursio Aa vel $Bb = x$, erit, ob angulos ADa, BEb acutissimos, vis motrix, qua retrahitur punctum a versus suum situm æquilibrii in $A = \frac{BC}{AB} \times gM \times \frac{Aa}{aD} = \frac{b}{c} \times gM \times \frac{x}{m}$; pariterque vis motrix qua retrahitur punctum b versus suum situm æquilibrii in $B = \frac{a}{c} \times gM \times \frac{x}{n}$. Quia autem duæ istæ vires retrahentes conspirant ad restituendum paxillum cum pondere in situm æquilibrii, quod est in C; habebimus totalem vim motricem secundum horizontem agentem $= \frac{gM}{c} \times x \times (\frac{b}{m} + \frac{a}{n})$, quæ divisa per quantitatem materiæ movendæ, hoc est, per massam M, dat vim acceleratricem $= \frac{gx}{c} \times (\frac{b}{m} + \frac{a}{n})$

Instituendo igitur, per nostram Regulam in superioribus ostensam, hanc analogiam: Ut se habet vis acceleratrix inventa $\frac{gx}{c} \times (\frac{b}{m} + \frac{a}{n})$ ad vim acceleratricem naturalem g, ita longitudo excursionis Aa vel Bb, vel x, ad quartam $\frac{c}{\frac{b}{m} + \frac{a}{n}}$, hoc est ad $\frac{mnc}{ma + nb}$; erit hæc æqualis longitudini Penduli simplicis Pendulo nostro sympathico isochroni. *Q. E. I.*

COROLLARIUM I.

Si filorum longitudines AD & BE sunt æquales, id est, si $m = n$ fiet $\frac{mnc}{ma + nb} = \frac{mc}{a + b} = m$; ut quidem fieri prævideri

pote-

poterat: ambæ enim partes Penduli ſympathici nil aliud ſunt quam Pendulum ſimplex, ſibi ipſi utique iſochronum.

COROLLARIUM II.

Exiſtente longitudine fili BE valde magna, reſpectu alterius AD; ita ut cenſeri poſſit $n = \infty =$ infinita; fiet $\frac{mnc}{ma+nb}$ $= \frac{mc}{b} = \frac{ma+mb}{b} = \frac{ma}{b}+m$. Quod ſi præterea $a = b$; hoc eſt, ſi Centrum gravitatis C fuerit in medio intervalli filorum; erit longitudo Penduli ſimplicis iſochroni $= 2m$, ſeu dupla longitudinis fili AD.

COROLLARIUM III.

Cæterum generaliter verum eſt longitudinem Penduli ſimplicis iſochroni, ſemper conſiſtere mediam inter longitudines fili longioris BE & brevioris AD; ſeu, quod eodem recidit, fore ſemper $m > \frac{mnc}{ma+nb} > n$; cujus demonſtrationem, ob facilitatem non addo. Hinc patet ratio denominationis *Penduli ſympathici*: cum enim Pendulum longitudinis minoris AD, ſi independenter a majori oſcillari deberet, majorem haberet ad oſcillandum vim acceleratricem, & viciſſim minorem, ſi alterum per ſe ſolum oſcillaret; qua de cauſa, quaſi ipſa natura hoc obſervare videtur, ut ad oſcillationes mutuo conſenſu ſimultaneas faciendas, Pendulum brevius AD aliquid de vi ſua acceleratrice amittat, alterum longius BE acquirat; quo, veluti ex compacto, ſimul eant redeantque ſine impedimento.

LIX.

NOTA. Quod ſupra in Scholio ad §. 57, monuimus, ad hoc quoque genus Pendulorum ſympathicorum feliciter accommodari poteſt; etiamſi alias res videatur difficultatis plena.

Poſito

Posito namque fila AD, BE, quæ sustinent paxillum AB cum pondere in C, esse rigida, proptereaque, ut inflecti possint circa A & B, gaudere ibi articulationibus, seu punctis luxationum: hactenus est casus quem modo solitum dedimus. Sed si jam porro velimus insidere filis rigidis pondera data, quorum Centra gravitatis sint in locis datis p, q; hic casus, etsi plusculum difficultatis in se contineri videtur, reduci tamen potest ad Pendula sympathica pura, sine ponderibus p & q considerata.

Nam si, ut fecimus in §. 37, tollamus corpora p & q, eorumque loco substituamus duo alia, in punctis A & B locanda & concentranda, secundum legem in §. 9 expositam, habeantque debitam suam vim motricem; ut nimirum fila eadem vi incitentur ad motum angularem circa centra D & E, qua incitarentur, si corpora in p & q manerent.

Quo facto, habebimus paxillum AB oneratum Systemate trium corporum in A, B, & C, una cum ipsorum viribus motricibus datis, in quarum communi Centro gravitatis tria ista corpora collecta dabunt casum simplicem binorum Pendulorum sympathicorum; atque sic quæsito erit satisfactum. *Q. E. F.*

N°. CLXXVIII.

DE PENDULIS MULTIFILIBUS.

PROBLEMA.

Dato Pendulo NLK *circa punctum* N *oscillante, quod compositum sit duobus filis* NL, LK, *cum appensis duobus ponderibus* L, K, *quæ eodem tempore ad situm verticalem* NGM *perveniant, describendo arcus* LG, KM, *quorum ille, nempe* LG, *erit utique circularis, hic vero* KM *induet curvaturam quam exigit motus: Quæritur Lex oscillationis, suppositis filorum* NL, LK *longitudinibus æqualibus?*

TAB. LXXXVII. N°. CLXXVIII Fig. 1.

ANALYSIS.

I.

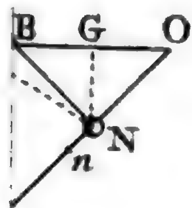
Sit corpus L $= a$, ejus pondus [supponendo vim gravitatis $= g$] $= ga$; corpus K $= b$, ejus pondus $= gb$; vis tensionis fili LK $= T$; ductisque ad axem verticalem NM perpendicularibus LH, KI, sit GH $= y$, MI $= q$; arcus GL $= r$, L$l = dr$, MK $= s$, K$k = ds$, HL $= e$, IK $= ne$, supponendo scilicet HL ad IK ut 1 ad n; quae ratio utique constans erit, si oscillationes sint minimae: sed primo rem considerabimus generaliter. Porro sit NL $=$ LK $= c$, & prolongando KL donec secet verticalem NM in F, ductisque in kl elementis normalibus Lp, Ko, sit $lp = dx = ko$. Dicatur velocitas in L $= v$, & velocitas in K $= u$.

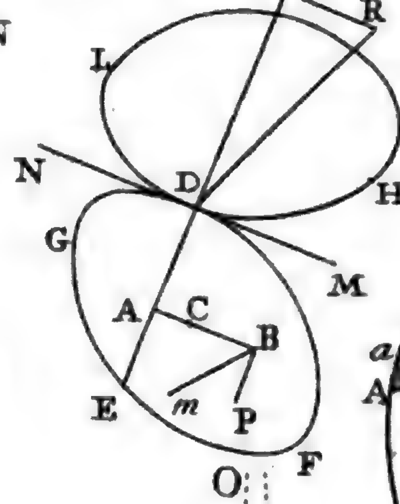
II.

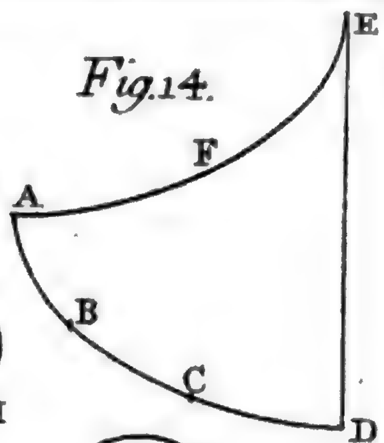
Faciendum nunc est $dr : dy = ga : \frac{gady}{dr}$; quae erit aequalis vi ponderis L secundum lL. Est $dr : dx = T : \frac{Tdx}{dr}$ aequale vi oppositae a fili LK tensione oriundae, adeoque $\frac{gady - Tdx}{dr}$ aequalis vi motrici corporis L secundum lL; unde dividendo per massam a, habetur vis acceleratrix $= \frac{gady - Tdx}{adr}$. Hinc ergo, ex Principio Dynamico, $\frac{gady - Tdx}{a} = vdv$; integrando, prodit $gy - \frac{1}{a}\int Tdx = \frac{1}{2}vv$. Simili modo invenitur $gq + \frac{1}{b}\int Tdx = \frac{1}{2}uu$. Verum, ob isochrona elementa lL, kK; erit $vv : uu = dr^2 : ds^2$; adeoque $dr^2 : ds^2 = gy - \frac{1}{a}\int Tdx : gq + \frac{1}{b}\int Tdx$; ex quo reperietur $T = \frac{gab}{dx} \times d\left(\frac{yds^2 - qdr^2}{adr^2 + bds^2}\right)$.

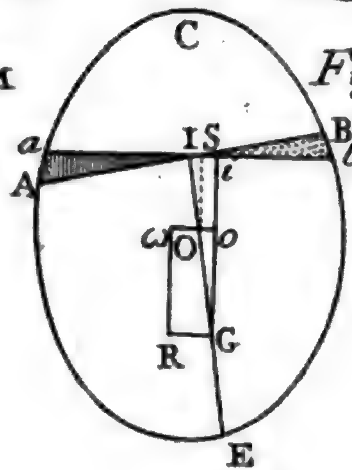
III.

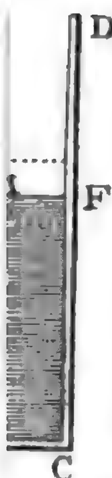
N.° CLXXVII.

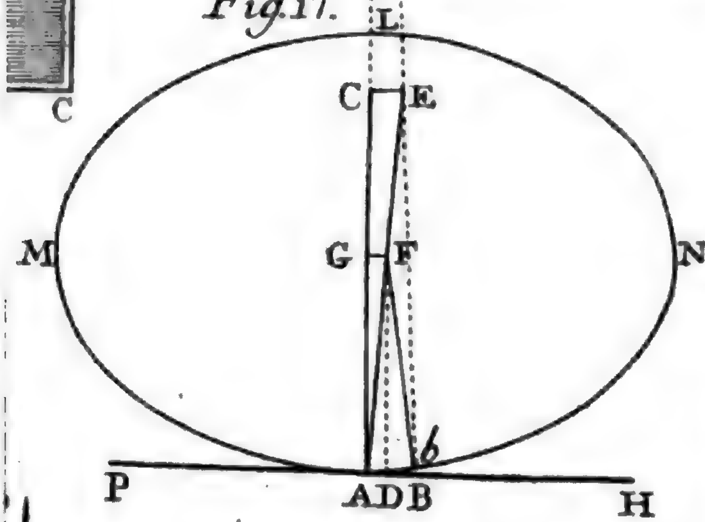

B
G
O
N
n

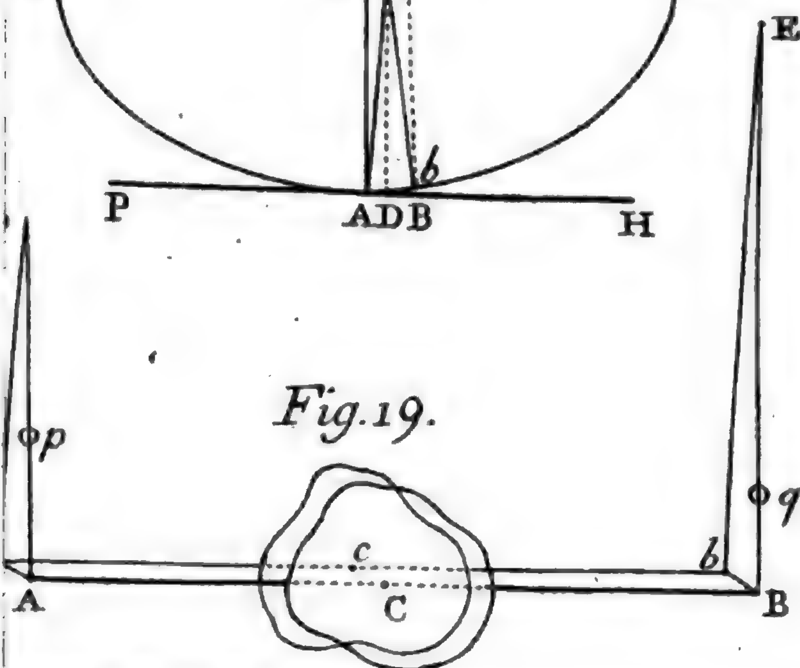

Fig. 13.
T
R
L
N
D
H
G
M
A
C
B
E
m
P
F
O


E
Fig. 14.
F
A
B
C
D


C
Fig. 15.
a
I S
B
b
A
i
ω
O
o
R
G
E


D
F
C


Fig. 17.
L
C
E
M
G
F
N
b
P
ADB
H


E
Fig. 19.
p
q
c
b
A
C
B

III.

Hoc ita se habet, quando ambæ curvæ sunt datæ, quibus corpora L, K, durante motu inhærere coguntur: sed si altera curva, ut MKk, est libere describenda a pondere K, utpote quod ab una parte sollicitatur ad descensum a tensione T in directione obliqua KL, ab altera vero parte a vi ponderis in directione verticali; quærendum est quanta vi hinc inde urgeatur in directione normali ad kK. Hoc fine, faciendum est Kk : Ko [$= ds : \surd(ds^2 - dx^2)$] $= T : \frac{T\surd(ds^2 - dx^2)}{ds}$ = vi normali ad partem concavam curvæ, & porro Kk : Kf [$= ds : \surd(ds^2 - dq^2)$] $= gb : \frac{gb\surd(ds^2 - dq^2)}{ds}$ = vi normali ad partem convexam curvæ. Hæ autem duæ vires directe oppositæ debent sibi mutuo esse æquales; quia curva MKk libere describitur; erit itaque $\frac{T\surd(ds^2 - dx^2)}{ds} = \frac{gb\surd(ds^2 - dq^2)}{ds}$; unde denuo $T = gb\surd\frac{ds^2 - dq^2}{ds^2 - dx^2}$. Æquando ambos valores ipsius T, prodit nova æquatio $ad(\frac{yds^2 - qdr^2}{adr^2 + bds^2}) = dx\surd\frac{ds^2 - dq^2}{ds^2 - dx^2}$, vel $\frac{ayds^2 - aqdr^2}{adr^2 + bds^2} = \int dx\surd\frac{ds^2 - dq^2}{ds^2 - dx^2}$.

IV.

Hæc æquatio determinat naturam curvæ MKk, ejusque relationem ad circulum GLl. Quod si jam invenire lubeat Legem oscillationum minimarum Penduli flexilis NLK, supponendo scilicet arcus GL, MK infinite parvos, seu, si mavis, quam minimos; notare convenit, in hoc casu confundi GL cum HL, MK cum IK, NL cum NH, FL cum FH, &c. hoc est, unam pro altera sumi posse. Ex hac consideratione, erit HG seu $y = \frac{HL^2}{2NL} = \frac{ee}{2c}$; item MI, seu q = NM — NI = NL + LK — NI = NL + LK — NH — LR

 = [ob

$=$ [ob $NL - NH = GH = \frac{HL^2}{2NL}$ & $LK - LR = \frac{RK^2}{2LK}$] $\frac{ee}{2c} + \frac{(n-1)^2.ee}{2c} = \frac{(nn-2n+2)ee}{2c}$. Porro, ob isochronos arcus GL, MK, erit dr ad ds, seu Ll ad Kk, ut GL ad MK, hoc est, ut HL ad IK seu ut 1 ad n: quare $ds = ndr$: ponendo itaque $nndr^2$ pro ds^2, prodibit $\frac{ayds^2 - aqdr^2}{adr^2 + bds^2} = \frac{nnay - aq}{a + nnb}$; ubi si pro y & q substituantur valores modo inventi, habebitur idem $\frac{ayds^2 - aqdr^2}{adr^2 + bds^2} = \frac{(n-1).aee}{c.(a+nnb)}$. Et sic æquatio in fine articuli præcedentis mutatur in hanc $\frac{(n-1)aee}{c.(a+nnb)} = \int dx \sqrt{(\frac{ds^2 - dq^2}{ds^2 - dx^2})}$ = [quia dq^2 & dx^2 evanescunt juxta ds^2] $\int dx$.

V.

Restat igitur ut quæratur valor ipsius dx, seu pl, seu ok; quod sic fit. $KL : LF = KR : LH = n - 1 : 1$; unde $LF = \frac{1}{n-1} KL = \frac{c}{n-1}$. Et, quia triangulum LFN in N & L est acutissimum, censetur $LF + FN = NL = LK = c$; proinde $FN = c - \frac{c}{n-1} = \frac{(n-2).c}{n-1}$. Sed LF ad FN, hoc est $\frac{c}{n-1}$ ad $\frac{(n-2).c}{n-1}$, seu 1 ad $n-2$, ut sinus anguli FNL seu $\frac{HL}{NL}$ seu $\frac{e}{c}$, ad sinum anguli FLN, qui per consequens est $= \frac{(n-2).e}{c}$: angulus vero FLN = ang. pLl, quia uterque est complementum anguli NLp; adeoque etiam $\frac{(n-2).e}{c}$ = sinui anguli $pLl = \frac{pl}{Ll} = \frac{dx}{dr} = \frac{dx}{de}$; est enim [ob arcum GL minimum] $dr = de$; propterea $\frac{(n-2).ede}{c} = dx$;

&

& integrando $\frac{(n-2).ee}{2c} = \int dx =$ [per præced.] $\frac{(n-1).aee}{c.(a+mb)}$.
Reductione peracta, emergit hæc æquatio $nnb = 2nb + a$, unde $n = 1 \pm \sqrt{(\frac{a+b}{b})}$.

COROLLARIUM.

Si pondera a & b sint æqualia; erit $n = 1 \pm \sqrt{2}$. Ubi notandum radicem affirmativam $1 + \sqrt{2}$ esse sumendam, cum pondera ad eandem partem verticalis NM constituuntur; sed negativam affirmative sumtam $-1 + \sqrt{2}$, cum pondera constituuntur ad partes diversas ipsius NM.

VI.

Superest ut determinetur longitudo Penduli simplicis, quod Pendulo flexili NLK sit isochronum. Pro hoc opus est, ut sumatur valor vis acceleratricis corporis L artic. 1°. inventæ $= \frac{gady - Tdx}{adr}$, ubi [art. 4.] $y = \frac{ee}{2c}$, proinde $dy = \frac{ede}{c}$; $T = gb$ [art. 3 & 4], $dr = de$ [art. 5], $dx = \frac{(n-2).ede}{c}$ [ibid.], quæ si substituantur, reperietur vis acceleratrix ponderis L $= \frac{ge(a-nb+2b)}{ac}$; eaque si dividatur per e, seu per longitudinem viæ describendæ GL, vel HL; habetur intensitas vis acceleratricis $= \frac{g(a-nb+2b)}{ac}$. Sit nunc D, longitudo quæsita Penduli simplicis agitandi per naturalem vim gravitatis g, & semi-oscillationes per arcus minimos z peragentis; erit, ut constat, ejus vis acceleratrix $= \frac{gz}{D}$; cujus intensitas [dividendo per z] habetur $= \frac{g}{D}$. Oportet itaque has duas intensitates esse æquales, ut obtineatur mutuus isochronismus,

 unde

unde $\frac{a - nb + 2b}{ac} = \frac{1}{D}$; adeoque $D = \frac{ac}{a - nb + 2b}$; & in casu ponderum a & b æqualium, erit $D = \frac{c}{3 - n}$; vel substituendo pro n ejus valorem inventum $1 + \sqrt{2}$ pro ponderibus ad easdem verticalis partes constitutis, provenit $D = \frac{c}{2 - \sqrt{2}}$; sed existentibus ad partes oppositas pro n scribendo $1 - \sqrt{2}$ dabitur $D = \frac{c}{2 + \sqrt{2}}$. *Quæ omnia erant invenienda.*

Idea solutionis pro Pendulis trifilibus, quadrifilibus, seu quibuscunque multifilibus.

I.

Vocentur nunc pondera incipiendo a supremo, A, B, C, D, &c. sitque arcus GL, vel recta HL, quæ ei æqualis censetur $= e$, reliquæ ordine sequuntur ne, me, pe, &c.; adeo ut illi arcus, vel rectæ ad verticalem perpendiculares, procedant ut numeri, n, m, p, quorum valores sunt quærendi.

II.

Erit, ut supra invenimus §. 4, prima HG $= \frac{ee}{2c}$, secunda IM $= \frac{(1 + (n - 1)^2)ee}{2c}$, ita quoque tertia $= \frac{(1 + (n - 1)^2 + (m - n)^2)ee}{2c}$, quarta $= \frac{(1 + (n - 1)^2 + (m - n)^2 + (p - m)^2)ee}{2c}$, & ita consequenter; altitudines scilicet punctorum L, K, &c. supra puncta infima G, M, &c.

III.

Arcus curvarum GL, MK, &c. etsi revera non sint circulares, excepto primo, quando tamen sunt minimi, habentur pro circularibus, qui nempe curvas in punctis infimis osculantur. Horum circulorum osculantium inveniantur radii, quia iis in hoc scrutinio opus est; quod sic fit. Radius primi arcus GL, quod per se patet, $= c$; radius secundi $MK = \frac{IK^2}{2IM} =$ (vid. §. 2 hujus) $\frac{nnc}{(1+(n-1)^2)}$; radius tertii $= \frac{mmc}{(1+(n-1)^2+(m-n)^2)}$; radius quarti $= \frac{ppc}{(1+(n-1)^2+(m-n)^2+(p-m)^2)}$; radius quinti $=$ &c.

IV.

Ex his determinantur valores elementorum dx, quæ spectant ad duos quoslibet arcus immediate se mutuo excipientes; nempe sicuti lp, aut [quod idem est, ducta $l\pi$ ad LK normali] $L\pi$ vel $ok = \frac{(n-2).cdc}{c}$ [vid. supra §. 5], quod exprimit dx, pertinens ad arcum primum GL & secundum MK; ita quoque inveniuntur valores elementorum dx, pro arcuum paribus sequentibus; nempe pro secundo & tertio, pro tertio & quarto &c. adhibendo successive modum quem adhibui in prædicto §. 5. Fingamus itaque [ne opus habeamus figuram per plures arcus continuare] ipsum arcum GL & arcum MK repræsentare arcum secundum & tertium: Erit $HL = nc$, & $IK = mc$; radiusque circuli osculatoris in $G = NL =$ [per præced.] $\frac{nnc}{1+(n-1)^2}$. Faciendo nunc [ut supra §. 5] $KL : LF = KR : LH$, quod nunc est $= m - n : n$, unde $LF = \frac{n}{m-n} KL = \frac{nc}{m-n}$, adeoque NF, seu $NL - LF = \frac{nnc}{1+(n-1)^2}$

$-\frac{nc}{m-n}$. Porro quia LF ad FN, ut ſinus anguli FNL ad ſinum anguli FLN $= \rho Ll = Ll\pi$; prodibit ſinus anguli $Ll\pi$, hoc eſt $\frac{L\pi}{Ll}$, ſeu $\frac{dx}{nde} = \frac{FN}{LF} \times$ ſin. FNL $= \left(\frac{nnc}{1+(n-1)^2} - \frac{nc}{m-n} \times\right) \frac{(1+(n-1)^2)e}{nc} : \frac{nc}{m-n} = \frac{(m-n)e}{c} - \frac{(1+(n-1)^2)e}{nc}$ quare $dx = \frac{(mn-mn)ede}{c} - \frac{(1+(n-1)^2)ede}{c} = \frac{(mn-2nn+2n-2)ede}{c}$; pro arcu ſecundo & tertio. Simili modo inveniemus procedendo $dx \frac{(pm-2mm+2mn-2nn+2n-2)ede}{c}$, pro arcu tertio & quarto. Atque ita deinceps.

V.

Jam vero quadrata velocitatum in punctis L, K, &c. eodem momento naſcentium ſe habent [ſicuti invenitur ex Conſervatione virium vivarum æque ac, ſed difficilius, ex Principiis Staticis] ex. gr. ſi tria ſunt fila, totidemque pondera A, B, C, quadratum velocitatis ponderis $A = \frac{(Ay+Bq+Ct)}{A+Bnn+Cmm}$, quadratum velocitatis ponderis $B = \frac{(Ay+Bq+Ct)nn}{A+Bnn+Cmm}$, quadratum velocitatis ponderis $C = \frac{(Ay+Bq+Ct)mm}{A+Bnn+Cmm}$, &c. nominando ſcilicet HG, IM, &c. y, q, t &c.; adeoque erunt vires acceleratrices ponderis $A = \frac{g.d(Ay+Bq+Ct)}{(A+Bnn+Cmm)de}$, ponderis $B = \frac{g.nd(Ay+Bq+Ct)}{(A+Bnn+Cmm)de}$, ponderis $C = \frac{g.md(Ay+Bq+Ct)}{(A+Bnn+Cmm)de}$; ac proin intenſitas [quæ invenitur dividendo ſingulas vires acceleratrices per longitudinem ſuæ viæ deſcribendæ, videlicet per e, ne, me] prodit pro unaquaque $= \frac{g.d(Ay+Bq+Ct)}{(A+Bnn+Cmm)ede}$, adeoque eadem in ſingulis.

VI.

VI.

Hactenus tensiones filorum non sunt consideratæ; ideoque videndum nunc erit, quomodo vires acceleratrices, indeque earum intensitas eliciatur ex tensionibus, quæ cum vi gravitatis motum ponderum temperant. Intensitas hoc modo elicita, & comparata cum eadem articulo præcedente inventa, dabit numerorum n & m rationem quæsitam ad unitatem; id autem hoc pacto peragitur. Animadverto primo, ob ponderum motum lentissimum, eorum vires centrifugas nihil conferre ad augendas vires tensionum in filis. Secundo, ob filorum NL, LK, &c. infinite parum a rectitudine situs deflectentium, unumquodque ex filis eam pati tensionem, quæ æquipollet vi absolutæ ponderum omnium quæ sustinet: ita ergo tensio primi NL $= A + B + C$, tensio secundi LK $= B + C$, tensio tertii $= C$; atque sic in aliis Pendulis multifilibus.

VII.

Ob fili primi NL situm perfecte perpendicularem ad arcum GL, tensio hujus fili, nec contribuit, nec officit vi motrici ponderis primi A in directione tangentis in L. Sed vis motrix hujus ponderis habetur, si a vi tangentiali ab ipsa ejus gravitate oriunda, subducatur vis tangentialis a tensione fili secundi LK derivata: vis illa prior a gravitate oriunda est, ex natura Cycloïdis quam arcus GL osculatur, $= \frac{gA}{c}$; vis altera ex tensione fili LK secundum tangentem derivata $= \frac{L\pi}{Ll} \times (B + C) =$ [art. 4 hujus] $\frac{(n-2).ge}{c} \times (B + C)$; ergo vis motrix ponderis, vel potius massæ A, in directione tangentis $= \frac{ge}{c} \times A - \frac{(n-2).ge}{c} \times (B + C)$; dividendo igitur per massam A, provenit vis acceleratrix, iterumque per e, oritur ejus intensi-

tas $= \frac{g}{c} - \frac{(n-2)g}{c} \times (\frac{B+C}{A})$; quæ itaque $=$ intensitati §. 5 hujus inventæ, $\frac{g.d(Ay+Bq+Ct)}{(A+Bnn+Cmm)ede} =$ [scribendo pro y, q, t, eorum valores art. 2°. hujus inventos] $\frac{g.(A+(nn-2n+2)B+(2mn-2n+2+mm-2mn)C)}{c(A+Bnn+Cmm)}$.

VIII.

Porro habetur vis motrix ponderis secundi *B* in directione tangentis in K, si ad vim tangentialem ab ejus gravitate derivatam addatur vis tangentialis a tensione fili secundi LK derivata, & ab aggregato auferatur vis tangentialis a tensione fili tertii oriunda. Verum vis illa prima a pondere *B* in directione tangentis invenitur, ex natura Cycloïdis quam arcus MK osculatur, radii osculatoris in §. 3 hujus, $= \frac{e(1+(n-1)^2)gB}{nc}$; vis altera tangentialis a tensione fili secundi derivata in arcu secundo [ope dx in §. 4 hujus] $= \frac{e(n-2)\times(gB+gC)}{nc}$; vis tertia tangentialis a tensione fili tertii oriunda [ope ejusdem dx] $= \frac{e(mn-2nn+2n-2)gC}{nc}$: aggregatum duarum priorum mulctatum posteriori, dabit vim motricem corporis secundi $B = \frac{ge((n-1)B+(2n-m-1)C)}{c}$; quod si ergo dividatur per massam *B*, & per longitudinem arcus MK $= ne$; prodibit intensitas vis acceleratricis corporis $B = \frac{g((n-1)B+(2n-m-1)C)}{ncB}$, quæ itaque eidem §. 5 hujus æquatur.

IX.

Denique vis motrix corporis tertii *C*, in directione tangentis arcus tertii obtinetur, si ad vim tangentialem ab ejus gravitate derivatam addatur vis tangentialis a tensione fili tertii oriunda. Est

Eſt autem vis illa prior tangentialis a gravitate dependens $= \frac{e(1+(n-1)^2+(m-n)^2)gC}{mc}$ [vid. §. 3 hujus]. Et vis altera tangentialis a tenſione fili tertii proveniens $= \frac{e(mn-2m+2n-2)gC}{mc}$. Summa harum duarum virium, dat vim motricem corporis tertii $c = \frac{ge(m-n)C}{c}$. Hoc ergo, diviſum per maſſam corporis C, & per longitudinem arcus $=me$, dat intenſitatem vis acceleratricis corporis $C = \frac{g(m-n)}{mc}$. Quæ per conſequens etiam æqualis erit intenſitati inventæ §. 5 hujus.

X.

Comparando itaque duas quaſcunque ex tribus hiſce intenſitatibus, quæ æquales, tam inter ſe, quam illi art. 5°, eſſe debent, cum ipſa illa articuli 6; habebuntur duæ æquationes, quarum ope littera m exterminari poteſt; & reſultabit æquatio ſolam incognitam n continens: quæ hæc eſt, ſalvo errore calculi: $nAAC-(2nn-6n+4)ABC+(n-2)ABB-(2nn-5n+2)ACC=(n^3-4nn+4n)(B^3+2BBC+BCC)$. Hujus autem radice n inventa, erit $m = \frac{nA}{(n-2)\times(B+C)}$.

XI.

Notandum poſſe omnino negligi conſiderationem intenſitatis, prout ea art. 5° fuit eruta, ex principio Conſervationis virium vivarum. Siquidem intenſitas ex tenſione filorum tribus modis expreſſa art. 7, 8, & 9, ex duplici comparatione primæ cum ſecunda, & primæ cum tertia, vel ſecundæ cum tertia, ſubminiſtrat duas æquationes pro duabus incognitis n & m; ex quibus, per exterminationem ipſius m, reſultabit tertia alteram tantum incognitam n continens; quæ ſi rite tractetur, dabit nobis eandem æquationem quam §. præced. invenimus.

X I I.

Si tria pondera *A*, *B*, *C* sunt æqualia, mutatur æquatio generalis in hanc specialem, pro Pendulo trifili ponderum æqualium, $4n^3 - 12nn + 3n + 8 = 0$; eritque tunc $m = \frac{n}{2n - 4}$.

X I I I.

Si vero pondus *C* sit $= 0$; incidemus in æquationem Penduli bifilis; quam jam invenimus in superiori §. 5, quod bonitatem methodi indicat.

X I V.

Si $A = 0$, habebitur Pendulum bifile, sed ubi filum superius est duplum inferioris; & in hoc casu erit $n = 2$; quod quidem per se clarum est, sine calculo; sed $m = \frac{2A}{0 \times (B + C)} = 0$; hoc est, linea IK, etsi infinite parva, tamen infinities major esse debet quam HL; vel etiam potest n esse $= 0$, & tunc etiam erit $m = 0$; adeoque quiescet Pendulum.

X V.

Si tandem $B = 0$, erit iterum Pendulum bifile, sed cujus filum inferius est duplum superioris; quo casu, erit $n = \frac{5}{4} + \frac{A}{4C} \pm \sqrt{(\frac{9}{16} + \frac{5A}{8C} + \frac{AA}{16CC})}$; & $m =$ &c.

X V I.

Penduli simplicis cum trifili isochroni longitudo, invenitur generaliter $= \frac{mc}{m - n}$; cognitis ergo n & m, cognoscitur quoque longitudo quæsita.

Typus

Typus alterius Solutionis PROBLEMATIS *de multifilibus Pendulis.*

Sit Pendulum quotcunque ponderum ex. gr. trium *A*, *B*, *C*, suspensum ex puncto D, cujus situs quietis sit recta verticalis DE, situs quæsitus ab initio oscillationis ABCD. Ductis horizontalibus AE, BF, CG; sint AE $= x$, BF $= y$, CG $= 1$: sintque longitudines filorum AB $= a$, BC $= b$, CD $= c$. Demissis perpendicularibus BH, CI; erunt AH $= x - y$, BI $= y - 1$.

TAB. LXXXVII N°. CLXXVIII *Fig.* 2.

I.

Ex natura oscillationum minimarum patet, Pendulo multifili eundem situm ABCD conciliari, sive producatur ab oscillationibus lateralibus, sive a gyrationibus conicis circa axem verticalem DE. Etenim, pro priori effectu requiritur, ut vires acceleratrices ponderum *A*, *B*, *C*, quibus ad E, F, G tendunt, sint semper distantiis AE, BF, CG proportionales, ad id ut fiat accessus simultaneus ad axem DE; pro altero effectu pariter oportet ut vires centrifugæ, quibus pondera *A*, *B*, *C*, retrahuntur ab axe DE, ad id præcise ut situm gyrationis conservent, sint quoque proportionales iisdem distantiis AE, BF, CG. Quare situs Penduli ABCD, qui inservit oscillationibus simultaneis, inserviet etiam gyrationibus simultaneis. Lubet itaque huic posteriori ideæ tanquam faciliori inhærere, quæ nos ducet ad breviorem & clariorem solvendi modum.

II.

Tensio fili AB sola resistit vi ponderis A in directione verticali, & ejusdem vi centrifugæ in directione horizontali, quæ vires se habent ut BH ad HA, seu [quia BH in longitudine quam minimum differt a BA] ut BA ad HA. Faciendo itaque $a : x - y = A : \frac{x-y}{a} \times A$; erit $\frac{x-y}{a} \times A$ æqualis vi

centrifugæ ponderis A. Cum autem vires centrifugæ, in gyrationibus simultaneis, sint in ratione composita radiorum & massarum; faciendum est $xA : yB = \frac{x-y}{a} \times A : \frac{x-y}{a} \times \frac{y}{x} B$; erit hæc, seu $\frac{xy-yy}{ax} B$ æqualis vi centrifugæ ponderis B ab ipsius gyratione oriundæ. Ob eandem rationem, habetur $xA : 1C = \frac{x-y}{a} \times A : \frac{x-y}{ax} \times C =$ vi centrifugæ ponderis C a gyratione provenienti.

III.

Nunc vero, a reactione tensionis fili B A, eædem vires laterales, quæ agunt in A sursum trahendo, agunt quoque in B retrahendo deorsum. Ponderi itaque B, addenda est vis ponderis A in directione BH verticali, ejusque vi centrifugæ propriæ, addenda quoque vis centrifuga corporis A, ut habeatur vis totalis, qua corpus B trahitur in directione verticali, $= B + A$, & altera totalis centrifuga in directione horizontali $= \frac{xy-yy}{ax} \times B + \frac{x-y}{a} \times A$. His autem resistit tensio fili B C, quæ, decomposita in vim verticalem, & vim horizontalem, dat hanc analogiam: C I, vel C B, vel b: I B, vel F B — F I, vel F B — G C, vel $y - 1 = B + A : \frac{xy-yy}{ax} \times B + \frac{x-y}{a} \times A$. Hinc emergit prima æquatio $(byy + axy - bxy - ax) B = (bxx - axy - bxy + ax) A$.

IV.

Simili modo invenitur corporis C vis verticalis totalis $= C + B + A$; atque vis horizontalis æqualis tribus viribus propriis horizontalibus centrifugis corporum C, B, A; hoc est, $= \frac{x-y}{ax} \times C + \frac{xy-yy}{ax} \times B + \frac{x-y}{a} \times A$; & quia istis viri-

viribus resistit tensio fili AC, erit hic etiam faciendum : DG, seu DC, seu c : GC, seu $1 = C+B+A : \frac{x-y}{ax} \times C + \frac{xy-yy}{ax} \times B + \frac{x-y}{a} \times A$. Unde resultat secunda æquatio, $(cx - cy - ax)C + (cxy - cyy - ax)B = (cxy - cxx + ax)A$.

V.

Ex comparatione harum duarum æquationum, dabuntur valores ipsarum x & y, & ita inventum erit quod quæritur. Ergo &c. Ad hoc autem nihil restat aliud quam calculus.

VI.

Ex his jam perspicitur uniformitas methodi, pro quocunque numero filorum & ponderum. Etenim quærendæ sunt tantum, per §. 2, singulorum ponderum vires propriæ centrifugæ; deinde, pro quolibet pondere, ejus vis propria centrifuga addenda est summæ omnium corporum inferiorum virium centrifugarum, & ita habebitur vis totalis, qua pondus illud retrahitur ab axe DE in directione horizontali. Vis autem totalis, qua idem pondus verticaliter deorsum trahitur, est æqualis summæ omnium ponderum inferiorum, usque ad pondus propositum inclusive sumtorum. Quo facto, instituatur hæc analogia : Ut summa omnium illorum ponderum inferiorum, ad summam earundem virium centrifugarum, ita fili proxime superioris longitudo, ad differentiam distantiæ ponderis ab axe, & distantiæ ponderis proxime superioris; unde resultat æquatio. Atque ita tot habebuntur æquationes, quot erunt litteræ incognitæ, una nimirum pauciores quam sunt pondera vel fila; ex quarum æquationum comparatione determinantur incognitæ.

VII.

In solutione Problematis, pro numero majori ponderum & filo-

filorum, continetur etiam solutio pro numero minori. Sic si ex. gr. ex Pendulo trifili velimus facere bifile, ponendum tantum est in duabus æquationibus $B = 0$, & $b = 0$; quod primam æquationem mutat in hanc $y = 1$, & alteram in hanc $(cx - cy - ax) C = (cxy - c^x x + ax) A$; quæ, si porro pro y scribatur 1, dat $(cx - c - ax) C = (cx - cxx + ax) A$; atque, in casu ubi $c = a$, prodit $- cC = (2x - xx) A$, id quod dat $x = 1 \pm \sqrt{(\frac{A+C}{A})}$, ut invenimus priori modo.

VIII.

Pendulum simplex, quod gyrando, vel oscillando, sit isochronum Pendulo multifili gyranti, vel oscillanti, invenitur facillime; prolongando tantum filum infimum AB, donec occurrat axi in L: dico enim AL, seu $\frac{ax}{x-y}$, fore longitudinem Penduli simplicis isochroni Pendulo ACBA. Res est manifesta; nam filum AB, eodem modo tenditur a solo pondere A, ac filum prolongatum AL ab eodem tenderetur: ergo utrobique idem motus in pondere A generabitur, hoc est, ambo Pendula, & simplex LA, & compositum multifile DCBA, sunt isochrona.

IX.

Ex hac nostra Theoria, jam non est difficile invenire æquationem pro natura curvæ Catenæ oscillantis, vel gyrantis; idque sive uniformiter, sive non uniformiter Catena sit gravis. Concipiatur enim ABCD tanquam polygonum infinitorum laterum, & sumatur, a puncto infimo in axe E, pars quælibet finita EF pro abscissa $= z$, ipsique respondens applicata FB $= y$; considero jam FG tanquam elementum abscissæ $= dz$, adeoque IB $= - dy$, & elementum curvæ BC $= dt$; dicendo nempe arcum curvæ AB $= t$. Scribo autem $- dy$, quia crescen-

centibus abſciſſis decreſcunt applicatæ. Sit porro ponduſculum elementi catenæ BC in puncto B collectum $= p\,dt$, ubi per p intelligo functionem datam arcus AB. Conſtat vero ex §. 2, vim propriam centrifugam cujuſque ponderis B eſſe $= \frac{AH}{AB} \times \frac{FB}{AE} \times B =$ [ob AH : AE = AB : AL] $\frac{AB}{AB} \times \frac{FB}{AL} \times B = \frac{FB}{AL} \times B =$ [dicendo longitudinem Penduli ſimplicis LA $= L$] $\frac{y}{L} \times p\,dt$. Quare ſumma omnium virium centrifugarum ab A uſque ad B, hoc eſt, $\int \frac{yp\,dt}{L}$, ſe habet ad ſummam omnium ponderum, hoc eſt ad $\int p\,dt$, ut IB ad BC, ſeu ut $-dy$ ad dt: unde emergit hæc æquatio $\frac{dt}{L}\int yp\,dt = -dy\int p\,dt$; vel etiam, quia, ob infinite parvas applicatas, non differunt longitudine arcus curvæ t ab abſciſſis z, & dt a dz, æquatio ita ſcribi poteſt [ſervando p ſicuti pro functione arcus t, ita pariter pro functione abſciſſæ z] $\frac{dz}{L}\int yp\,dz = -dy\int p\,dz$.

COROLLARIUM.

Si Catena ſit uniformiter gravis, id eſt, ſi $p = 1$, habebitur pro natura curvæ quæſitæ, hæc æquatio $dz\int y\,dz = -Lz\,dy$. Ex qua ſi quocunque modo conſtrui poſſit curva, dabit ea curvedinem Catenæ uniformiter gravis, in quolibet ſitu proximo axi, & oſcillantis vel gyrantis in tempore ſimultaneo cum Pendulo ſimplici, cujus longitudo $L =$ tangenti vel ſubtangenti curvæ in puncto infimo Catenæ.

Solutio brevior, & ſimplicior, ex natura oſcillationum petita.

I.

Tenſio fili AB = ponderi A; fili BC $= A + B$, fili CD $= A + B + C$; & ſic porro, ſi plura eſſent fila & pondera.

II.

Retentis iisdem denominationibus, ut supra; Tensio fili AB, qua retrahitur pondus *A* versus B, est ad vim motricem, qua urgetur horizontaliter versus E, ut AB ad AH: adeoque ea vis motrix $= \frac{x-y}{a} \times A$.

III.

Tensio fili BC, est ad vim qua pondus *B* versus F urgetur, ut BC ad BI: ergo ea vis erit $= \frac{y-1}{b} \times (A+B)$. Sed ea non est ipsa vis motrix ponderis *B* versus F; quia enim tensio fili præcedentis BA tantundem deorsum oblique trahit pondus *B*, quantum sursum trahit pondus *A*; hæc ita decomposita facit etiam secundum horizontalem $\frac{x-y}{a} \times A$, quæ priori $\frac{y-1}{b} \times (A+B)$ est contraria; adeoque ipsa vis motrix ponderis *B*, erit $= \frac{y-1}{b} \times (A+B) - \frac{x-y}{a} \times A$, qua nimirum *B* versus F urgetur.

IV.

Idem etiam de singulis superioribus ponderibus intelligendum, si plura essent. Quare vis motrix ponderis *C* versus G, erit $= \frac{1}{c} \times (A+B+C) - \frac{y-1}{b} \times (A+B)$.

V.

Vires istæ motrices divisæ per sua respective pondera, quæ movenda habeat, dabunt eorum vires acceleratrices; nempe vis acceleratrix ponderis $A = \frac{x-y}{a} \times \frac{A}{A}$ seu $\frac{x-y}{a}$; ponderis $B = \frac{y-1}{b} \times (\frac{A+B}{B}) - \frac{x-y}{a} \times \frac{A}{B}$; ponderis $C = \frac{1}{c} \times (\frac{A+B+C}{C}) - \frac{y-1}{b} \times (\frac{A+B}{C})$: & sic porro.

VI.

VI.

Verum, ob ponderum isochronismum, debent hæ vires acceleratrices, poni proportionales distantiis, vel spatiis percurrendis AE, BF, CG, &c. hoc est, debent earum intensitates esse æquales. Quamobrem, divisæ per distantias suas, erunt omnes inter se æquales, nempe $\frac{x-y}{ax} = \frac{y-1}{by} \times (\frac{A+B}{B}) - \frac{x-y}{ay} \times \frac{A}{B} = \frac{1}{c \times 1} \times (\frac{A+B+C}{C}) - \frac{y-1}{b \times 1} \times (\frac{A+B}{C})$; & ita porro. Unde patet tot haberi æquationes, quot sunt litteræ incognitæ. *Q. E. I.*

COROLLARIUM I.

Hac methodo, quæ omnium est naturalissima, pari facilitate determinatur curvatura Catenæ oscillantis, qua id peregimus per præcedentem methodum. Cum enim tensio cujuslibet elementi Catenæ sit $= \int p\,dt$, quæ dat vim trahendi *B* ad F $= \frac{-dy}{dt} \int p\,dt$, hujusque differentiale $d(\frac{-dy}{dt} \int p\,dt) =$ vi motrici; quam dividendo per elementum ponderis $p\,dt$, habetur vis acceleratrix; iterumque per distantiam y, habetur intensitas $\frac{d(\frac{-dy}{dt} \int p\,dt)}{y\,p\,dt} =$ constanti $\frac{1}{L}$; adeoque $d(\frac{-dy}{dt} \int p\,dt) = \frac{y\,p\,dt}{L}$; atque integrando $-dy \int p\,dt = \frac{dt}{L} \times \int y\,p\,dt$, ut prius.

COROLLARIUM II.

Si tria sint pondera æqualia, ut & fila æqualia. Invenietur hæc æquatio $4x^3 - 12xx - 15x + 2 = 0$: cujus radix dat EA, eaque inventa habetur FB. Vel etiam reducetur quæstio ad hanc æquationem $4y^3 - 12yy + 3y + 8 = 0$; cujus radix dat FB, & ex hac fluit EA.

N°. CLXXIX.

PROBLEMA

STATICO-DYNAMICUM.

TAB. LXXXVII N°. CLXXIX. *Fig.* 1.

DAtum esto Triangulum rectangulum ACB, ex materia non gravi confectum, cujus tribus lateribus accumbant totidem corpora L, M, N, etiam non gravia; ita tamen ut latera, tam Trianguli, quam corporum, in quibus se contingunt, sint lævigatissima & perfecte polita; eum nempe in finem, ut sine ulla frictione, aliave resistentia, super se invicem moveri, vel fluere possint, corpus M super AC, corpus L super AB, & corpus N super CB. Accedat nunc corpori M vis aliqua motrix data, secundum directionem pM normalem ad hypothenusam AC, quo fiet, ut Triangulum ACB incipiat retropelli continuo in alium situm acb; consequenter tria corpora M, L, N, loca quoque sua mutent. Hisce ita positis: Quæritur primo directio motus, tam Trianguli, quam singulorum corporum: Deinde Lex accelerationis singulorum? Ubi quidem ponitur rem ea ratione peragi, ut Triangulum & corpora aliter moveri non possint, quam motu in unoquoque sibi semper parallelo.

SOLUTIO.

Dicatur massa Trianguli ABC $= T$, corporis M $= M$, corporis L $= L$, & corporis N $= N$. Concipiatur jam imprimi corpori M, incumbenti hypothenusæ AC, vim aliquam datam motricem expressam per Mt, sumendam in prolongata pM normali ad AC. Dicatur hæc vis motrix $= m$. Item Trianguli altitudo AB $= a$, basis CB $= b$, hypothenusa AC $= \sqrt{(aa+bb)} = c$. Triangulum ABC hoc modo pressum

a

a corpore M, animato jam vi motrice *m*, ſeſe ſubducens, paulo poſt veniat in ſitum proximum *abc*; ita ut latera lateribus, ſingula ſingulis, maneant, per hypotheſin, parallela. Primo manifeſtum eſt, punctum M manſurum fluendo in M*t* prolongata rectæ *p*M; ſicuti etiam ductis ML, MN, normalibus ad AB, CB, corpora L & N repellentur in directionibus prolongatis ML*l*, MN*n*, a quibus non deviabunt. Jam vero vis motrix *m* abſoluta decomponi poteſt in collaterales, ſecundum directiones M*r* & M*s*, latera ſcilicet rectanguli M*rts*: unde naſcitur vis in directione M*r* $= \frac{am}{c}$, & altera in directione M*s* $= \frac{bm}{c}$; id quod patet ex ſimilitudine triangulorum M*tr*, M*ts*, & ACB. Vis illa prior, ſecundum directionem M*r*, agit ſimul in Triangulum & corpus adjacens L, eique non obſtat corpus N; ſed altera vis, ſecundum directionem M*s*, agit etiam ſimul in Triangulum & corpus adjacens N, ita ut pariter non obſtet corpus L. Vis iſta motrix *m*, quæ in ſolo corpore M exiſtit, & illæ duæ $\frac{am}{c}$, $\frac{bm}{c}$, in quas reſolvitur *m*, diminuuntur utique, agendo in Triangulum & hoc mediante, in corpora L & N. Ut igitur inveniatur, quantum per actionem vis primitivæ *m* remaneat in corpore M ad progrediendum in ſua directione M*t*; quantum item virium acquirat tam Triangulum in utraque ſua directione collaterali, quam corpus L in directione ML, & corpus N in directione MN; annotandum eſt, quod Lemmatis loco ponitur, in omni actione duorum corporum ſe mutuo prementium, oriri quandam vim intermediam, quam voco *immaterialem*, quæ æqualiter agit prorſum & retrorſum; in quo conſiſtit Canon ille, *Quod actio & reactio ſunt æquales.* Voco autem *vim* illam *immaterialem*; quia eſt quaſi extra utrumque corpus, atque ad unum non magis pertinet quam ad alterum.

Ordo genuinus nunc poſtulat, ut, ante omnia, inquiratur in vim iſtam immaterialem, quæ intercedit inter corpus M, in quo eſt principium motus, & Triangulum, quod immediate excipit

illius actionem, eamque communicat cum corporibus L & N; unde postea determinabuntur vires motrices in Triangulo corporibusque genitæ, ipsæque proin directiones virium acceleratricium, quibus proportionales sunt velocitates actuales. Sit igitur $x =$ vi inmateriali inter corpus M & Triangulum, quæ directe agit & reagit instar elateris in directione Mt & Mp. His ita positis; remanebit in corpore M vis motrix $= m - x$, in directione pM; Triangulum vero recipit eandem illam vim motricem x in directione Mt; quæ decomposita in collaterales secundum ML & MN, dat eam, secundum directionem ML, $= \frac{ax}{c}$, & alteram, secundum directionem MN, $= \frac{bx}{c}$. Dividendo autem has vires motrices per suas respective massas movendas, habebimus singulorum corporum vires acceleratrices, nimirum $\frac{m-x}{M} =$ vi acceleratrici corporis M, in directione pM. Quia vero vis collateralis $\frac{ax}{c}$ in directione ML movere debet simul Triangulum & corpus L, sicuti etiam altera collateralis $\frac{bx}{c}$ movenda habet simul Triangulum & corpus N; erit vis acceleratrix in directione ML $= \frac{ax}{c(T+L)}$, & altera acceleratrix in directione MN $= \frac{bx}{c(T+N)}$. Habebit igitur Triangulum duas vires acceleratrices, in diversis directionibus ML & MN; quæ ut referantur ad communem directionem Mt corporis M; faciendum est, ut se habet AC ad AB, seu ut c ad a, ita $\frac{ax}{c(T+L)}$ ad quartam $\frac{aax}{cc(T+L)}$; item, ut se habet AC ad CB, seu c ad b, ita $\frac{bx}{c(T+N)}$ ad quartam $\frac{bbx}{cc(T+N)}$. Significabunt hæ duæ simul sumptæ $\frac{aax}{cc(T+L)} + \frac{bbx}{cc(T+N)}$ vim acceleratricem communem expressam per Mq, quæ simul denotat

notat vim acceleratricem $\frac{m-x}{M}$ corporis M, in eadem directione: nam corpus M inter movendum, semper adjacere supponitur hypothenusæ Trianguli: unde hæc habetur æquatio $\frac{m-x}{M} = \frac{aax}{cc(T+L)} + \frac{bbx}{cc(T+N)}$; adeoque $x = \frac{m}{\frac{aaM}{cc(T+L)} + \frac{bbM}{cc(T+N)} + 1}$.

Ut autem habeatur actualis directio, & quantitas vis acceleratricis ipsius Trianguli; oportet tantum construere novum rectangulum, sumendo super M L partem $= \frac{ax}{c(T+L)}$, & super MN aliam partem $= \frac{bx}{c(T+N)}$; quæ erunt latera rectanguli, cujus diagonalis, ex M ducta in angulum oppositum, designabit veram directionem, & vim acceleratricem ipsius Trianguli. Hæc autem diagonalis est utique $= \frac{x}{c}\sqrt{\left(\frac{aa}{(T+L)^2} + \frac{bb}{(T+N)^2}\right)}$; in quibus omnibus, si pro x substituatur ejus valor inventus $\frac{m}{\frac{aaM}{cc(T+L)} + \frac{bbM}{cc(T+N)} + 1}$ data erunt singula quæsita.

EXEMPLUM I.

Sint corpora L & N æqualia, erit $x = \frac{m}{\frac{(aa+bb)M}{cc(T+L)} + 1} = \frac{m}{\frac{M}{T+L} + 1} = m \times \frac{T+L}{M+T+L}$. Hinc *primo* vis acceleratrix corporis M, in sua permanente directione Mt, seu $\frac{m-x}{M} = \frac{m}{M+T+L}$. 2°. Vis acceleratrix corporis L, in sua directione invariabili Ll, seu $\frac{ax}{c(T+L)} = \frac{am}{cM+cT+cL}$. 3°. Vis acceleratrix corporis N [quod æquale ponitur ipsi L] in sua constante directione Nn, seu $\frac{bx}{c(T+N)} = \frac{bm}{cM+cT+cL}$

4°.

4°. Vis acceleratrix ipſius Trianguli, in directione ML, eſt eadem quæ corporis L, nempe $\frac{am}{cM + cT + cL}$; ejuſdemque Trianguli vis acceleratrix, in directione MN, eſt eadem quæ corporis N, nempe $\frac{bm}{cM + cT + cL}$; unde Trianguli vis acceleratrix actualis, in directione vera diagonalis dicti rectanguli $= \frac{m}{M + T + L}$.

Exemplum II.

Quod ſi jam ambo corpora L & N ſint infinite parva, hoc eſt æqualia o, liquet, eum caſum eſſe quo corpus directe, ſeu perpendiculariter, premit alterum omni vi motrici deſtitutum; cum quo per conſequens vim ſuam motricem partitur, ita ut utrumque accelerari debeat æqualiter, & in eadem directione, habeatque jam tota maſſa in unum coaleſcens eandem vim motricem, quam ante preſſionem habuerat ſolum corpus M: atque hoc eſt, quod docet, in hoc caſu, Regula noſtra generalis.

Fit enim $x = \frac{mT}{M + T}$; item $\frac{m - x}{M} = \frac{m}{M + T}$; ut & Trianguli vis acceleratrix actualis in directione diagonalis, quæ jam eſt ipſa M*t* in prolongata *p*M $= \frac{m}{M + T}$.

Exemplum III.

In caſu, quo ponitur $L = 0$ & ſimul $N =$ infinito; idem eſt, ac ſi trianguli baſis CB moveri vel fluere debeat ſuper plano immobili. Tunc erit $x = \frac{m}{\frac{aaM}{ccT} + 1} = \frac{mccT}{aaM + ccT}$; hic enim, ob $N = \infty$, evaneſcit $\frac{bbM}{cc(T + N)}$; atque, ob eandem rationem, vera directio & vis acceleratrix Trianguli, parallela baſi CB, erit $= \frac{ax}{cT} = \frac{mac}{aaM + ccT}$: corporis vero M vis acceleratrix

leratrix in directione Mt, quæ est $\frac{m-x}{M}$, jam fit $= \frac{aax}{ccT}$ $= \frac{maa}{aaM+ccT}$; unde & ipsæ velocitates actuales, in suis propriis directionibus, Trianguli & corporis prementis M, erunt ut $\frac{mac}{aaM+ccT}$ ad $\frac{maa}{aaM+ccT}$; hoc est ut c ad a, seu ut AC ad AB.

COROLLARIUM.

Hic casus complectitur etiam Solutionem Problematis olim *Petropoli* ad me missi; cujus tum dedi Solutionem aliunde petitam, quam videre est in *Comment. Petropol.* Tom. V *. Propositio huc redibat. Dato Triangulo rectangulo A B C materiali, in plano verticali, cujus basis B C horizontalis liberrime fluere possit super alio plano horizontali immobili: incumbat vero hypothenusæ A C corpus aliquod grave M, quod vi ponderis sui descensum moliatur in directione verticali: unde id eveniet, ut Triangulum ab ista pressione retropellatur in directione horizontali CB; interea dum corpus M, quod pariter liberrime fluere posse ponitur super A C, descendet continuo a puncto M versus C, adhærens nempe indesinenter hypothenusæ A C: Quærebatur itaque, quam habeant rationem celeritates Trianguli retrocedentis, atque corporis M oblique descendentis, quamque hoc habiturum sit directionem actualem, utpote compositam ex directione secundum hypothenusam, & simul ex ea secundum Mt priori normalem. Hoc Problema ex præsenti nostro principio facillime solvitur. Decomponatur enim vis gravitatis ponderis M, cujus directio est verticalis, in duas collaterales, unam parallelam hypothenusæ, alteram eidem normalem. Illa, durante actione, non mutatur; hæc vero agit in Triangulum, sicuti supponitur in præcedentis Problematis solutione; unde habebitur celeritas Trianguli super plano horizontali; ut & celeritas corporis M, sed tantum in directione Mt normali ad hypothenusam, cum qua componi de-

* N°. CXLVII. pag. 365, *Tom. III.* Confer. Numerum sequentem.

bet illa, quæ generatur ex cognita vi motrice in directione parallela hypothenusæ: compositione motus rite peracta, dabitur directio & celeritas actualis corporis M.

SCHOLIUM I.

Si Corpus M motu actuali moveatur in directione p M, data velocitate v, impingatque in Triangulum T, quod percussum simul pellat corpora L & N: erunt, posito corpora non esse elastica, velocitates acquisitæ in eadem ratione, quam hic determinavimus pro simplici pressione. Effectus enim percussionis fit pariter per pressionem, sed promptissimam & quasi momentaneam. Erit igitur m, seu vis motrix, consideranda tanquam velocitas v multiplicata per massam M; ut sit ante conflictum quantitas motus $= Mv =$ vi motrici. Posito itaque hic etiam $x =$ vi illi immateriali, quæ in conflictu generabitur; invenietur eodem ratiocinio, quo supra factum $x = \frac{m}{\frac{aaM}{cc(T+L)} + \frac{bbM}{cc(T+N)} + 1}$ hoc est $= \frac{Mv}{\frac{aaM}{cc(T+L)} + \frac{bbM}{cc(T+N)} + 1}$; qui valor substituatur in $v - \frac{x}{M}$, ut habeatur velocitas actualis corporis M, post conflictum, in sua propria directione Mt. Idemque substitutus in $\frac{ax}{c(T+L)}$ & in $\frac{bx}{c(T+N)}$, dabit velocitates actuales corporum L & N, in directionibus suis propriis Ll & Nn: ipsius vero Trianguli T directio, & velocitas actualis, erit quæ ex illis duabus componitur $= \frac{x}{c} \sqrt{(\frac{aa}{(T+L)^2} + \frac{bb}{(T+N)^2})}$. Hac occasione, ostendendum est quam facile inveniatur Regula generalis pro communicatione motus duorum corporum, datis velocitatibus sibi mutuo directe occurrentium. Sit enim corpus A, ejusque velocitas a, directe insequens corpus B, cujus velocitas minor b versus eandem plagam; erit corporis A quantitas motus, seu vis

vis motrix $= Aa$, corporis B vis motrix Bb. Ponatur jam vis immaterialis per conflictum genita $= x$; manebit ergo in corpore A, vis motrix $= Aa - x$, & in corpore B producetur vis motrix $= Bb + x$, quæ, divisæ per massas A & B, dabunt utriusque velocitates post ictum $a - \frac{x}{A}$ & $b + \frac{x}{B}$; quæ, si corpora non sunt elastica, debent esse æquales, adeoque $a - \frac{x}{A} = b + \frac{x}{B}$. Unde prodibit $x = \frac{a-b}{A+B}$; quo substituto in alterutro habebitur $\frac{Aa+Bb}{A+B}$, pro velocitate communi, quam ambo corpora habebunt post ictum. Amittit adeoque corpus velocius A aliquem gradum suæ velocitatis, qui erit $a - \frac{Aa+Bb}{A+B} = \frac{(a-b)B}{A+B}$, & corpus tardius B acquiret novum velocitatis gradum, qui utique erit $\frac{Aa+Bb}{A+B} - b = \frac{(a-b)A}{A+B}$. Quod si jam corpora fuerint elastica; desiderenturque eorum velocitates post conflictum; conceptu sane haud difficile est, duplicandos esse effectus oriundos a compressione elaterii, hoc est, a vi illa immateriali x, quæ in utramque partem æqualiter se exerit; ita ut quantum velocitatis destruitur in velociori, & quantum velocitatis additur in tardiori per compressionem, tantundem quoque de novo fiat in utroque corpore per restitutionem elaterii. Erit proinde jactura velocitatis in corpore velociori $A = \frac{(a-b)2B}{A+B}$, & augmentum velocitatis in tardiori $B = \frac{(a-b)2A}{A+B}$; unde, post collisionem peractam, habebit corpus A velocitatem $= a - \frac{(a-b)2B}{A+B} = \frac{Aa - Ba + 2Bb}{A+B}$, & corporis B velocitas erit $= b + \frac{(a-b)2A}{A+B} = \frac{Bb - Ab + 2Aa}{A+B}$.

Notandum, si moveatur ante conflictum corpus B in plagam contrariam, idem est ac si dicatur esse b negativum; mutanda

per consequens sunt signa terminorum, in quibus reperitur b. Atque sic prodibit, post ictum in corporibus non elasticis, communis velocitas $= \frac{Aa - Bb}{A + B}$. Sed in elasticis, velocitas corporis $A = \frac{Aa - Ba - 2Bb}{A + B}$, & corporis B velocitas $= \frac{-Bb + Ab + 2Aa}{A + B}$. Quæ omnia pulchre conspirant cum Regulis motuum dudum exhibitis, tum a nobis, tum ab aliis, sed per diversas omnino vias erutis.

SCHOLIUM II.

Ad nostram hanc Theoriam quoque spectat Theorema NEWTONI, propositum in *Princ. Mathematicis Philos. Natur.* Vid. Coroll. IV. Legis III. Libro primo præmissum, quod ita sonat: *Commune gravitatis Centrum corporum duorum vel plurium, ab actionibus corporum inter se, non mutat statum suum vel motus vel quietis; & propterea corporum omnium in se mutuo agentium [exclusis actionibus & impedimentis externis] commune Centrum gravitatis, vel quiescit, vel movetur uniformiter in directum.*

Etsi hoc Theorema, elegantissimum quidem, in generali sensu sit propositum; demonstratio tamen NEWTONI minime est generalis. Lector quippe attentus examinaturus longam ratiocinationis *Newtonianæ* deductionem, percipiet, sine magna difficultate, supponi in illa demonstratione, concursum fieri non nisi duorum corporum una vice, mox alia vice duorum aliorum, vel unius eorum, cum tertio; percipiet, inquam, nullo in loco, per totum sermonem, in considerationem trahi casum, quo tria plurave corpora, eodem momento simul, in diversis directionibus in se invicem impingunt; cujus casus neglectio relinquit sane demonstrationem NEWTONI longe imperfectissimam; quæ vix particulam præstat ejus quod promittitur in Propositione generali. Qui defectus ut suppleatur, alia via ineunda est, quam quæ a NEWTONO est tentata. Hanc in rem, nostra idea de viribus immaterialibus inter corpora sibi invicem collidentia concipiendis commodissime adhibetur. Postquam enim ostendimus illas

illas vires nihil aliud esse, quam pressiones, seu vires motrices subitaneas, effectus suos in momento absolventes; res utique referri poterit ad ordinariæ Dynamices principia; ubi duntaxat debito modo applicanda est Propositio illa generalis, cum a nobis, tum ab aliis, dudum demonstrata, quæ hæc est:

Si dati corporis ABC centrum gravitatis O, sollicitetur a pluribus potentiis, seu viribus motricibus, quarum directiones & quantitates, designentur per rectas datas OD, OE, OF, OG &c. sitque punctum P centrum commune gravitatis punctorum D, E, F, G, instar ponderum æqualium consideratorum; Dico rectam OP fore directionem, secundum quam movebitur centrum gravitatis O corporis ABC, & quidem motu sibi semper parallelo, sive accedendo versus P, sive ab eodem recedendo, prout vires motrices sunt vel trahentes vel pellentes. TAB. LXXXVIII. No. CLXXIX. Fig. 2.

Nunc quidem non est ex instituto nostro, generalem facere applicationem hujus Propositionis, ad demonstrandum Theorema *Newtonianum*, in omni extensione sumtum; sufficit indicasse rei fundamentum, ut alii, quibus vacat & volupe est, laboris & calculi molestiam subeant.

N°. CLXXX.

CONTINUATIO TRACTATIONIS

De descensu corporis gravis, super hypothenusa Trianguli rectanguli mobilis super plano horizontali immobili.

Videatur Numerus CXLVII, pag. 365 & seq. *Tom. III.*

SEnsus hujus Problematis, cujus Solutio a me petebatur, in hoc consistebat, quod ita sonat: „ Sit ACK triangulum materiale, rectangulum in K, quod super plano horizontali DH, „ sine omni frictione, moveri possit. Sit etiam corpus grave *m*, „ quod super hypothenusa AC positum sua gravitate descendat, „ pariter sine frictione; quo fiet ut, descendente corpore *m*, TAB. LXXXVIII. No. CLXXX.

„ Triangulum jugiter ab eo pressum retrocedere cogatur. Quæ-
„ ritur tum corporis, tum Trianguli velocitas; tum etiam via
„ AP, quam corpus ex motu composito describit, atque utrius-
„ que Lex accelerationis?

Solutio, quam statim exhibueram in *Comment. Petrop.* Tom. V. pag. 11 & seq. anno scilicet 1730, placuit Eruditis, deditque quibusdam, ut audio, occasionem solvendi Problema in majori extensione. Solutiones autem eorum, quæ nusquam adhuc extant, quantum scio, nondum vidi. Assumseram in solutione mea hypothenusam AC esse lineam rectam; deinde velocitatem initialem utriusque, tam corporis, quam Trianguli, esse nullam; hoc est, utrumque incipere motum suum a quiete; contentus equidem tractasse Problema sub ea, qua proponebatur, conditione, neque tum cogitans de conditionum amplificatione. Nunc supperadduntur duæ conditiones, quæ Problema reddunt generalius: prima hæc est, ut pro recta hypothenusa AC substituatur linea curva qualiscunque data: conditio altera, ut corpus m habeat velocitatem initialem datam, quando incipit descendere. Id quod facit duo nova Problemata; quibus ut satisfacerem, non operosum mihi fuit observare Formulas meas, pro determinatione virium acceleratricium corporis & Trianguli, accommodari posse ad præsens negotium. Ibi enim demonstratum dedi, quod vis acceleratrix corporis m, in directione hypothenusæ, sit $= \frac{gacM}{ccM - bbm}$, & vis acceleratrix Trianguli, in directione horizontali, sit $= \frac{gabm}{ccM - bbm}$, ubi supponitur $g =$ vi acceleratrici naturali corporum gravium, item a, b, & $c =$ tribus lateribus Trianguli, nimirum altitudini, basi, & hypothenusæ, tandemque $M =$ aggregato massarum Trianguli & corporis m.

Cum autem, ob rectitudinem hypothenusæ, constans maneat ejus inclinatio ad horizontem, ubicunque in illa reperiatur corpus m; patet hujus corporis vim acceleratricem, in directione hypothenusæ, fore uniformem, per totum decursum super hypothenusa.

Aliter

Aliter se res habet, si hypothenusa non est linea recta, sed curva: tunc enim inclinatio ejus ad horizontem est variabilis. Unde variabilis etiam erit vis acceleratrix, in decursu corporis *m* per hypothenusam curvililineam; ut & altera vis acceleratrix ipsius Trianguli in directione horizontali; utpote quæ etiam variabilis fiet. Hoc non obstante, inservire possunt nostræ Formulæ ad determinandas istas vires, pro quolibet descensu super hypothenusa curvilinea. Analysis nostra infinitesimalis huic negotio succurrit. Ecce quomodo.

Ponamus Triangulum rectangulum AKC, mobile super plano horizontali DH, habere pro hypothenusa lineam curvam quamcunque datam AEC, super qua descendens corpus grave *m* pervenerit jam ad E, percursurum porro particulam E*e*, quæ tanquam elementum curvæ pro recta censetur. Ductis igitur applicatis EN, *en*, ad axem AK, huicque parallela EF; sit $AN = x$, $NE = y$, N*n* vel $EF = dx$, $eF = dy$, $Ee = dr$; habebimus Triangulum rectangulum EF*e*, cujus hypothenusa est lineola recta E*e*, quam dum percurrit corpus grave *m*, considerari poterit [durante hoc tempusculo, quod vocetur dt] Triangulum EF*e*, tanquam repræsentans partem figuræ triangularis rectilineæ AKC, mobilis super plano immobili horizontali DH. Hinc, si in Formulis, pro casu vulgari in *Commentariis Petropolit.* soluto, substituantur pro a, b, c, earum repræsentantes dx, dy, dr, prodibunt $\frac{gMdxdr}{Mdr^2 - mdy^2}$ & $\frac{gmdxdy}{Mdr^2 - mdy^2}$; quæ, durante tempusculo dt, exprimunt vires acceleratrices; prior nempe corporis *m* descendendi per lineolam E*e*, & altera systematis *M*, retrocedendi in directione horizontali DH.

Determinatis ita viribus acceleratricibus, reliqua omnia inde dependent. Dicatur enim, brevitatis gratia, vis acceleratrix inventa $\frac{gMdxdr}{Mdr^2 - mdy^2} = A$, & altera $\frac{gmdxdy}{Mdr^2 - mdy^2} = B$; item velocitas, qua corpus *m* percurrit E*e* vel $dr = u$; & velocitas, quam tum habebit Triangulum in directione horizontali $= v$, tempusculum quo incrementa velocitatum du & dv generan-

nerantur $= dt$; unde ex Principiis Dynamicis fluunt sequentia. 1°. $Adt = du$, & $Bdt = dv$; adeoque $A : B = du : dv$; unde $dv = \frac{Bdu}{A}$; 2°. Ob $dt = \frac{dr}{u}$, erit $\frac{Adr}{u} = du$, seu $Adr = udu$; id quod dat $u = \sqrt{\int 2Adr}$, & differentiando, $du = \frac{Adr}{\sqrt{\int 2Adr}}$. 3°. Substituto hoc valore habebimus $\frac{Bdu}{A}$, seu $dv = \frac{Bdr}{\sqrt{\int 2Adr}}$, ipsamque proin $v = \int \frac{Bdr}{\sqrt{\int 2Adr}}$.

Ordo nunc postulat, ut determinemus viam ipsam, quam corpus m motu complicato sequitur inter descendendum; hoc est lineam veram ABP quam actualiter describit. Hunc in finem, resolvenda est velocitas per Ee, in velocitatem verticalem per EF, & horizontalem per Fe; faciendo itaque, ut se habet Ee ad EF, seu ut dr ad dx, ita u seu $\sqrt{\int 2Adr}$ ad quartam $\frac{dx\sqrt{\int 2Adr}}{dr}$ = velocitati per EF; sic pariter ut dr ad dy, ita $\sqrt{\int 2Adr}$ ad $\frac{dy\sqrt{\int 2Adr}}{dr}$ = velocitati in directione horizontali; quæ velocitas est relativa ad mobilitatem Trianguli mixtilinei AKC. Ut vero habeatur velocitas realis, seu absoluta, qua scilicet corpus m, respectu plani horizontalis immobilis, progreditur a plaga H ad plagam D, auferenda erit v, seu velocitas Trianguli, quæ est $\int \frac{Bdr}{\sqrt{\int 2Adr}}$, retrocedens in plagam contrariam a D versus H, una cum ipso corpore m; quo facto, habebimus corporis m velocitatem absolutam, in directione horizontali HD $= \frac{dy\sqrt{\int 2Adr}}{dr} - \int \frac{Bdr}{\sqrt{\int 2Adr}}$.

His præmissis, natura lineæ quæsitæ ABP determinatur hunc in modum. Concipiamus Triangulum mobile AKC, in suo situ initiali, aliudque simile Triangulum, sed immobile, accumbens & congruens cum priori AKC existente in situ initiali; in hoc Triangulo immobili fingamus descriptam esse lineam ABP, cujus naturam quærimus. Sint in ea applicatæ proximæ BN, vel $bn = z$, differentialis $bb = dz$: eritque proin dx ad dz, ut velocitas per dx ad veloci-

locitatem per dz; hoc est, ut $\frac{dx\sqrt{\int 2Adr}}{dr}$ ad $\frac{dy\sqrt{\int 2Adr}}{dr} - \int \frac{Bdr}{\sqrt{\int 2Adr}}$; unde emergit æquatio $dz\sqrt{\int 2Adr} = dy\sqrt{\int 2Adr} - dr\int \frac{Bdr}{\sqrt{\int 2Adr}}$; exprimens naturam lineæ ABP, quam corpus m actualiter describit in plano verticali immobili, quod super DH erectum concipitur, & congruens cum plano mobili AKC in situ initiali. Divisa æquatione per $\sqrt{\int 2Adr}$, prodit valor ipsius $dz = dy - \frac{dr}{\sqrt{\int 2Adr}} \times \int \frac{Bdr}{\sqrt{\int 2Adr}}$ generalissime pro qualibet linea AEC, sive recta sit, sive curva.

COROLLARIUM I.

Si fuerint A & B quantitates constantes, incidimus in casum Trianguli rectilinei AKC, resoluti in *Commentariis* citatis. Revera hoc docebit æquatio inventa, quæ nunc hanc faciem induit $dz = dy - \frac{B}{A} \times \frac{dr}{\sqrt{\int 2dr}} \times \int \frac{dr}{\sqrt{\int 2dr}}$ vel [simplici integratione denominatoris $\sqrt{\int 2dr}$ adhibita] hanc $dz = dy - \frac{B}{A} \times \frac{dr}{\sqrt{2r}} \times \int \frac{dr}{\sqrt{2r}}$; cui æquivalet ista $dz = dy - \frac{B}{A} \times dr$. Quæ porro integrata simpliciter, dat, in terminis finitis, hanc æquationem $z = y - \frac{Br}{A}$, quæ evidenter monstrat lineam ABP esse rectam. Ut autem pateat eandem esse cum illa quam dedimus in *Comment. Coroll.* 11 *; ponamus puncta E, B, N, pervenisse ad loca infima C, P, K; & ita erit $z = PK$; $y = CK$, seu b; $r = AC$, seu c, & cum præterea per *Coroll.* 1, sit $B : A = bm : cM$; erit $PK = CK - \frac{bm \times AC}{cM}$; adeoque $CK - PK$, seu CP, $= \frac{bm \times AC}{cM} =$ [ob $AC = c$] $\frac{bm}{M} =$ [ob $CK = b$] $\frac{m}{M} \times CK$; quod prorsus conspirat cum *Coroll.* 2 loci citati.

* Pag. 370, *Tom. III.*

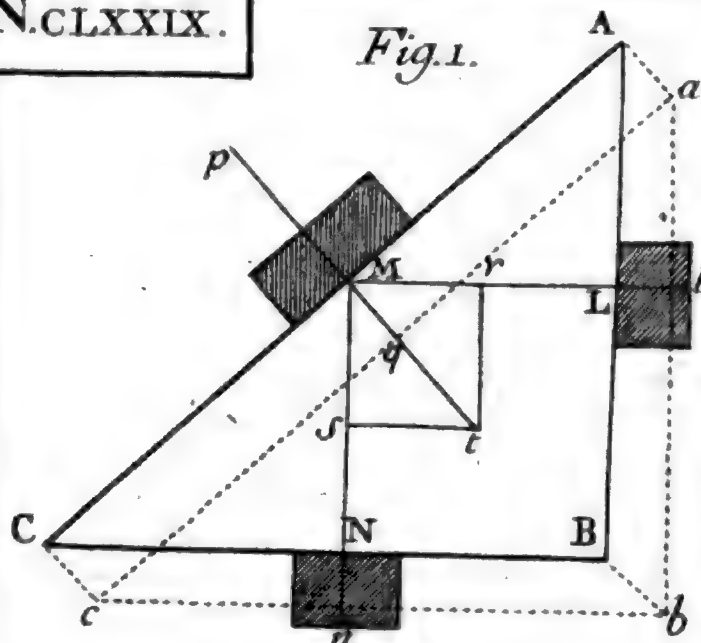
COROLLARIUM II.

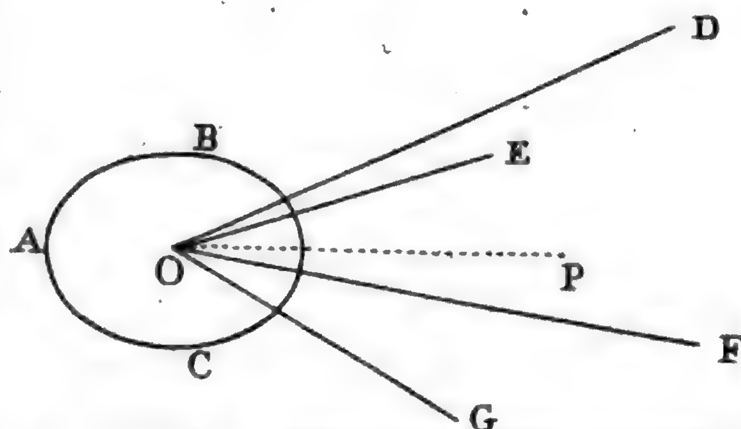
Posito eodem casu Trianguli rectilinei AKC; ut inveniatur æquatio inter coordinatas AN & NB, hoc est, inter x & z, exprimens naturam lineæ ABP, quam corpus m realiter describit; id tantum agendum est, ut in æquatione modo ante inventa $dz = dy - \frac{B}{A} \times \frac{dr}{\sqrt{2r}} \times \int \frac{dr}{\sqrt{2r}}$, substituantur valores quantitatum dy, dr, r, & $\frac{B}{A}$; nempe $\frac{bdx}{a}$ pro dy, $\frac{cx}{a}$ pro r, $\frac{cdx}{a}$ pro dr, & $\frac{bm}{cM}$ pro $\frac{B}{A}$: quo facto, & reductione peracta, prodibit $adz = bdx - \frac{bm}{M} \times \frac{dx}{\sqrt{2x}} \times \int \frac{dx}{\sqrt{2x}}$, ubi per simplicem integrationem quantitatis $\frac{dx}{\sqrt{2x}} \times \int \frac{dx}{\sqrt{2x}}$, mutaretur æquatio in hanc $adz = bdx - \frac{bmdx}{M}$: rursusque simpliciter integrando, haberetur $az = bx - \frac{bmx}{M}$; seu $z = \frac{bx}{a} - \frac{bmx}{aM}$; quæ æquatio, respectu habito ad valorem litterarum, est eadem cum inventa $z = y - \frac{Br}{A}$, per quam denotari vidimus lineam ABP esse rectam.

COROLLARIUM III.

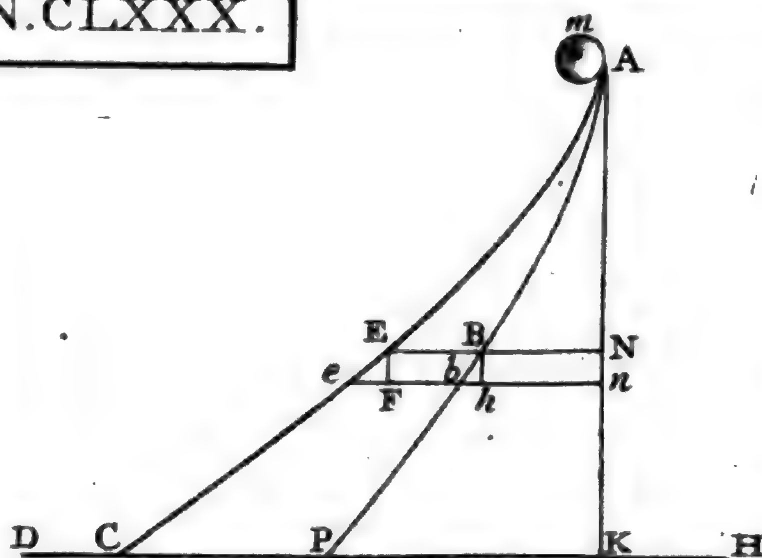
Quod si vero, in æquatione $adz = bdx - \frac{bm}{M} \times \frac{dx}{\sqrt{2x}} \int \frac{dx}{\sqrt{2x}}$, integretur $\frac{dx}{\sqrt{2x}}$ in tota sua latitudine, ita ut fiat $\int \frac{dx}{\sqrt{2x}} = \sqrt{2x} - \sqrt{2q}$; auferendo scilicet a simplici integrali $\sqrt{2x}$ adhuc arbitrarium aliquod constans $\sqrt{2q}$; emerget inde $adz = bdx - \frac{bm}{M} \times \frac{dx}{\sqrt{2x}} \times (\sqrt{2x} - \sqrt{2q})$; seu $adz = bdx - \frac{bmdx}{M} \times \frac{bmdx\sqrt{2q}}{M\sqrt{2x}}$; quod simpliciter integratum, dat hanc æquationem alge-

N.° CLXXIX.





N.° CLXXX.



algebraicam $az = bx - \frac{bmx}{M} + \frac{2bm\sqrt{qx}}{M}$; quæ liberata ab asymmetria, & posito T pro massa Trianguli quæ est $M - m$; dat $aaM^2 zz - 2abMTxz + bbT^2 xx = 4bbmmqx$; seu $(aMz - bTx)^2 = 4bbmmqx$.

Observabunt Analystæ, si calculum inire voluerint, hanc æquationem esse ad Parabolam; quæ autem degenerat in lineam rectam, in casu quo assumta $q = 0$.

Ponamus igitur velocitatem initialem corporis m non esse nullam, sed eam esse, quam acquireret in directione hypothenusæ, in casu simplici a me olim soluto, postquam super ea percurrisset partem respondentem altitudini verticali $= q$; quam velocitatem nominemus $= v$: Dico, si hac velocitate initiali v, corpus m incipiat moveri super hypothenusa Trianguli rectilinei; eo momento, quo ipsum Triangulum est adhuc in quiete: dico, inquam, fore ut corpus m, suo motu vero continuo, sequatur prædictam Parabolam.

N°. CLXXXI.

PROBLEMA NEWTONIANUM

Generaliter conceptum & solutum.

Vide Princip. Phil. Nat. *Lib.* 2. *Prop.* 10. p. 252. Edit. 3.

aut

Numerum LXXXVII. pag. 481. *Tom. I.*

TEndat vis gravitatis data quacunque lege variabilis, ad punctum datum quodcunque; sitque resistentia qualiscunque. Requiritur tum Medii densitas in locis singulis [si nimirum resistentia ex densitate, & velocitate, quocunque modo detur], qua faciat ut corpus in data quavis linea curva moveatur; tum corporis velocitas, & Medii resistentia ipsa in locis singulis.*

Confer *Acta Lips.* 1713. pag. 121. & seq. aut Numerum XC, pag. 542 & seq. *Tom. I.*

Typus Solutionis Analyticæ.

TAB. LXXXVIII. N°. CLXXXI. *Fig.* 1.

Sit diſtantia $= x =$ XC, Cc $= ds$, bc $= dy$, Cb $= dx$; velocitas in C $= v$, vis centralis $= fx$: Erit vis tangentialis $= \frac{fdx}{ds}$; vis normalis $= \frac{fdy}{ds}$. Sit item reſiſtentia $= R$; denſitas $= D$; radius evolutæ $= r =$ CO; angulus contactus $= c = \frac{Cc}{CO} = \frac{ds}{r}$. Erit vis centrifuga $=$ vi normali, hoc eſt, $\frac{vv}{r} = \frac{fdy}{ds}$; unde $vv = \frac{frdy}{ds} = \frac{fdy}{c}$. Ergo jam inventa eſt velocitas, ex data vi centrali & natura curvæ.

Porro ex natura accelerationis patet, fore [ſumtis ſignis ſuperioribus pro aſcenſu, & inferioribus pro deſcenſu] $fdx \pm Rds = -vdv = -\frac{1}{2}d\left(\frac{fdy}{c}\right)$. Unde invenitur $R = \frac{fdx + \frac{1}{2}d\left(\frac{fdy}{c}\right)}{\mp ds}$. Adeoque etiam reſiſtentia habetur ex data vi & natura curvæ, & quidem independenter a lege denſitatis. Newtonus autem, non putans hoc fieri poſſe, determinandam ſuſcepit primo denſitatem, atque ex ea & ex velocitate poſtea quæſivit reſiſtentiam: quæ via, cum ſit inverſa & parum naturalis, illum præcipitem dedit in calculum longe operoſiſſimum & abſtruſum; etiamſi caſus quem proponit ſit particulariſſimus.

Ipſa vero denſitas D nunc nullo labore obtinetur. Ponatur enim $R = v^n D$, hoc eſt, reſiſtentia proportionalis non tantum quadrato velocitatis [ut ſupponit Newtonus] ſed cuicunque dignitati velocitatis multiplicatæ per denſitatem. Erit utique $D = \frac{R}{v^n} = \frac{fdx + \frac{1}{2}d\left(\frac{fdy}{c}\right)}{\mp ds\left(\frac{fdy}{c}\right)^{\frac{1}{2}n}} = \frac{c^{\frac{1}{2}n} fdx}{\mp ds (fdy)^{\frac{1}{2}n}} \mp \frac{\frac{1}{2-n} d\left(\left(\frac{fdy}{c}\right)^{\frac{2-n}{2}}\right)}{ds}$.

Hinc etiam tempus t facillime deducitur: nam $dt = \frac{ds}{v} = \frac{ds\sqrt{c}}{\sqrt{fdy}}$; adeoque $t = \int \frac{ds\sqrt{c}}{\sqrt{fdy}}$.

Eſto

Esto exemplum NEWTONI [v. p. 254, aut pag. 485 *Tom. I.*] ubi curva PFQ est semicirculus; vis tendens perpendiculariter ad horizontem uniformis, adeoque invariabilis; $\frac{dx}{ds} = \frac{AC}{AQ}$; $\frac{dy}{ds} = \frac{HC}{AQ}$; $c = \frac{ds}{r} = \frac{HI}{AQ}$. Unde $v = \sqrt{\frac{f\,dy}{c}} = \sqrt{\frac{f\,dy \times AQ}{HI}} = \sqrt{f \times HC}$. Hoc est, ob datam f, erit velocitas v ut $\sqrt{CH}$; sicuti habet NEWTONUS, p. 256. l. 4.* TAB. LXXXVIII. N°. CLXXXI. *Fig. 2.*

Porro $R = \frac{f\,dx + \frac{1}{2}d\left(\frac{f\,dy}{c}\right)}{\mp ds} = \frac{f \times MI + \frac{1}{2}d(f \times HC)}{\mp HI} = \frac{f.\,(MI + \frac{1}{2}MI)}{\mp HI}$ = [sumtis proportionalibus in terminis finitis] $\frac{f \times (AC + \frac{1}{2}AC)}{\mp AQ}$ $= \frac{3f \times AC}{\mp 2AQ}$. Adeoque $R : f = 3AC : \mp 2AQ$, ut NEWTONUS ibidem [sed in prima Editione errabat †, nec animadvertit errorem, nisi me monente]. Ideoque tantum descensus est possibilis physice.

Densitas ita habetur $D = \frac{R}{vv} = \frac{3f.\,AC : \mp 2AQ}{CH}$, adeoque, ob datas f & AQ, erit D ut $\frac{AC}{CH}$; sicuti NEWTONUS invenit, p. 255, l. ult., & p. 256, l. 1 ‡, sed via inversa quæsivit primo, quod nostra naturali via ultimo datur sponte.

Poterat etiam tempus determinari, quia nempe $dt = \frac{ds}{v}$ $= \frac{HI}{\sqrt{CH}}$. Hinc $t = \int \frac{HI}{\sqrt{CH}} = \int \frac{ds}{\sqrt{x}} = \int \frac{a\,dx}{\sqrt{(aax - x^3)}}$, cujus quantitatis integratio pendet a rectificatione curvæ Lemniscatæ, ut olim docui in constructione Isochronæ Paracentricæ §. Atque ex formula $t = \int \frac{ds}{\sqrt{x}}$ patet tempus per arcum FH esse æquale tempori semi-oscillationis Penduli suspensi ex cen-

* pag. 488. Col. 2. lin. 1. & 2. *Tom. I.*
† *Tom. I.* pag. 487. Col. 1. lin. 6, 5, 4 à fine.
‡ Ibid. Col 1 & 2.
§ N°. XIX. pag. 120. *Tom. I.*

centro A, & describentis arcum HF; concipiendo figuram inversam, sive semi-peripheriam PFQ descriptam infra diametrum PQ.

Sit nunc curva proposita Spiralis Logarithmica, inque ejus umbilico sit centrum virium, quod unicum est exemplum a NEWTONO prolatum curvarum, in quibus centrum virium in distantia est finita. Hoc autem Exemplum per methodum nostram est facillimum. Quia enim radius evolutæ Spiralis est PO, [Vid. Fig. NEWT. pag. 275, vel 276] erit angulus contactus, seu $c = \frac{ds}{PO} = \frac{dy}{x}$. Hinc formula nostra generalis . . .

TAB. LXXXVIII. N°. CLXXXI. *Fig.* 3.

$R = \frac{fdx + \frac{1}{2}d\left(\frac{fdy}{c}\right)}{\mp ds}$ mutatur in hanc, $R = \frac{fdx + \frac{1}{2}d(fx)}{\mp ds} = \frac{\frac{3}{2}fdx + \frac{1}{2}xdf}{\mp ds}$ comprehendentem omnia quæ NEWTONUS octo paginis operose pertractat *. Ponatur primo $f = x^m$; sitque ratio constans ds ad dx, ut 1 ad q; habebitur $R = \frac{\frac{3}{2}fdx + \frac{1}{2}xdf}{\mp ds} = \frac{(3+m).\,qx^m}{\mp 2}$. Hinc resistentia est proportionalis vi centrali. Velocitas $v\left[\frac{fdy}{c}\right] = \sqrt{fx} = \sqrt{x^{m+1}}$. Ponatur porro D, seu $\frac{R}{v^n}$, seu $\frac{(3+m).\,qx^{(2m-mn-n):2}}{\mp 2} = \frac{1}{x} = x^{-1}$; faciendum erit $\frac{2m - mn - n}{2} = -1$, unde $n = \frac{2m+2}{m+1} = 2$. Ergo manente $f = x^m$, & $D = \frac{1}{x}$, supponendo cum NEWTONO resistentiam esse in duplicata ratione velocitatum, & simplici densitatum, corpus semper gyrari potest in Spirali Logarithmica; quæ est Propositio NEWTONI, sed in omni amplitudine sumta, quam ipse nimis restrinxit præter necessitatem. Vid. *Act. Lips.* 1713, pag. 125 †.

Co-

* *Tom. I.* pag. 495, & seq. † N°. XC. pag. 548, *Tom. I.*

COROLLARIUM I.

Quia vis centrifuga $\frac{vv}{r} = \frac{fdy}{ds}$; erit $fdy = \frac{vvds}{r} =$ [in hoc casu] $\frac{vvdy}{x}$; adeoque $f = \frac{vv}{x}$. Hoc est velocitas in loco quovis descensus [si m est affirmativum, vel etiam negativum, sed < 3] aut ascensus [si m est negativum & simul > 3] ea semper est, qua cum corpus, in medio non resistente, eadem vi centripeta gyrari potest in circulo ad eandem a centro distantiam. Vide *Coroll.* 1. NEWT. pag. 277 †. Confer *Act. Lips.* 1713, pag. 126 *.

COROLLARIUM II.

Quia D, in suppositione NEWTONI, fit $= \frac{(3+m).q}{\mp 2x} = \frac{(3+m).qds}{\mp 2xds} = \frac{(3+m).dx}{\mp 2xds} = \frac{(3+m) \times OS}{\mp 2SP \times OP}$; manifestum est, ob datum $\frac{3+m}{\mp 2}$, densitatem esse ut $\frac{OS}{SP \times OP}$; ceu habet NEWTONUS ibid. Coroll. 2 †. Conf. *Act. Lips.* loco cit.

COROLLARIUM III.

$R : f = \frac{(3+m).qx^m}{\mp 2} : x^m = \frac{(3+m).q}{\mp 2} : 1 = \frac{(3+m).qds}{\mp 2} : ds = \frac{(3+m)dx}{\mp 2} : ds = \frac{(3+m)}{\mp 2} OS : OP$. Et in casu particulari NEWTONI, ubi $m = -2$; erit $R : f = \mp \frac{1}{2} OS : OP$; ut quidem habet NEWTONUS ibid. Coroll. 3 †. Sed non animadvertit descensum tantum esse possibilem. Confer *Act. Lips.* loco cit.

COROL-

† *Tom. I. pag.* 497. * N°. XC. pag. 549, *Tom. I.*

COROLLARIUM IV.

Fiat resistentia $= \frac{3 + m}{+ \frac{1}{2}} f$; fiet OS = OP; & Spiralis conveniet cum linea recta PS: velocitas vero cum semper sit in Spirali $= \sqrt{x^{m+1}} = x^{(m+1):2}$; erit etiam in hac linea recta velocitas ut $x^{(m+1):2}$. Adeoque, in casu NEWTONI, ubi $m = -2$, Velocitas illa ut $\frac{1}{\sqrt{x}}$. Vide Coroll. 4 NEWT. pag. 277 †.

COROLLARIUM V.

Cum in velocitatis expressione $v = x^{(m+1):2}$ non ingrediatur littera q, quæ speciem Spiralis distinguit; evidens est, in singulis Spiralibus Logarithmicis cujuscunque speciei, esse velocitates æquales in distantiis æqualibus. Quod itaque independenter a Corollario præcedente demonstravimus, secus ac fecit NEWTONUS: Vide ejus Coroll. 5, p. 277 & 278. * Patet etiam per se, tempora per singulas Spirales esse ad se invicem, ut longitudines Spiralium. Vid. *Act. Lips.* ejusdem an. p. 127 **.

Reliqua NEWTONI Corollaria pari modo per nostra examinari possunt.

COROLLARIUM VI.

Si $m = -1$, erit velocitas $v = \sqrt{x^0} =$ constanti, adeoque uniformis; & tempora per quosvis arcus erunt ipsorum arcuum longitudinibus proportionales. Vid. *Act. Lips.* 1713, p. 126 **.

Propositio NEWTONI XVI, p. 280 ‡ discrepat nunc ab ea quam in prima editione habuerat, edoctus eam falsam esse, sicuti

† *Tom. I*, pag. 497. * *Tom. I.* pag. 498. ** N°. XC. pag. 550, *Tom. I.*
‡ *Tom. I*, pag. 500.

ſicuti monſtravi in *Act. Lipſ.* 1713, pag. 125, Confect. 3 †: in hac vero, quam in editionibus poſterioribus ſubſtituit, fruſtra vult vim centripetam debere eſſe *reciproce* ut dignitatem quamlibet diſtantiæ; cum generalius dicere potuiſſet, *ſive reciproce*, *ſive directe*. Nam monſtravimus hic, ſi denſitas ſit diſtantiis reciproce proportionalis, poſſe ſemper eſſe $f = x^m$, ubi m denotat exponentem quemcunque, ſive affirmativum, ſive negativum.

Problema IV Newtoni, *p.* 281, ubi proponitur invenienda & vis centripeta & medii reſiſtentia, qua corpus in data Spirali, data velocitatis lege, revolvi poteſt: cujus Solutionem ipſam non exhibet, ſed modum tantum indicat, quo eo perveniri poſſe putat; ad cujus veſtigia ſi Solutionem tentare vellemus, multum temporis & ſudoris impendendum eſſet. Noſtra vero methodo rem ludendo peragemus. Nam v ſeu $\sqrt{\frac{fdy}{c}}$ cum ſit æquale $\sqrt{fx}$, erit $\frac{vv}{x} = f$: ergo jam determinavimus vim centripetam. Nunc valor ipſius f, ut & valor ipſius df, qui eſt $= \frac{2vxdv - vvdx}{xx}$ ſubſtituatur in $R = \frac{\frac{3}{2}fdx + \frac{1}{2}xdf}{\mp ds} = \frac{3fxxdx + x^3df}{\mp 2xxds} = \frac{d(fx^3)}{\mp 2xxds}$; prodibit $R = \frac{vvdx + vxdv}{\mp xds} =$ [quia $dx = qds$] $\frac{qvv}{\mp x} + \frac{vdv}{\mp ds}$. Data igitur, per hypotheſin, v in x, datur f & R. Quorſum igitur tot intricatiſſimæ ambages?

Problema V Newtoni, ubi ex data lege vis centripetæ, invenienda eſt medii denſitas ad deſcribendam datam Spiralem. Newtonus prolixitate non neceſſaria, confugit ad inquiſitionem retardationis velocitatis. Nos ita facile rem abſolvimus. Quia $vv = fx$, vel $v = \sqrt{fx}$, habetur velocitas ex data vi centripeta.

† N°. XC, pag. 548, 549, *Tom. I.*

Et quia NEWTONUS supponit $vvD = R$, quam invenimus $= \frac{d(fx^3)}{\mp 2xxds}$; erit utique $D = \frac{R}{vv} = \frac{d(fx^3)}{\mp 2fx^3 ds} =$ [differentiando actu & substituendo qds pro dx] $\mp \frac{3q}{2x} \mp \frac{df}{2fds}$.

SCHOLIUM.

Videmus hæc duo Problemata nihil fere laboris requirere; si rite tractentur; sed NEWTONUS præpostera methodo usus, nescio quid magni laboris metuens, vadum non tentavit.

N°. CLXXXII.

PROBLEMA BALLISTICUM.

I.

TAB. LXXXVIII. N°. CLXXXII. Fig. 1.

Data velocitate initiali, expressa per AC, *alicujus mobilis gravis, quod ex* A *verticaliter in altum exploditur, in medio uniformiter denso; Quæritur altitudo* AK *ad quam ascendit; item tempus quod tam in ascensum quam in descensum impendit.*

SOLUTIO.

II.

Sit CGM Parabola, seu scala velocitatum; cujus nempe applicatæ CA, GI, gi &c. designent velocitates mobilis gravis in punctis A, I, i &c. si ascenderet in vacuo, seu in medio non resistente. Sit etiam curva CEF [quam Logarithmicam esse ex *Dissertatione mea de Motu* † patet] scala velocitatum ejusdem mobilis, si expers gravitatis cum velocitate initiali AC

† N°. CXXXV. Cap. XIII. pag. 74, & 75, *Tom. III.*

AC verticaliter ascenderet; adeo ut applicatæ EN, en, FB, &c. exprimant velocitates residuas in punctis N, n, B, &c. Sit tandem curva CHK, scala velocitatum mobilis gravitate prædití, in medio uniformiter denso verticaliter ascendentis, cum velocitate initiali AC: ita ut applicatæ CA, HL, hl, &c. designent velocitates residuas in punctis A, L, l &c.

III.

Per duo quævis puncta proxima R, S, ducantur axi AB parallelæ, secantes curvas prædictas in punctis H, G, E, & h, g, e, ex quibus deductæ intelligantur applicatæ HL, GI, EN, & hl, gi, en, quarum priores secent Se in punctis P, Q, T.

Dicantur nunc AC $= n$, AM $= a$, FB $=$ unitati $= 1$, AB $= b$, subtangens Logarithmicæ CEF $= c$, velocitas HL $=$ GI $=$ EN $= v$; subtangens Logarithmicæ, quæ respondet Logarithmis in Tabulis vulgaribus *Vlacquianis* prostantibus $= q = 4342945$. Erit, sumendo Logarithmos ex istis Tabulis, $q : c = lv : \frac{clv}{q} =$ BN, & $q : c = ln : \frac{cln}{q} =$ BA. Est vero EN, seu $v : c =$ ET $[dv]$: Te seu Nn $[\frac{cdv}{v}]$, adeoque $\frac{\text{Nn}}{\text{EN}} = \frac{cdv}{vv} =$ tempusculo per Nn; integrando $\frac{c}{1} - \frac{c}{v} = t$ BN [intelligo per t BN tempus per BN] & $\frac{c}{1} - \frac{c}{n} = t$ BA; hinc $\frac{c}{v} - \frac{c}{n} = t$ AN. Porro vocetur R resistentia medii, quando mobile gravitatis expers est in N; & G vis gravitatis ejusdem mobilis gravitate prædití, cum ascendit in vacuo: erit $\frac{R.\,cdv}{vv} = dv$ [quia nempe decrementa vel incrementa velocitatum, sunt resistentiis vel viribus motricibus in tempuscula ductis proportionalia]; adeoque $R = \frac{vv}{c}$.

I V.

Nunc $AC^2 : IG^2 [= nn : vv] = AM [a] : MI [\frac{avv}{nn}]$. Ergo $Ii = Qg = \frac{2avdv}{nn}$, & $\frac{Ii}{GI} = \frac{2adv}{nn} = t\, Ii$; integrando $\frac{2av}{nn} = t\, IM$, unde $\frac{2a}{n} = t\, AM$. Jam quia $\frac{G.2adv}{nn} = dv$; habetur $G = \frac{nn}{2a}$. Ut nunc pro ascensu determinetur $t\, AK$, indeque ipsa curva CHK; notetur, summam virium $G+R$ retardare mobile ascendens; voceturque $KL = z$, & Ll vel $Ph = dz$. Erit $\frac{dz}{v} = t\, Ll$, & $\frac{(G+R).\, dz}{v} = dv$; adeoque $\frac{vdv}{dz} = G+R = \frac{nn}{2a} + \frac{vv}{c}$. Hinc $dz = \frac{2acvdv}{nnc + 2avv}$, quæ exprimit naturam curvæ CHK, ope Logarithmorum construendæ. Verum $t\, Ll\, [\frac{dz}{v}] = \frac{2acdv}{nnc + 2avv}$, & $t\, LK = \int \frac{2acdv}{nnc + 2avv}$, cujus integratio dependet a rectificatione arcus circularis, qui habet radium $= n\sqrt{\frac{c}{2a}}$, & tangentem $= v$, ut notum est. Sumta itaque HL, vel v, æquali ipsi CA, vel n; prodibit tempus per totam AK. Ut autem hoc tempus comparari queat cum tempore per AM ascensus in vacuo $= \frac{2a}{n}$, sequentia sunt observanda.

V.

Concipio medium uniformiter densum, tanquam ex corpusculis æqualibus & elasticis, per spatium æqualibus interstitiolis a se invicem disseminatis constans; cujus naturæ aërem esse valde est probabile. Ostendi autem in *Dissertatione mea de Legibus communicationis motus*, Cap. XII, §. 13 †, corpus conoidicum ADB [vid. Fig. ibid.] quod in tali medio secundum directionem axis

† pag. 72, *Tom. III.*

axis ID [vertice D antrorsum verso] velocitate n moveri incipit in linea horizontali, vel in quacunque recta, si sit gravitatis expers, percurrisse spatium $= Cxxln : 17371780 \int \frac{xdx^2}{ds^2}$ [ponendo post integrationem $x =$ IA], quando eo usque pervenit, ut velocitas residua sit ad velocitatem initialem, ut 1 ad n. Intelligo autem per C, longitudinem cylindri recti aërei eandem cum Conoïde basin, eandemque quantitatem materiæ, seu [si ponderosa esse supponatur] idem pondus habentis; per ln intelligo Logarithmum ipsius n ex Tabulis usitatis desumtum; item per ds, intelligo elementum curvæ, ex cujus revolutione generatur. Si Conoïdes ADB sit hæmisphærium, cujus radius $= r$, erit [in casu quo x evadit $= r$] $\int \frac{xdx^2}{ds^2} = \frac{1}{4} rr$, adeoque $Cxxln : 17371780 \int \frac{xdx^2}{ds^2} = Crrln : 17371780 \times \frac{1}{4} rr$ $= \frac{Cln}{4342945}$.

VI.

Posito nunc hemisphærium esse ex ferro, & hoc esse 7000^{ies}. gravius vel densius aëre; erit C, seu longitudo cylindri aërei æque gravis & ejusdem basis cum hemisphærio $= \frac{2}{3} r \times 7000$ $= 4667 r$. Ut autem habeatur C pro tota Sphæra, intelligatur alterum hemisphærium posterius, quod ab aëre allabente intactum manet, incorporari [ut ita dicam] in anteriori; ita ut hoc evadat duplo densius: patet hoc hemisphærium, duplo densius quam ferrum, percurrere, eodem tempore, eandem viam quam integer globus ferreus; ergo prædictus numerus sumendus tantum est duplus, vel pro radio r simpliciter scribenda est diameter globi, quæ vocetur D, atque ita erit $C = 4667 D$. Hinc $\frac{Cln}{4342945} = \frac{4667 D \times ln}{4342945}$.

Sit ex. gr. $n = 2$, hoc est, si scire velimus, quousque globus ferreus in linea horizontali moveri debeat, ut ab aëris resistentia amittat dimidium suæ velocitatis initialis, in quo casu

$ln = l2 = 0.3010300$; facto calculo prodibit $\frac{4667\,D \times ln}{4342945} = 3235\,D$. In dissertatione mea inveni $3700\,D$ pro globo plumbeo.

VII.

Sed ut ad rem redeam; invenienda est ante omnia c, vel subtangens Logarithmicæ CEF; quod fit faciendo, ut ln ad AB [$Cxxln : 17371780 \int \frac{x\,dx^3}{ds^3}$, quæ pro globo ferreo est $\frac{4667\,D\,ln}{4342945}$] ita subtangens Logarithmicæ Tabularum, seu 4342945, ad subtangentem quæsitam c, quæ per consequens $= 4667\,D$. Quia itaque per §. IV, $t\,LK = \int \frac{2acdv}{nnc + 2avv}$; scribatur pro c ejus valor $4667\,D$, & habebitur $t\,LK = \int \frac{9334\,aDdv}{4667\,nnD + 2avv}$. Hoc ut construatur, sit descriptus quadrans circuli DXY, cujus radius $OD = n\sqrt{\frac{c}{2a}} = n\sqrt{\frac{4667\,D}{2a}}$; & in tangente DZ sumatur DV $= v$; erit, ducta OV, arcus $DX \times \frac{2a}{nn} = t\,LK$. Hinc si DV, vel v, fit æqualis velocitati initiali $AC = n$, dabit $DX \times \frac{2a}{nn} = t\,AK$. Est autem, per §. IV, tempus per AM in vacuo $= \frac{2a}{n}$. Adeoque $t\,AM : t\,AK = \frac{2a}{n} : DX \times \frac{2a}{nn} = n : DX = DV : DX =$ [quia $OD : DV = n\sqrt{\frac{c}{2a}} : n = \sqrt{c} : \sqrt{2a} = c : \sqrt{2ac}$, sumto radio $O\Delta = c$, & tangente $\Delta U = \sqrt{2ac}$] $= \Delta U : \Delta\xi$. Quod si vero comparare lubeat tempus per AK in medio resistente, ad tempus per datam altitudinem IM in vacuo, erit $t\,IM : t\,AK = \frac{2av}{nn} : DX \times \frac{2a}{nn} = v : DX = GI : DX$.

TAB. LXXXVIII. N°. CLXXXII. *Fig.* 2.

VIII.

Notandum est, ex natura Parabolæ MGC [in *Fig.* 1], quadratum

dratum velocitatis GI in vacuo, semper esse proportionale altitudini IM, ad quam ascendere potest; adeoque $\frac{vv}{IM} = \frac{nn}{AM} = \frac{nn}{a}$ = constanti; quæ dicatur $= c$. Quare jam erit, pro medio resistente, t LK seu $\int \frac{9334\, a D dv}{4667 nn D + 2avv} = \int \frac{9334 D dv}{4667 c D + 2vv}$. Hinc [*Fig.* 2] quadrantis DXY radius OD, seu $n\sqrt{\frac{4667 D}{2a}} = \sqrt{\frac{4667 c D}{2}} = \sqrt{2334 c D}$ = constanti. Sit igitur velocitas initialis, hoc est, AC [*Fig.* 1] vel DV [*Fig.* 2] in medio resistente infinite magna, quo ipso arcus DX abit in quadrantem DXY, quia secans OXV evadit parallela tangenti DV; unde t IM : t AK = IG : DXY, hoc est, ut finitum IG ad finitum DXY: est enim quadrans DXY finitus, ob radium OD finitum, ut pote $= \sqrt{2334 c D}$.

TAB. LXXXVIII. N°. CLXXXII. Fig. 1. & 2.

Hinc patet veritas Paradoxi; globum scilicet in aëre uniformiter resistente sursum explosum, quamvis infinita velocitate, impendere tantum tempus finitum per totam altitudinem, ad quam ascendere potest.

COROLLARIUM I.

Per §. III, t AB $= \frac{c}{1} - \frac{c}{n}$ in medio resistente, sed sine gravitate; & per §. IV, t AM $= \frac{2a}{n}$ in vacuo, sed cum gravitate. Ergo t AB : t AM $= \frac{c}{1} - \frac{c}{n} : \frac{2a}{n} = nc - c : 2a =$ [in casu globi ferrei] $(n-1) \times 4667 D : 2a =$ [in casu quo præterea $n = 2$] $4667 D : 2a$.

Hinc si diameter globi sit 3 poll. seu $\frac{1}{4}$ ped., & sit a, seu altitudo AM, ad quam hic globus in vacuo ascendere posset = 1000 ped.; erit t AB : t AM :: $\frac{4667}{4}$: 2000 = 4667 : 8000. Supponendo igitur, ut HUGENIUS determinavit, grave in vacuo descendere $15\frac{1}{12}$ ped. mensuræ Parisinæ in uno minuto secundo, requirentur [ad ascendendum ad altitudinem 1000 ped. Paris.]

8–

$8\frac{1}{6}$ secunda quam proxime: Faciendo itaque $8000 : 4667 = 8\frac{1}{6} : 4\frac{3}{4}$, paulo plus; prodibunt paulo plus quam $4\frac{3}{4}$ minuta secunda, quibus mobile gravitatis expers, aut globus 3 poll. Parif. in horizonte motus indiget, donec a resistentia aëris amiserit dimidium velocitatis initialis, qua cum ascendere posset in vacuo, ad altitudinem mille pedum.

COROLLARIUM II.

Supra §. IV inventum est Ll, vel $dz = \frac{2acvdv}{nnc + 2avv} =$ [substitutis pro nn, vv & $2vdv$, earum proportionalibus AM, IM, & Ii; & vocando IM $= y$, I$i = dy$] $\frac{cdy}{c + 2y}$; cujus integrale [sumtis Logarithmis ex Tabulis] $= \frac{\frac{1}{2}cl(c + 2y) - \frac{1}{2}clc}{4342945}$ $=$ KL. Hinc tota AK $= \frac{\frac{1}{2}cl(c + 2a) - \frac{1}{2}clc}{4342945} = \frac{cl(c+2a) - clc}{8685890}$ $=$ [in præsenti casu] $\frac{4667Dl(4667D + 2000) - 4667Dl(4667D)}{8685890}$ $=$ [supposito $D = \frac{1}{4}$ ped.] $\frac{1166\frac{3}{4}l\,3166\frac{3}{4} - 1166\frac{3}{4}l\,1166\frac{3}{4}}{8685890}$ $= \frac{1166\frac{3}{4} \times 3.5006138 - 1166\frac{3}{4} \times 3.0669778}{8685890} =$ $\frac{1166\frac{3}{4} \times 433636}{868589} = \frac{4667 \times 108409}{868589} = \frac{505944803}{868589} = 582\frac{1}{2}$ ped. Parif. quam proxime.

Atque ita patet globum nostrum ferreum, non multo plus quam ad dimidiam altitudinem in aëre ascendere, ad quam totam ascenderet in vacuo.

IX.

Pergimus nunc ad determinandum descensum ex altitudine KA, quem mobile grave finito ascensu inchoare debet. Sit curva KVγ scala velocitatum, cujus scilicet applicatæ $\mathcal{C}v$, βV, Aγ

$A\gamma$ denotent velocitates acquisitas mobilis gravis descendendo in punctis $\mathfrak{G}$, β, A. Per simile ratiocinium; quo usus sum in §. IV, conficitur, differentiam virium $G - R$ accelerare mobile cadens. Vocetur nunc $K\beta = z$, & $\mathfrak{G}\beta$ vel $v\alpha = dz$; erit [reliquis manentibus] $G - R = \frac{nn}{2a} - \frac{vv}{c} = \frac{vdv}{dz}$; unde $dz = \frac{2acvdv}{nnc - 2avv} = \frac{acdv}{n\sqrt{c} - v\sqrt{2a}} - \frac{acdv}{n\sqrt{c} + v\sqrt{2a}} =$ [substituendo pro nn, vv, $2vdv$, earum proportionales AM, IM, Ii] $\frac{cdy}{c-2y}$; cujus integrale [sumendo Logarithmos ex tabulis] $= \frac{\frac{1}{2}clc - \frac{1}{2}cl(c-2y)}{4342945} = \frac{clc - cl(c-2y)}{8685890} = K\beta$. Hinc elegantia fluunt Corollaria.

Corollarium I.

Existente MI = MA, hoc est, si $y = a$, habetur $K\beta = \frac{clc - cl(c-2a)}{8685890}$, ad id ut velocitas acquisita recidendo, fiat æqualis velocitati initiali. In nostro exemplo, ubi $c = 1166\frac{2}{3}$ ped. erit $\frac{clc - cl(c-2a)}{8685890} = \frac{1166\frac{2}{3}l\,1166\frac{2}{3} - 1166\frac{2}{3}\,l - 833\frac{1}{3}}{8685890} =$ impossibili, quia Logarithmus quantitatis affirmativæ ad Logarithmum quantitatis negativæ transgredi non potest, quin transeat per lo qui est $= -$ infinito; atque adeo quin ultra infinitum [sit venia dicto] globus descendat. Unde colligitur, globum nostrum nunquam recuperare posse, recidendo, velocitatem suam initialem, etiamsi in infinitum descenderet.

Corollarium II.

Sit autem $2y = c$; prodit $\frac{clc - clo}{8685890} =$ infinito $= K\beta$. Unde si $y = \frac{1}{2}c$, hoc est, in nostro casu, si y vel MI $= 4667 \times \frac{1}{8}D = \frac{4667}{8}$ ped. $= 583\frac{3}{8}$ ped. aut circiter = KA [quæ in Co-

roll. 2, §. VII, inventa est $= 582\frac{3}{8}$ ped.] habebit globus maximam suam possibilem velocitatem, ad quam autem nunquam pertingit, sed data quavis quantitate propius accedit. Hinc sumta $MI = 583\frac{3}{8}$ ped. erit ducta GR parallela ipsi MA, asymtotos scalæ velocitatum $KV\chi$.

Corollarium III.

Sed ut inveniatur ipsa velocitas maxima *ad quam non*, fiat $MA : MI = AC^2 : IG^2$; hoc est, $1000 : 583\frac{3}{8} = nn : \frac{4667}{8000}nn = 160000 : 93340$, quorum radices sunt quam proxime ut 40 ad $30\frac{1}{2}$. Dico itaque velocitatem initialem, esse ad velocitatem *ad quam non*, valde prope ut 40 ad $30\frac{1}{2}$, seu ut 80 ad 61.

X.

Quod attinet ad tempus descensus, illud ita determinatur. Per §. VIII, $\beta\mathfrak{C}$, seu $dz = \frac{2acvdv}{nnc - 2avv}$, proinde $\frac{dz}{v}$ seu $\iota\mathfrak{C}\beta$

$$= \frac{2acdv}{nnc - 2avv} = \frac{\frac{a}{n}\sqrt{c}\times dv}{n\sqrt{c} + v\sqrt{2a}} + \frac{\frac{a}{n}\sqrt{c}\times dv}{n\sqrt{c} - v\sqrt{2a}} = \frac{\frac{a}{n}\sqrt{2ac}\times dv}{n\sqrt{2ac} + 2av}$$

$$+ \frac{\frac{a}{n}\sqrt{2ac}\times dv}{n\sqrt{2ac} - 2av} = \frac{\frac{1}{2n}\sqrt{2ac}\times 2adv}{n\sqrt{2ac} + 2av} + \frac{\frac{1}{2n}\sqrt{2ac}\times 2adv}{n\sqrt{2ac} - 2av}.$$ Hinc integrando, adhibitis Logarithmis ex Tabulis, $\iota K\beta =$

$$\frac{\frac{1}{2n}\sqrt{2ac}\times l(n\sqrt{2ac} + 2av) - \frac{1}{2n}\sqrt{2ac}\times l(n\sqrt{2ac} - 2av)}{4342945} =$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{2ac}}{2nn}\times l\,\frac{+2av + n\sqrt{2ac}}{-2av + n\sqrt{2ac}}}{4342945}.$$

XI.

Ut autem inveniatur commode tempus descensus per totam KA, quærendus primo est valor ipsius v in puncto A, hoc est $A\gamma$.

Quod

Quod sic facio. Per *Coroll.* 2, §. VII, $AK = \frac{cl(c+2a) - clc}{8685890}$, & per §. VIII, $K\beta = \frac{clc - cl(c-2y)}{8685890}$, ut igitur $K\beta$ fiat æqualis ipsi KA, ponendum est $\frac{clc - cl(c-2y)}{8685890} = \frac{cl(c+2a) - clc}{8685890}$; unde $2lc = l(c-2y) + l(c+2a)$: reducendo Logarithmos ad numeros, habetur $cc = (c-2y) \times (c+2a) = cc + 2ac - 2cy - 4ay$. Hinc $y = \frac{ac}{c+2a} = MI$. Faciendo nunc $MA : MI = AC^2 : IG^2$, seu $a : \frac{ac}{c+2a} = nn : \frac{nnc}{c+2a} = IG^2 = vv$ in puncto $A = (A\gamma)^2$; erit $A\gamma = n\sqrt{\frac{c}{c+2a}}$. Quod si itaque hic valor substituatur pro v, in formula quæ in §. præced. exprimit $tK\beta$, prodibit $tKA = \ldots\ldots$

$$\frac{\sqrt{\frac{ac}{2nn}} \times \text{Log.} \frac{2an\sqrt{\frac{c}{c+2a}} + n\sqrt{2ac}}{-2an\sqrt{\frac{c}{c+2a}} + n\sqrt{2ac}}}{4342945} = \frac{\frac{1}{n}\sqrt{\frac{1}{2}ac} \times \text{Log.} \frac{\sqrt{\frac{4aac}{c+2a}} + \sqrt{2ac}}{-\sqrt{\frac{4aac}{c+2a}} + \sqrt{2ac}}}{4342945}$$

$$= \frac{\frac{1}{n}\sqrt{\frac{1}{2}ac} \times \text{Log.} \frac{\sqrt{2a} + \sqrt{(c+2a)}}{-\sqrt{2a} + \sqrt{(c+2a)}}}{4342945} \ldots\ldots$$

$$= \frac{\frac{1}{n}\sqrt{\frac{1}{2}ac} \times (l(\sqrt{2a} + \sqrt{(c+2a)}) - l(-\sqrt{2a} + \sqrt{(c+2a)}))}{4342945}.$$

Hoc jam comparetur cum tempore per AM in vacuo, quod per §. IV est $= \frac{2a}{n}$, eritque $tAM : tKA = \frac{2a}{n} : \frac{\frac{1}{n}\sqrt{\frac{1}{2}ac} \times (l \&c.}{4342945}$ $= 8685890\sqrt{2a} : \sqrt{c} \times (l(\sqrt{2a} + \sqrt{(c+2a)}) - l(-\sqrt{2a} + \sqrt{(c+2a)}))$. Applicetur hæc analogia ad propositum casum, ubi $a = 1000$ ped., & $c = 4667\,D = \frac{4667}{4}$ ped. $= 1166\frac{3}{4}$ ped.; & habebitur $tAM : tKA = 8685890 \times \sqrt{2000}$:

 $\sqrt{1166}$

$\sqrt{1166\frac{3}{4}} \times (l(\sqrt{2000} + \sqrt{3166\frac{3}{4}}) - l(-\sqrt{2000} + \sqrt{3166\frac{3}{4}})) = 868589 \times \sqrt{800000} : \sqrt{4667} \times (l(\sqrt{2000} + \sqrt{3166\frac{3}{4}}) - l(-\sqrt{2000} + \sqrt{3166\frac{3}{4}})) = 776808096 : \sqrt{4667} \times (l\,101\frac{21}{70} - l\,11\frac{61}{70}) = 776808096 : 9311065 \times \sqrt{4667} = 776808096 : 636074871 = 258936032 : 212024957.$

X I I.

Quia itaque, per *Coroll.* I §. VII, tAM, hoc est, tempus ascensus in vacuo ad 1000 ped. est quam proxime $8\frac{1}{2}$ secundorum; fiat ut 258936032 ad 212024957, ita $8\frac{1}{6}$ ad quartum, qui reperietur $= 6\frac{177920957}{258936032}$, hoc est, quam proxime $6\frac{17}{25}$ secund. pro tempore descensus per KA.

X I I I.

Restat ut determinemus quoque in numeris, pro casu proposito, tempus ascensus in aëre per AK. Hunc in finem, quaeratur, ex Tabulis tangentium, angulus ΔOV [*Fig.* 2] faciendo ut OΔ ad ΔU, seu per § VII, ut c ad $\sqrt{2ac}$, ita sinus totus ad tangentem anguli ΔOU; adeoque, in nostro casu, ut $\frac{4667}{4}$ ad $\sqrt{2333500}$, seu ut 4667 ad 6110 ita 10000000 ad 13070495 tang. ΔOU, qui per consequens erit 52 gr. 38 min. Supposita nunc ARCHIMEDIS ratione diametri ad peripheriam, ut 7 ad 22, unde radius ad quadrantem ut 7 ad 11: Fiat 7 ad 11 = 10000000 : 15714286 = numero partium quadrantis, quarum radius continet 10000000. Fiat porro $90 : 52\frac{38}{60} = 15714286 : 9189947\frac{7}{27}$ = numero partium arcus 52 gr. 38 min. pro radio = 10000000. Nunc tandem fiat ΔU.$\Delta\xi$ [= DV : DX] = $13070495 : 9189947\frac{7}{27}$ = tAM [$8\frac{1}{6}$ secund.] : tAK ascensus in aëre, quod tempus erit $= 5\frac{3}{4}$ secund. quam proxime. Ergo ambo tempora ascensus & descensus in aëre simul sumta $= 5\frac{1}{4} + 6\frac{17}{25} = 12\frac{83}{100}$ sec. Quia autem in vacuo tempus ascensus & descensus simul esset $= 16\frac{1}{3}$

sec.,

sec., patet resistentiam aëris facere ut recidat globus noster $3\frac{67}{100}$ sec. citius quam recideret, si aër nihil resisteret.

XIV.

Mutata jam a successive, sumendo eam modo majorem, modo minorem, poterit per eandem methodum, inveniri tempus in aëre resistente, tam pro ascensu quam pro descensu, pro unaquaque a, adeoque etiam tempus totius curvæ, quam mobile grave ascendendo & descendendo insumit. Quæ omnia si in Tabellam conjiciantur, poterit eam consulendo, ex observato tempore, quo globus explosus in Terram recidit, determinari non tantum quousque ascenderit, sed etiam quantum temporis pro ascensu, quantum item pro descensu insumserit: quod olim ab aliquo desiderabatur.

SCHOLIUM.

Hæc ita determinantur, intelligendo medium esse rarum & elasticum in quo globus movetur: quale medium aërem esse, & uniformiter se ita habere in omnes partes, supposuimus in præcedentibus. Quod si autem nunc supponere lubet, medium in quo movetur globus non esse elasticum, sed compositum esse ex particulis, quæ ad allapsum non resiliant; atque oporteat invenire, in hoc casu, omnia quæ pro priori sunt in præcedentibus inventa.

LEMMA I.

Si Corpus cylindricum vel prismaticum M *qualecunque moveatur basi alterutra antrorsum versa, velocitate V; quod occurrat, in directione perpendiculari ad basin, particulis vel globulis quiescentibus* m, m, m, *quarum omnium simul sumtarum massa vocetur m. Quæritur velocitas, tam corporis cylindrici vel prismatici* M, *quam particularum* m, m, m, *post factum impulsum?* TAB. LXXXVIII. N°. CLXXXII. *Fig. 1.*

SOLUTIO.

Ex Regulis communicationis motus patet, velocitatem corporis M, & particularum, m, m, m, post impulsum esse $= \frac{MV}{M+m}$.

COROLLARIUM I.

Decrementum velocitatis corporis $M = V - \frac{MV}{M+m} = \frac{mV}{M+m}$.

COROLLARIUM II.

In casu quo m infinities minus quam M; erit decrementum velocitatis $= \frac{mV}{M}$.

LEMMA II.

TAB. LXXXVIII N°. CLXXXII Fig. 1.

Sit nunc fluidum vel medium non elasticum, compositum ex moleculis per totam longitudinem AB *æqualibus intervallulis disseminatis; in quo moveatur corpus cylindricum* M, *secundum directionem perpendicularem ad basin in* AB.

Sit C longitudo cylindri hujus fluidi, qui contineat quantitatem materiæ æqualem ipsi corpori cylindrico M, cujus longitudo sit L; adeo ut densitas fluidi sit ad densitatem corporis cylindrici M, ut L ad C. Unde si $C \times m$ exprimat cylindrum fluidi æquale corpori cylindrico M, atque si Nn sit intervallulum, quo strata particularum fluidi a se invicem distant, exprimet $\mathrm{Nn} \times m$ massulam unius strati particularum, quibus corpus cylindricum M una vice occurrit. Quando itaque corpus cylindricum M [a cujus gravitate abstrahitur] pervenerit in N, ubi velocitas residua sit EN; erit decrementum velocitatis ET $= \frac{mV}{M} = \frac{\mathrm{Nn} \times m \times V}{M} = \frac{\mathrm{Nn} \times \mathrm{EN} \times m}{M}$. Quia autem ET : Te

[Nn]

[Nn] = EN: subtangentem curvæ velocitatum CEF; habetur subtangens $= \frac{EN \times Nn}{ET} = \frac{EN \times Nn \times M}{Nn \times EN \times m} = \frac{M}{m}$. Hinc patet scalam, seu curvam velocitatum CEF, in hoc casu, esse Logarithmicam, cujus subtangens $= \frac{M}{m} =$ [ob $C \times m = M$] $\frac{C \times m}{m} = C$.

LEMMA III.

Invenire rationem resistentiæ plani in fluido moti, in directione perpendiculari ad planum, ad resistentiam superficiei alicujus conoïdicæ, ejusdem cum plano amplitudinis, & in eodem fluido motæ, secundum directionem axis perpendicularis ad planum, & eadem velocitate.

Sit DO curva aliqua, ex cujus revolutione circa axem DP, generetur superficies conoïdica, quam tangat in vertice D planum DF, in quod allabatur fluidum, secundum directionem ad planum perpendicularem, & parallelam axi DP. Vocetur R resistentia absoluta, quam planum a fluido allabente patitur. Sint duæ applicatæ proximæ OP, op, super DP; & aliæ OF, of, super DF; voceturque DF, vel PO $= x$, adeoque Ff, vel Oq $= dx$; & elementum curvæ Oo $= ds$. Erit vis resistentiæ super Ff $= R dx$. Est vero hæc vis [per decompositionem virium] ad vim qua filum fluidi OF agit normaliter super Oo, ut Oo ad Oq, seu ut ds ad dx; adeoque vis qua premitur normaliter elementum Oo $= \frac{R dx^2}{ds}$. Resolvatur hæc porro in duas laterales, quarum una perpendicularis ad axem, altera eidem parallela; fiatque iterum ut ds ad dx, ita $\frac{R dx^2}{ds}$ ad $\frac{R dx^3}{ds^2}$; erit hæc vis, qua urgetur elementum Oo, a filo allabente fO, secundum eandem directionem parallelam axi DP. Quia autem annulus a revolutione elementi Ff circa axem DP genitus, est ad zonulam eadem revolutione elementi Oo descriptam,

TAB. LXXXVIII. N°. CLXXXII. Fig. 4.

criptam, ut xdx ad xds, & cum resistentia super annulum sit ad resistentiam super zonulam, ut resistentia super Ff ad resistentiam super Oo; faciendum est $Rdx : \frac{Rdx^3}{ds^2} = Rxdx . \frac{Rxdx^3}{ds^2}$; adeoque integrando $\frac{1}{2} Rxx : R\int \frac{xdx^3}{ds^2} = xx : 2\int \frac{xdx^3}{ds^2}$, dabit rationem resistentiæ super circulum cujus radius DF, ad resistentiam super superficiem conoïdicam, ab arcu DO revolvendo descriptam.

Corollarium I.

Si DO est circulus, cujus radius $= a$, Conoïde hoc casu existente Sphæra; erit sumta DP, vel $x = a$, $2\int \frac{xdx^3}{ds^2} = 2 \times \frac{\frac{1}{2}aax^2 - \frac{1}{4}x^4}{aa} = xx - \frac{x^4}{2aa} = \frac{1}{2}aa$; adeoque, in hoc exemplo, resistentia in planum ad resistentiam in Sphæram, hoc est xx seu $aa : \frac{1}{2}aa = 2 : 1$; Unde patet veritas Propositionis 34, Lib. II, Newt. *Princip. Philos. Nat.* pag. 298, Edit. secundæ; quæ ita sonat. *Si globus & cylindrus æqualibus diametris descripti, in medio raro ex particulis æqualibus & ad æquales ab invicem distantias libere dispositis constante, secundum plagam axis cylindri, æquali cum velocitate moveantur, erit resistentia globi duplo minor quam resistentia cylindri.*

Corollarium II.

TAB. LXXXVIII. N°. CLXXXII. *Fig.* 1. Hinc quoque evidens, curvam velocitatum CEF pro globo esse Logarithmicam, cujus subtangens erit dupla subtangentis Logarithmicæ, quæ inservit pro cylindro, adeoque illa $= 2C$, quia hæc $= C$, per *Lem. II.* Nam generalissime sumtis, tam velocitatibus, quam decrementis velocitatum æqualibus duorum corporum, in eodem vel diversis fluidis motorum, quibus resistitur in ratione f ad φ, erit, vocando spatiola percursa dz & dy, dum æqualia patiuntur decrementa in velocitatibus v, æquali-

æqualibus, $\frac{fdz}{v} = dv = \frac{\Phi dy}{v}$; adeoque $dz : dy = \Phi : f =$ [in hoc exemplo] $2 : 1$, unde $dz = 2dy$. Eſt vero $dv : dz$ [$2dy$] $= v :$ ſubtangentem [$\frac{2vdy}{dv}$] in una curva velocitatum, & $dv : dy = v :$ ſubtangentem [$\frac{vdy}{dv}$] in altera. Quare conſtat propoſitum.

LEMMA IV.

Ut nunc inveniatur longitudo viæ, quam Sphæra percurrere debet in medio non elaſtico, ita ut velocitas reſidua ſit ad velocitatem initialem, ut 1 ad n; Quæratur id primo generaliter pro quolibet corpore conoïdico?

Illud ſic peragitur: Quia reſiſtentia in planum, eſt ad reſiſtentiam in ſuperficiem conoïdicam ejuſdem cum plano amplitudinis, ut xx ad $2\int\frac{xdx^3}{ds^2}$; erit, per ea quæ in *Coroll.* præced. dicta ſunt, $2\int\frac{xdx^3}{ds^2} : xx =$ ſubtangens curvæ velocitatum pro cylindro, quæ eſt C, per *Lemma* II, ad ſubtangentem curvæ velocitatum pro Conoïde, quæ adeo erit $= \frac{Cxx}{2\int\frac{xdx^3}{ds^2}}$. Fiat itaque ut ſubtangens Tabularum, quæ eſt 4342945, ad $\frac{Cxx}{2\int\frac{xdx^3}{ds^2}}$, ita ln, ſeu Logarithmus ipſius n ex Tabulis ſumtus, ad quartum $\frac{Cxxln}{8685890\int\frac{xdx^3}{ds^2}}$ quod erit æquale ſpatio quæſito AB. Ex quo patet, hoc AB eſſe duplum ejus quod in *Diſſertatione mea de Motu* inventum eſt, & ſupra in §. V adhibitum pro Conoïde in medio elaſtico progrediente; adeoque pro globo in medio non elaſtico erit jam $AB = \frac{2Cln}{4342945}$.

 His

His ita præmissis, omnia quæ in sequentibus paragraphis determinata sunt pro medio elastico, mutatis mutandis, facile accommodantur ad medium non elasticum. Hunc in finem percurram omnes eodem, ut ibi sunt, ordine paragraphos.

(V I.)

Valor ipsius C manet hic pro globo ferreo, nempe $= 4667 D$; sed AB $= \frac{2 C l n}{4342945} = \frac{9334 D l n}{4342945}$. Hinc longitudo viæ quam percurrere debet globus ferreus, ita ut dimidium velocitatis suæ initialis amittat, erit $= 6470\ D$: sed pro globo plumbeo invenietur $7400\ D$.

(V I I.)

Quia, per *Lemma* IV, AB in medio non elastico, inventa est dupla ipsius AB in medio elastico; liquet ex operatione in hoc paragrapho instituta, fore c, seu subtangentem curvæ CEF, etiam duplam subtangentis illius curvæ, in casu medii elastici, adeoque jam $c = 9334\ D$. Ergo in determinationibus reliquis, ubicunque reperitur c, scribendum est ejus duplum. Et sic habebitur t LK $= \int \frac{18668\ a D d v}{9334 nn D + 2 a v v}$. Ad hujus constructionem, sit descriptus quadrans circuli DXY, cujus radius OD $= n \sqrt{\frac{9334 D}{2 a}}$; & reliqua fiant ut in §. VII præscriptum; unde determinabitur t AK.

TAB. LXXXVII N°. CLXXXII. *Fig.* 2.

(V I I I.)

Cum itaque $n : \sqrt{a} =$ GI : $\sqrt{}$ IM; erit OD, seu $n \sqrt{\frac{9334 D}{2a}}, =$ GI $\sqrt{\frac{9334 D}{2 \mathrm{IM}}} =$ GI $\sqrt{\frac{4667 D}{\mathrm{IM}}} =$ [sumta IM $= 15 \frac{1}{12}$ ped. quam grave in vacuo cadens uno secundo emetitur, & substituto pro D ejus valore $= \frac{1}{4}$ ped.] GI $\sqrt{\frac{4667}{60 \frac{1}{3}}} =$

GI $\sqrt{}$

$GI\sqrt{\frac{14001}{181}} = GI \times \frac{1592}{181}$. Fiat itaque ut radius ad quadrantem, hoc eſt, $7 : 11 = \frac{1592}{181} \times GI$ ſeu $OD : DXY$; habebitur $DXY = \frac{17512}{1267} \times GI = tAK$, in caſu quo n, ſeu velocitas exploſionis eſt infinita. Quia itaque $GI : DXY = tIM : tAK$, faciendum eſt $GI : \frac{17512}{1267} \times GI\ [= 1267 : 17512] = 1$ ſec. $13\frac{5}{6}$ ſec. Ergo in aëre non elaſtico, globus ferreus noſter, exploſus velocitate infinita, impenderet in totum aſcenſum $13\frac{5}{6}$ ſecunda. Sed in aëre elaſtico [ſimili operatione obſervata] inveniretur pro tempore totius aſcenſus tantum $9\frac{4}{5}$ ſecund.

COROLLARIUM I.

Quia, per *Lemma* IV, globus ſine gravitate duplum ſpatium percurrit, in medio non elaſtico, ejus quod percurrit in medio elaſtico, ad eandem jacturam velocitatis initialis faciendam; & cum globus noſter ferreus [per *Coroll.* 1. §. VIII ſuper.] indigeat $4\frac{3}{4}$ ſecund. ad id ut velocitas reſidua ſit redacta ad dimidium velocitatis initialis in aëre elaſtico; indigebit idem ille globus $9\frac{1}{2}$ ſecund. in aëre non elaſtico, ad amittendum dimidium velocitatis initialis.

COROLLARIUM II.

Ad inveniendam totam altitudinem AK, ad quam aſcendere poteſt globus noſter ferreus, in aëre non elaſtico; ſumamus ejus valorem, in hoc *Corollario* §. VIII datum $\frac{cl(c+2a) - clc}{8685890}$, qui, in hoc caſu quo $c = 9334\,D$, eſt $= \frac{9334\,Dl(9334\,D + 2000) - 9334\,Dl\,9334\,D}{8685890}$ $=$ [ſuppoſito $D = \frac{1}{4}$ ped.] $\frac{2333\frac{1}{2}\,l\,4333\frac{1}{2} - 2333\frac{1}{2}\,l\,2333\frac{1}{2}}{8685890}$ $= \frac{2333\frac{1}{2} \times 2688310}{8685890} = \frac{4667 \times 2688310}{17371780} = \frac{1254634277}{1737178} = 722\frac{1}{4}$

Hhh 2 ped.

ped. Parif. quam proxime. Hinc apparet globum noſtrum $277\frac{1}{4}$ ped. infra totam altitudinem mille pedum aſcendere.

(IX.)

Pro determinando deſcenſu, habetur hic iterum $dz = \frac{2acvdv}{nnc - 2avv} = \frac{cdy}{c - 2y} = \frac{clc - cl(c - 2y)}{8685890} = K\beta$. Sed recordandum pro c ſumendum eſſe duplum, nempe $= 9334\,D = 2333\frac{1}{2}$ ped. Parif.

COROLLARIUM I.

Exiſtente $MI = MA$, hoc eſt ſi $y = a$, habetur $K\beta = \frac{clc - cl(c - 2a)}{8685890}$, ad id ut velocitas acquiſita recidendo, fiat æqualis velocitati initiali. In noſtro exemplo, ubi $c = 2333\frac{1}{2}$ ped. erit $\frac{clc - cl(c - 2a)}{8685890} = \frac{2333\frac{1}{2}l2333\frac{1}{2} - 2333\frac{1}{2}\,l\,333\frac{1}{2}}{8685890} = 2270$ proxime. Ergo $K\beta$ ſumenda eſt $= 2270$ ped. Hoc eſt, ſi globus infra A ceciderit 2270 ped. — $964\frac{1}{2}$ ped., vel $1305\frac{1}{2}$ ped., recuperaverit tunc ſuam velocitatem initialem.

COROLLARIUM II.

Pro maxima velocitate, quam nunquam decidendo attingit, ſed tamen data quavis propius accedit; ponendum eſt iterum $2y = c = 9334\,D = \frac{9334}{4}$ ped., adeoque $y = \frac{9334}{4}$ ped. $= 1166\frac{3}{4}$ ped. Hoc eſt, MI ſumenda eſt dupla in aëre non elaſtico, ejus quæ inventa eſt pro elaſtico.

COROLLARIUM III.

Ipſa velocitas maxima *ad quam non* habetur, faciendo $MA : MI = AC^2 : IG^2$, hoc eſt $1000 : 1166\frac{3}{4} = nn : \frac{4667}{4000}\,nn =$

40000:

40000 : 46670, quorum radices sunt quam proxime ut 200 ad 216, seu ut 25 ad 27. Dico itaque velocitatem initialem esse ad velocitatem *ad quam non*, valde prope ut 25 ad 27.

(X.)

Tempus descensus ita determinatur: Supra in §. hujus numeri, inventum est $t\mathrm{K}\beta = \dfrac{\sqrt{\frac{ac}{2nn}} \times \log. \frac{2av + n\sqrt{2ac}}{-2av + n\sqrt{2ac}}}{4342945}$. Quod & hic valet, considerando c ut duplum.

(XI.)

Tempus descensus per totam KA habetur ex §. hujus numeri. $t\mathrm{AM} : t\mathrm{KA} = 8685890\sqrt{2a} : \sqrt{c} \times (l\sqrt{2a} + \sqrt{(c+2a)} - l(-\sqrt{2a} + \sqrt{(c+2a)}))$. Applicetur hoc ad præsentem casum, ubi $a = 1000$ ped. & $c = 2333\frac{1}{3}$ ped., & habebitur $t\mathrm{AM} : t\mathrm{KA} = 8685890 \times \sqrt{2000} : \sqrt{2333\frac{1}{3}} \times (l\sqrt{(2000} + \sqrt{4333\frac{1}{3}}) - l(-\sqrt{2000} + \sqrt{4333\frac{1}{3}})) = 8685890 \times \sqrt{4000000} : \sqrt{46670} \times (l\sqrt{(2000} + \sqrt{4333\frac{1}{3}}) - l(-\sqrt{2000} + 4333\frac{1}{3})) = 1737178000 : 216\frac{1}{30} \times (l110\frac{1}{5} - l21\frac{1}{10}) :: 1737178000 : 1554300856 = 217147250 : 194287607$.

(XII.)

Quia itaque $t\mathrm{AM}$, hoc est tempus ascensus, in vacuo, ad 1000 ped. est $8\frac{1}{6}$ secund. proxime; Fiat, ut 217147250 ad 194287607, ita $8\frac{1}{6}$ ad quartum, qui reperietur $= 7\frac{66651374}{217147250}$, hoc est $7\frac{2}{7}$ proxime; adeoque globus noster, in aëre non elastico, impendit in descensum $7\frac{2}{7}$ secunda quam proxime.

(XIII.)

Determinandum nunc restat tempus ascensus, in aëre non

 elastico.

elastico. Per methodum in §. hujus numeri, faciendum est ut c ad $\sqrt{2ac}$, ita sinus totus ad tangentem anguli ΔOU. Adeoque in hoc casu ut $\frac{9334}{4}$ ad $\sqrt{4667000}$, seu ut 4667 ad 4321, ita 10000000 ad 9258624 = tang. ΔOU; qui angulus ergo erit 42 gr. 48 minuta. Fiat nunc ut radius ad quadrantem, seu ut 7 ad 11, ita 10000000 ad 15714286 = numero partium quadrantis, quarum radius continet 10000000. Fiat porro 90 : $42\frac{48}{60}$ = 15714286 : 7473016 = numero partium arcus 42 gr. 48 minut. pro radio 10000000. Nunc tandem fiat ΔU : $\Delta\xi$ [= DV : DX] = 9258624 : 7473016 = tAM ($8\frac{1}{6}$ sec.) : tAK, tempus ascensus in aëre non elastico, quod tempus erit = $6\frac{1}{7}$ secund. quam proxime. Ergo ambo tempora ascensus & descensus, in aëre non elastico, simul sumta = $6\frac{1}{7} + 7\frac{2}{7} = 13\frac{21}{35}$ sec. Unde patet, globum nostrum, in aëre non elastico, morari circiter uno secundo diutius quam in aëre elastico.

TAB. LXXXVIII. N°. CLXXXII. *Fig. 2.*

N°. CLXXXIII.

DE

OSCILLATIONIBUS PENDULI

In medio quod resistit in ratione simplici velocitatis.

PROBLEMA.

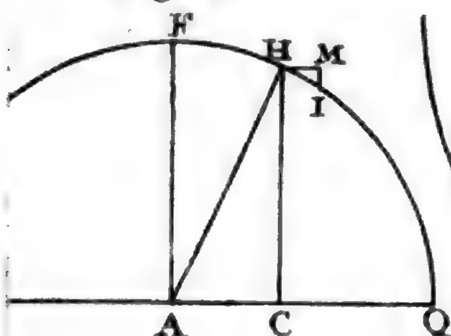
GRave a quocunque dato puncto in Cycloïde inversa descendens, & resistentiam patiens proportionalem simplici velocitati, quæritur quousque ab altera parte in eadem Cycloïde ascendere possit?

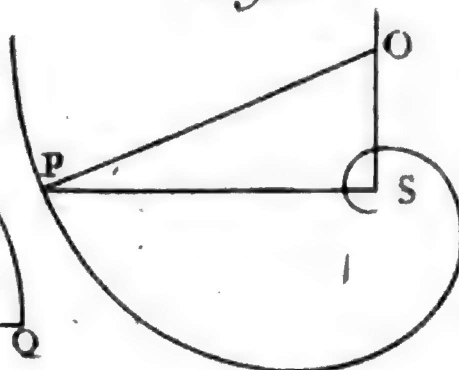
SOLUTIO.

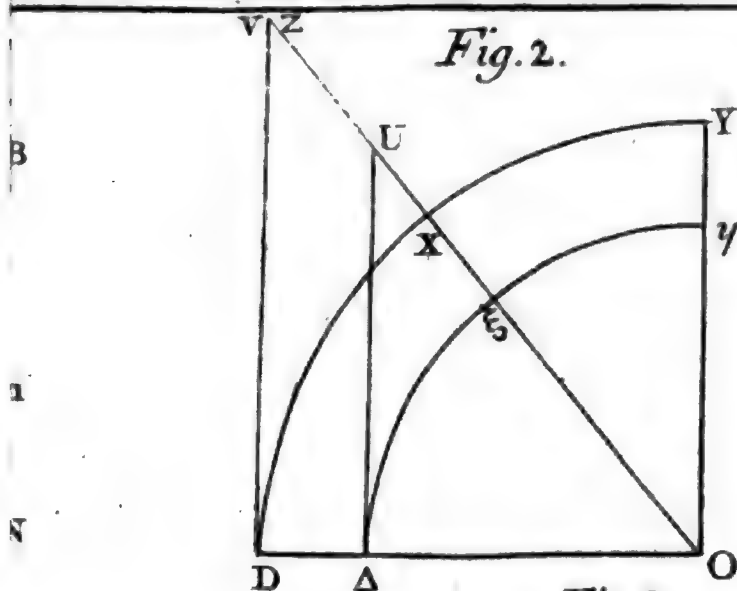
TAB. LXXXIX. N°. CLXXXIII.

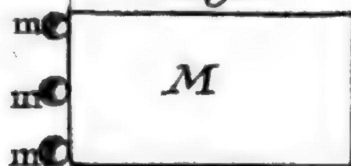
Sit Cycloïs in rectam lineam AB extensa, cujus punctum medium C, repræsentet punctum infimum Cycloïdis. Sit initium descen-

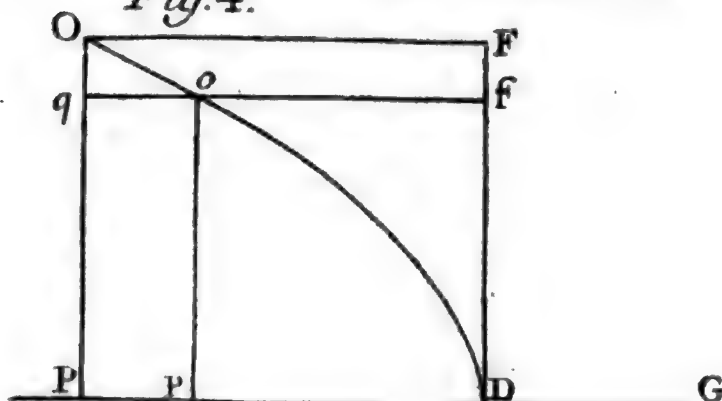
N.° CLXXXI.


Fig. 2.
F
H
M
I
A
C
Q


Fig. 3.
O
P
S


Fig. 2.
V
Z
U
Y
X
y
D
Δ
O


Fig. 3.
m
m
m
M


Fig. 4.
O
F
q
o
f
P
p
D
G

descensus in E, & finis ascensus in F: concipiatur curva EHDF, cujus applicatæ GH, CD &c. designent velocitates acquisitas, in punctis G, C, &c. Dicantur $CE = \alpha$, $CF = \beta$; abscissa quælibet $CG = s$, $GH = v$; vis a gravitate oriunda, quæ proportionalis est distantiæ CG, etiam dicatur $= s$, resistentia $= gv$. Quibus positis, patet naturam curvæ hac æquatione $sds - gvds + vdv = 0$ exprimi.

Ad separationem instituendam, ponatur $v = zs$, & $dv = zds + sdz$, & mutabitur æquatio in hanc $\frac{ds}{s} + \frac{zdz}{zz - gz + 1} = 0$ aut integrando $ls + \int \frac{zdz}{zz - gz + 1} =$ const. Est vero $\frac{zdz}{zz - gz + 1}$ $= \frac{(z - \frac{1}{2}g)dz}{zz - gz + 1} + \frac{\frac{1}{2}gdz}{zz - gz + 1}$; & $\int \frac{(z - \frac{1}{2}g)dz}{zz - gz + 1} = \frac{1}{2}l(zz - gz + 1)$: Restat igitur integranda $\frac{\frac{1}{2}gdz}{zz - gz + 1}$. Hunc in finem, ponatur $z = t + \frac{1}{2}g$, erit $\frac{\frac{1}{2}gdz}{zz - gz + 1} = \frac{\frac{1}{2}gdt}{tt + 1 - \frac{1}{4}gg} = \frac{2gdt}{4tt + 4 - gg}$

$$= \frac{\frac{2g}{4 - gg}dt}{1 + \frac{4}{4 - gg}tt}.$$

Descripto itaque arcu circuli, cujus radius $= 1$, & tangens $= \frac{2t}{\sqrt{(4 - gg)}}$, qui arcus dicatur A; erit $\frac{g}{\sqrt{(4 - gg)}}A = \int \frac{\frac{1}{2}gdz}{zz - gz + 1}$; cui addatur $\frac{1}{2}l(zz - gz + 1)$ $=$ [substituto pro z ejus valore $\frac{v}{s}$) $\frac{1}{2}l(\frac{vv}{ss} - \frac{gv}{s} + 1) =$ $\frac{1}{2}l(vv - gsv + ss) - ls$, cui porro addatur ls; habebitur $\frac{g}{\sqrt{(4 - gg)}}A + \frac{1}{2}l(vv - gsv + ss) =$ const. pro æquatione integrata propositæ $sds - gvds + vdv = 0$. Quia autem tangens arcus $A = \frac{2t}{\sqrt{(4 - gg)}} = \frac{2z - g}{\sqrt{(4 - gg)}} = \frac{2v - gs}{s\sqrt{(4 - gg)}}$ $= (\frac{2v}{s} - g) \times \frac{1}{\sqrt{(4 - gg)}}$, addo [pro rectificanda æquatione integra-

integrata] $\frac{g}{\sqrt{(4-gg)}} B$; intelligo autem per B, arcum cujus tangens $= \frac{g}{\sqrt{(4-gg)}}$, & simul subtraho $l\alpha$: hoc nempe modo fiet, ut vera æquatio integrata sit $\frac{g}{\sqrt{(4-gg)}} \times (A+B) + \frac{1}{2}l(vv - gsv + ss) - l\alpha = 0$; quia in casu quo G cadit in E, id est quo $v=0$, tota evanescit. Hinc quia in puncto C, ubi $s=0$, tangens arcus A est infinita, erit arcus ipse $A=$ quadranti circuli; qui vocetur Q & habebitur $\frac{g}{\sqrt{(4-gg)}} \times (+Q+B) + lv - l\alpha = 0$; adeoque in puncto C, erit $lv = l\alpha - \frac{g}{\sqrt{(4-gg)}} \times (+Q+B)$. Simili modo invenitur, mutatis mutandis, pro ascensu, $lv = l\beta + \frac{g}{\sqrt{(4-gg)}} \times (+Q-B)$. Quoniam autem ultima velocitas descensus = primæ velocitati ascensus, erit $l\alpha - \frac{g}{\sqrt{(4-gg)}} \times (+Q+B) = l\beta + \frac{g}{\sqrt{(4-gg)}} \times (+Q-B)$, & facta reductione $l\beta = l\alpha - \frac{g}{\sqrt{(4-gg)}} \times 2Q$, vel $= l\alpha - \frac{2g}{\sqrt{4-gg}} \times Q$; adeoque $l\alpha - l\beta$, seu $l\frac{\alpha}{\beta} = \frac{2gQ}{\sqrt{(4-gg)}}$.

COROLLARIUM I.

Velocitas in puncto infimo $C = \frac{\alpha}{n^{g(Q+B):\sqrt{(4-gg)}}}$; ponendo scilicet n, pro numero cui respondet unitas pro Logarithmo.

COROLLARIUM II.

Ex æquatione ipsa $sds - gvds + vdv = 0$, habetur supponendo $dv = 0$, velocitas maxima $= \frac{s}{g}$.

COROL-

COROLLARIUM III.

Hinc in æquatione generali inventa $\frac{g}{\sqrt{(4-gg)}} \times (A+B) + \frac{1}{2} l(vv - gsv + ss) - l\alpha = 0$; ponatur $\frac{s}{g}$ pro v, & mutabitur illa in hanc $\frac{g}{\sqrt{(4-gg)}} \times (A+B) + \frac{1}{2} l(\frac{ss}{gg} - ss + ss) - l\alpha = \frac{g}{\sqrt{(4-gg)}} \times (A+B) + l\,\frac{s}{g} - l\alpha = \frac{g}{\sqrt{(4-gg)}} \times (A+B) + ls - lg - l\alpha = 0$; unde $ls = lg\alpha - \frac{g}{\sqrt{(4-gg)}} \times (A+B)$ & $s = \frac{g\alpha}{n^{g(A+B):\sqrt{(4-gg)}}}$.

Quia vero, in casu maximæ velocitatis, arcus A pro tangente habet $(\frac{2}{g} - g) \times \frac{1}{\sqrt{(4-gg)}} = \frac{2-gg}{g\sqrt{(4-gg)}}$, vocetur hic arcus C, & prodibit s, seu CG, cui maxima velocitas GH respondet, $= \frac{g\alpha}{n^{g(C+B):\sqrt{(4-gg)}}}$. Ergo ipsa velocitas maxima GH, seu $\frac{s}{g} = \frac{\alpha}{n^{g(C+B):\sqrt{(4-gg)}}}$. Unde maxima velocitas GH, ad ultimam velocitatem CD $= \frac{\alpha}{n^{g(C+B):\sqrt{(4-gg)}}} : \frac{\alpha}{n^{g(Q+B):\sqrt{(4-gg)}}} = \frac{1}{n^{gC:\sqrt{(4-gg)}}} : \frac{1}{n^{gQ:\sqrt{(4-gg)}}} = 1 : \frac{1}{n^{g(Q-C):\sqrt{(4-gg)}}}$. Ex quo fluit, illas duas velocitates habere constantem rationem, ubicunque descensus initium sumat; quod quidem aliunde jam patet; scilicet ex similitudine omnium curvarum EHDF.

N°. CLXXXIV.

DE CORPORIS GRAVIS ASCENSU ET DESCENSU PER ARCUS ÆQUALES IN MEDIO RESISTENTE.

PROBLEMA.

TAB. LXXXIX. N°. CLXXXIV *Fig. 1.*

AD axem verticalem AO *construere curvam* AFL, *ejus natura, ut mobile sua gravitate descendens per arcum quemvis* AK *curva data* ABKR, *ad punctum imum* A *impetu concepto, ascendat per arcum* AL *aequalem semper arcui* AK; *idque in medio resistente secundum quadrata velocitatum.*

LEMMA.

Existente n = numero unitatis, seu $ln = 1$, erit $d(n^{fq:b}) = \frac{f}{b} n^{fq:b} dq$.

Patet ex calculo exponentialium.

SOLUTIO.

Fingamus mobile perveniſſe ad B delapsum ex K, & postea aſcendens ab A pervenire ad F, iturum ad L uſque; ita ut tam AK ſit æqualis AL, quam AB æqualis AF. Sit itaque AK $= AL = a$, $AO = b$, $AS = c$, invariabiles pro quolibet deſcenſu & aſcenſu, ſed variabiles pro mutatione initii & finis. Sit porro $AB = AF = s$, $BC = FG = ds$; $AM = x$, $MN = BP = dx$, $AD = z$, $DE = FH = dz$: velocitas in $B = v$, velocitas in $F = V$; vis gravitatis naturalis $= g$, vis reſiſtentiæ in $B = \frac{vv}{2c}$, vis reſiſtentiæ in $F = \frac{VV}{2c}$. Erit

æquatio

æquatio pro descensu $2gdx - \frac{vvds}{e} = - 2vdv$, & pro ascensu $2gdz + \frac{VVds}{e} = - 2VdV$; quæ ita disponantur $2vdv - \frac{vvds}{e} = - 2gdx$, & $2VdV + \frac{VVds}{e} = - 2gdz$. Ut autem harum duarum æquationum partes priores, litteras v & V quæ velocitates significant continentes, integrare possimus, easque adeo terminis finitis exprimere, multiplicemus priorem æquationem per $\frac{1}{n^{s:e}}$ & alteram per $n^{s:e}$; prodibunt hæ duæ integrabiles $\frac{2vdv - \frac{vvds}{e}}{n^{s:e}} = \frac{-2gdx}{n^{s:e}}$, & $2n^{s:e}VdV + \frac{1}{e}n^{s:e} VVds = - 2gn^{s:e}dz$; sumtis enim integralibus, emergent $\frac{vv}{n^{s:e}} = - 2g\int\frac{dx}{n^{s:e}}$ & $n^{s:e}VV = - 2g\int n^{s:e}dz$; cujus veritas exploratur per Lemma præmissum. Sed ut vv & VV evanescant in punctis K & L, addendæ sunt ad valores inventos debitæ quantitates constantes, hunc in modum $\frac{vv}{n^{s:e}} = 2g\int\frac{db}{n^{a:e}} - 2g\int\frac{dx}{n^{s:e}}$, & $n^{s:e}VV = 2g\int n^{a:e}dc - 2g\int n^{s:e}dz$; ubi per $\int\frac{db}{n^{a:e}}$ & $\int n^{a:e}dc$, intelligo functiones constantes eodem modo compositas ex AK, AO, & ex AL, AS, ut sunt variabiles $\int\frac{dx}{n^{s:e}}$ & $\int n^{s:e}dz$ compositæ ex AB, AM & ex AF, AD. Quia vero in puncto infimo A est $s = 0$, ideoque $n^{s:e} = 1$; ipsæque functiones $\int\frac{dx}{n^{s:e}}$ & $\int n^{s:e}dz$ evanescunt; atque v evadit $= V$; erit $2g\int\frac{db}{n^{a:e}} = 2g\int n^{a:e}dc$. Hoc ve-

ro cum contingat pro quolibet puncto initiali K & finali L; licebit jam considerare a, b, & c tanquam variabiles; unde habebimus differentiando $\frac{db}{n^{a:e}} = n^{a:e}\,dc$; proinde $dc = \frac{db}{n^{2a:e}}$, seu $ldc = ldb - \frac{1}{e} \times 2a$. Reponantur nunc pro litteris a, b & c, pristinæ assumtæ s, x & z, habebimus $ldz = ldx - \frac{1}{e} \times 2s$; id quod naturam curvæ quæsitæ AFL determinat ex data curva AK. Ex his habetur constructio curvæ quæsitæ AFL: Quia enim $dc = \frac{db}{n^{2a:e}}$, hoc est, $dz = \frac{dx}{n^{2s:e}}$, erit $\sqrt{(FG^2 - FH^2)} = HG = dv = \sqrt{(ds^2 - dz^2)} = \sqrt{(ds^2 - \frac{dx^2}{n^{4s:e}})}$. Atqui, ob datam curvam ABKR, datur dx per ds: sit itaque $dx = S\,ds$; Unde $dz = \frac{S\,ds}{n^{2s:e}}$, & $dy = ds\sqrt{(1 - \frac{SS}{n^{4s:e}})}$, ipsæque adeo coordinatæ $AD = z = \int \frac{S\,ds}{n^{2s:e}}$ & $DF = y = \int ds \sqrt{(1 - \frac{SS}{n^{4s:e}})}$.

Sed facile construitur $n^{2s:e}$ ejusque quadratum $n^{4s:e}$, sumendo tantum in Logarithmica communi [cujus nempe subtangens $= 1$] applicatam, quæ distat a prima applicata, sive ab unitate, intervallo $= 2s : e$, erit enim illa $= n^{2s:e}$, & altera applicata quæ distat duplo intervallo $= 4s : e$, erit $n^{4s:e}$. Hinc formando super communi axe $\alpha\beta$, in quo abscissa $\alpha\gamma$ capiatur $= s$, duas curvas $\alpha\delta$ & $\alpha\varepsilon$, quarum unius $\alpha\delta$ applicata $\gamma\delta$ sit $= \int \frac{S\,ds}{n^{2s:e}}$, & alterius $\alpha\varepsilon$ applicata $\gamma\varepsilon$, sit $= \int ds\sqrt{(1 - \frac{SS}{n^{4s:e}})}$. Dico, $\gamma\delta$ & $\gamma\varepsilon$ dare coordinatas curvæ quæsitæ.

TAB. LXXXIX. N°. CLXXXIV. Fig. 2.

SCHO-

SCHOLIUM I.

In casibus particularibus constructio sæpe facilior redditur. Sic si Linea data ACK sit ipsa recta verticalis ANO; æquatio generalis supra inventa $ldz = ldx - \frac{2s}{e}$, abit in hanc $ldz = ldx - \frac{2x}{e}$, quæ differentiata, sumendo dz pro constante, dat $0 = \frac{ddx}{dx} - \frac{2dx}{e}$; quo multiplicato per $\frac{dz}{dx}$, erit $\frac{dzddx}{dx^2} = \frac{2dz}{e}$ atque integrando $\frac{a}{e} - \frac{dz}{dx} = \frac{2z}{e}$; unde $adx - edz = 2zdx$; hoc est, $dx = \frac{edz}{a - 2z} = \frac{\frac{1}{2}edz}{\frac{1}{2}a - z} =$ [ponendo $\frac{1}{2}a - z = t$] $\frac{-\frac{1}{2}edt}{t}$, adeoque $x = -\frac{1}{2}alt$; ex quo patet x, seu arcum AF, esse proportionalem Logarithmo negativo abscissæ TD, faciendo $AT = \frac{1}{2}a$. Hæc autem proprietas convenit Tractoriæ *Hugeniana*; quæ suam convexitatem habet versus superiora, estque recta transiens per T & applicatis parallela, Tractoriæ asymtotos. Nam $dt : dx = t : \frac{1}{2}e =$ tangenti constanti.

SCHOLIUM II.

Ope *Lemmatis* hisce præmissi, solvi potest Problema a Fratre meo propositum [vid. *Act. Lips.* 1697, p. 115*] sine assumtione novarum indeterminatarum. Separandæ nimirum proponantur indeterminatæ hujus æquationis $ady = ypdx + by^n qdx$ [ubi a & b quantitates datas & constantes, n potestatem quamvis literæ y, p & q quantitates utcunque datas per x denotant.] Transponatur terminus secundus, ut habeatur $ady - ypdx = by^n qdx$, vel [diviso per y^n] $ay^{-n}dy - y^{1-n}pdx = bqdx$; porro dividendo utrumque membrum per $c^{(1-n)\int pdx:a}$, c denotante numero unitatis, seu $lc = 1$; prodibit hæc altera

Iii 3 æquatio

* Vide Solutionem Auctoris nostri, N°. XXXV, pag. 175, Tom. I.

æquatio $\frac{ay^{-n}dy - y^{1-n}vdx}{c^{(1-n)\int pdx:a}} = \frac{bqdx}{c^{(1-n)\int pdx:a}}$; ita enim membrum prius absolute integrari potest, & habebitur $\frac{ay^{1-n}}{(1-n)c^{(1-n)\int pdx:a}} = \int \frac{bqdx}{c^{(1-n)\int pdx:a}} = X$, seu alicui functioni datæ ipsius x. Erit proinde $y^{1-n} = \frac{1-n}{a} \times c^{(1-n)\int pdx:a}X$. Q. E. F.

N°. CLXXXV.

DU PENDULE COMPOSÉ

Dans un milieu resistant.

Calcul pour déterminer la vitesse ou la résistance d'un Pendule rectiligne, composé de deux globes A & B, qui se mouvroient dans un milieu qui résisteroit comme le quarré de la vitesse.

SOLUTION.

On suppose que a & b soient les distances de A & B au point de suspension ou d'appui, & x & s les abscisses & les arcs du cercle que décrit A. Soient nommées la gravité absolue $= g$, la vitesse de $A = v$; $c =$ au nombre dont le Logarithme est 1, c'est-à-dire, $lc = 1$; $\frac{1}{m}$ & $\frac{1}{n}$ soient les intensités des résistances des globes A, B.

Soit f la force immaterielle, mise entre les deux verges qui enfilent les deux globes A & B, desquels le premier A est conçu comme le plus proche du point d'appui, & B le plus éloigné; ensorte que le globe A, étant retardé par la verge du globe B, sans lequel il descendroit plus vite, & le globe B, étant

étant acceleré par la pression du globe A, sans lequel il descendroit moins vite ; il se fait entre le globe A & la verge du globe B, une espece de compression, comme s'il-y-avoit un ressort entre deux ; l'effort donc de ce ressort à écarter les deux verges, doit être contrebalancé par les deux verges, qui tendent à se rapprocher jusqu'a l'entiere coincidence : c'est cet effort du ressort que j'appelle la force immaterielle $= f$.

TYPE DU CALCUL.

La force acceleratrice du globe $A = \frac{gdx}{ds} - \frac{vv}{m} - \frac{f}{A}$

La force acceleratrice du globe $B = \frac{gdx}{ds} - \frac{bbvv}{naa} + \frac{af}{bB}$.

Or afin que les deux verges descendent ou circulent conjointément, il faut que ces deux forces acceleratrices soient comme les longueurs des verges, c'est-a-dire il faut que $\frac{gdx}{ds} - \frac{vv}{m} - \frac{f}{A} : \frac{gdx}{ds} - \frac{bbvv}{naa} + \frac{af}{bB} = a : b$. Par cette analogie, on trouve $f = \frac{gAB(bb - ab)dx}{(aaA + bbB)ds} + \frac{bABvv(mbb - nab)}{mna(aaA + bbB)}$. Mais on sait que la force acceleratrice, multipliée par l'élement de l'espace à parcourir ds, donne vdv ; ainsi substituant cette valeur de f, dans l'équation $gdx - \frac{vvds}{m} - \frac{fds}{A} = vdv$, on trouvera $gdx - \frac{vvds}{m} - \frac{gmnaB(bb - ab)dx - bBvv(mbb - nab)ds}{mna(aaA + bbB)}$ $= vdv$; ce qui étant demelé & reduit en ordre, il viendra $\frac{(gaaA + gabB)dx}{aaA + bbB} = \frac{(na^3A + mb^3B)vvds}{mna(aaA + bbB)} + vdv$. Pour abreger ; nommons $\frac{g(aaA + abB)}{aaA + bbB} = L$, & $\frac{na^3A + mb^3B}{mn(a^3A + abbB)} = R$, cela nous donnera cette equation $Ldx = Rvvds + vdv$. Pour l'integrer, on posera $c^{2Rs} = z$: par consequent $2Rs = lz$, & $Rds = \frac{dz}{2z}$, Donc $Ldx = \frac{vvdz}{2z} + vdv$; multipliez

le

le second membre par zz, & le premier par son egal zc^{2Rs}, il viendra $2Lc^{2Rs}dx = vvdz + 2zvdv$; ainsi en l'integrant, on aura $2L\int c^{2Rs}dx = vvz = vvc^{2Rs}$; ce qui donne $vv = 2Lc^{-2Rs}\int c^{2Rs}dx$. Il n'y a donc qu'à remettre les valeurs de L & R; ce qui étant exécuté, on obtiendra finalement $vv = \frac{2g(aaA+bbB)}{aaA+bbB}c^{-2(na^3A+mb^3B)s:mn(a^3A+abbB)} \times \int c^{2(na^3A+mb^3B)s:mn(a^3A+abbB)}dx$.

SCHOLIE I.

Il faut remarquer qu'un corps pesant, qui tombe dans un milieu résistant, le long d'une courbe qui touche une ligne horizontale dans son plus bas point, s'accelere depuis le commencement de sa chute jusqu'à un certain terme, avant que d'arriver au point le plus bas de sa descente; ce terme passé le corps grave commence à se retarder: il faut donc savoir que la valeur trouvée de vv, n'est que pour la vitesse du corps quand il a passé ce terme. Donc, pour avoir la valeur de vv, pour quand le corps n'est pas encor arrivé au terme de la plus grande vitesse, il faut dans l'opération du calcul mettre par tout $-vdv$ au lieu de vdv: ainsi la derniere équation à integrer sera celle ci $2Lc^{2Rs}dx = vvdz - 2zvdv$; mais pour la rendre intégrable, il faut diviser le second membre par zz, & le premier par son égal c^{4Rs}, & on aura $2Lc^{-2Rs}dx = \frac{vvdz-2zvdv}{zz}$; dont l'intégrale est $2L\int c^{-2Rs}dx = -\frac{vv}{z} = -vvc^{-2Rs}$; d'où on tire $vv = -2Lc^{2Rs} \times \int c^{-2Rs}dx$: en substituant comme auparavant les valeurs de L & R, on aura maintenant $vv = \frac{2g(aaA+abB)}{aaA+bbB} \times c^{2(na^3A+mb^3B)s:mn(a^3A+abbB)} \times \int c^{-2(na^3A-mb^3B)s:mn(a^3A+abbB)}dx$.

SCHO-

SCHOLIE II.

On remarquera encor, que par la gravité absoluë g on n'entend pas la gravité naturelle, comme elle anime les corps terrestres dans le vuide, mais la gravité spécifique des corps diminuée de celle du milieu résistant : car c'est cette gravité diminuée qui doit être censée animer les corps plongés dans un milieu pesant lui-même. Ainsi donc, dans cette solution, on suppose que les deux globes A, B sont faits d'une même matiere, par exemple l'un & l'autre de fer, ou l'un & l'autre de plomb; mais si l'un étoit de fer & l'autre de plomb, il y auroit à considerer deux differents g, que l'on désigneroit par g & g', l'un pour le globe A & l'autre pour le globe B. Cette supposition rendroit le Probléme un peu plus difficile, & la formule plus longue.

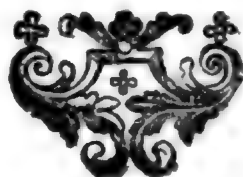
SCHOLIE III.

Si on veut déterminer le Centre d'oscillation de nôtre Pendule composé de deux globes A, B, oscillant dans un milieu résistant; c'est-à-dire, si on veut trouver la longueur d'un Pendule simple, qui soit isochrone avec le Pendule composé; il y a deux cas à considerer : En supposant 1°. que le Pendule simple fasse ses oscillations dans le vuide, ou dans un milieu sans résistance. 2°. Que le Pendule simple oscille dans le même milieu résistant, dans lequel oscille le composé.

Le premier cas est fort facile, car il n'y a qu'à prendre la quatriéme proportionnelle de la force accélératrice du premier globe, laquelle force a été trouvée ci-dessus $\frac{gdx}{ds} - \frac{vv}{m} - \frac{f}{A}$, de la force accélératrice naturelle sur un arc semblable, qui est $\frac{Gdx}{ds}$, en nommant G la gravité naturelle absoluë, & de la longueur du premier rayon a; & ainsi on aura la longueur cher-

chée du Pendule simple $= \frac{Gadx : ds}{gdx : ds - vv : m - f : A}$, où on substituera les valeurs trouvées de f & de vv.

Quant au second cas, le Probléme est indéterminé : car la longueur cherchée du Pendule simple synchrone avec le composé, dépend de la quantité de matiere, de la grosseur de son globe, & partant aussi de l'intensité de la résistance. Pour plus de facilité du calcul, supposons que le troisiéme globe, que nous voulons employer pour le Pendule simple synchrone, soit de même matiere que les deux autres globes, & qu'il ait la même grosseur que le globe A; par conséquent aussi la même intensité de résistance $\frac{1}{m}$. Cela posé, nommons la longueur cherchée du Pendule simple $= y$. Sa vitesse sera $= \frac{yu}{a}$, & sa résistance dans le même milieu $= \frac{yyuu}{aam}$; donc la force accélératrice $= \frac{gdx}{ds} - \frac{yyuu}{aam}$; ainsi, par la nature du synchronisme, on aura cette analogie $\frac{gdx}{ds} - \frac{vv}{m} - \frac{f}{A} : \frac{gdx}{ds} - \frac{yyuu}{aam} = a : y$; ce qui nous fournit cette équation quarrée $(\frac{gdx}{ds} - \frac{vv}{m} - \frac{f}{A})y = \frac{gadx}{ds} - \frac{yyuu}{am}$; d'où l'on déduira la valeur cherchée de y; dans laquelle il faudra substituer les valeurs trouvées de f & de v, pour avoir le tout en termes connus.



JOAN-

N°. CLXXXVI.

JOHANNIS BERNOULLI HYDRAULICA

Nunc primum detecta ac demonstrata directe ex fundamentis pure mechanicis.

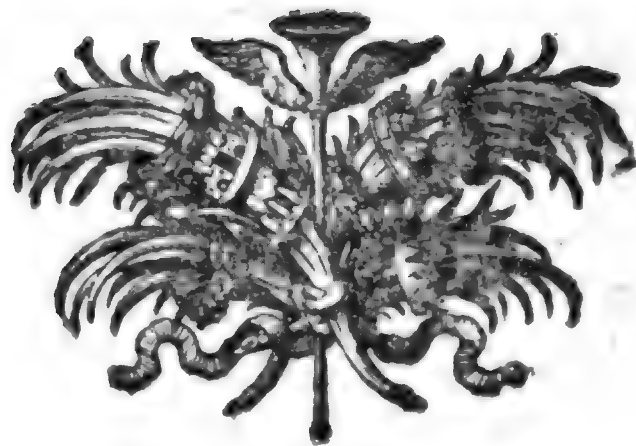
ANNO 1732.

LEONHARDUS EULERUS

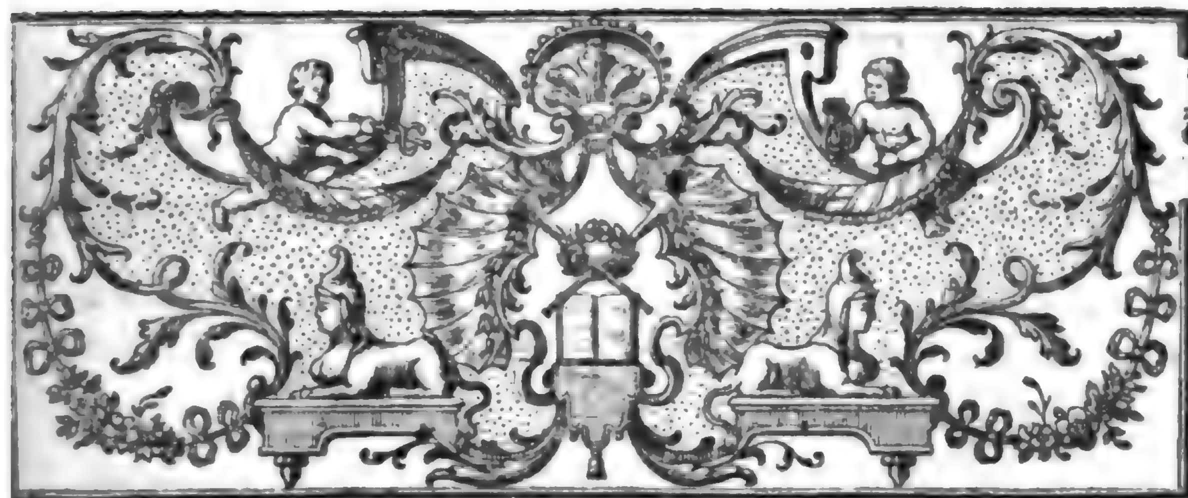
MATHEMATICUS ACUTISSIMUS

AD AUCTOREM.

J*AM ante quidem, maximi feci Theoriam Tuam aquarum fluentium, propter veram & genuinam Methodum, quam Tu,* Vir Excellentissime, *primus atque solus aperuisti ad hujus generis Problemata solide pertractanda. Nunc vero, perlecta altera Tuarum Meditationum parte, penitus obstupui foecundissima principiorum Tuorum applicatione ad perplexissima Problemata resolvenda, quo utilissimo pariter ac profundissimo invento Nomen Tuum celeberrimum apud posteros perpetuo erit sacrum. Obscurissimam autem atque abstrusissimam quaestionem, de pressione quam latera vasorum ab aquis transfluentibus patiuntur, tam distincte & enucleate enodasti, ut nihil amplius in hanc tam difficili re supersit, quod desiderari queat. Ut enim nemo, praeter Filium Tuum celeberrimum, hoc argumentum attigit, qui tamen tantum cum totus motus sese jam ad statum permanentem composuerit, pressionem via satis indirecta definivit; Ita Tu statim, methodo genuina patefacta, pressionem in omni aquae statu accuratissime determinasti, de quo Te dignissimo invento Tibi,* Vir Excellentissime, *ex animo gratulor, & pro communicatione maximas gratias ago.*



DISSER-



DISSERTATIO HYDRAULICA

De Motu Aquarum per vasa aut per canales quamcunque figuram habentes fluentium.

****

PRÆFATIO.



YDROSTATICA, quæ agit de aquis stagnantibus in vasis inferius clausis, habet suas leges demonstratas, atque principia ex ratione deducta; unde effectus & phænomena clare & dilucide explicantur: ita ut circa hanc Scientiam vix amplius quid desiderari possit. Aliter se res habet in *Hydraulica*, ubi non tantum de gravitatione aquarum earumque pressionibus agitur, sed præterea motus, qui inde nascitur, si aquæ per datam aperturam possunt effluere, aut si ex uno tubo in alium diversæ amplitudinis transire coguntur, atque alii effectus admirandi, qui eum motum comitantur, demonstrative determinari debent. Hæc certe Scientia, vulgo *Hydraulica* dicta, admodum est ardua, neque

neque adhuc ad leges regulasque mechanicas revocata habetur. Quicquid Autores ea de re scripserunt, vel sola nituntur experientia, vel rationibus incertis omnino, parumque soliditatis habentibus.

In Opere Hydrodynamico, quod non ita pridem in lucem edidit Filius meus †, felicioribus auspiciis aggressus est materiam istam, sed fundamento nixus indirecto, conservatione scilicet virium vivarum, licet verissimo atque a me demonstrato, nondum tamen ab omnibus Philosophis recepto. Primus ego hanc hypothesin exhibui in Dynamicis solidorum [postquam HUGENIUS simili principio pro centro oscillationis determinando usus est] ostendique eandem constanter ex illa hypothesi solutionem elici, quam dant ordinaria principia dynamica ab omnibus Geometris admissa *; quæ sane perpetua solutionum utraque via erutarum conformitas, vel sola sufficeret ad convincendam Adversariorum obstinationem. Directam methodum, qua a priori & per sola Dynamices principia, investigari possit natura motus aquarum ex vasis per foramina erumpentium, aut per canales non uniformis amplitudinis fluentium, hactenus dedit nemo.

Miratus unde tanta difficultas, ut in fluidis, non æque ac in solidis, succedat principiorum dynamicorum applicatio; tandem rem acrius animo volvens, detexi veram difficultatis originem; quam in eo consistere deprehendi, quod pars quædam virium prementium impensa in formandum *gurgitem*, [a me ita dictum ab aliis non animadversum] tanquam nullius momenti fuerit neglecta, & insuper habita, non aliam ob causam quam quia gurges conflatur ex quantitate fluidi perexigua, ac veluti infinite parva, qualis formatur quotiescunque fluidum transit ex loco ampliori in angustiorem, vel vice versa ex angustiori in ampliorem. In priori casu fit gurges ante transitum, in altero post transitum.

Demonstrabo autem ad formandum gurgitem, quantumvis parvam habeat moleculam, requiri tamen vim prementem non insen-

† *Danielis* BERNOULLI Hydrodynamica, sive de viribus & motibus fluidorum Commentarii. *Argentorati*, 1738.

* Vide Numeros CXXXV, CXXXVI, CXL.

insensibilem, nedum infinite parvam, sed finitam ac determinatam, adeoque neutiquam contemnendam, sed dignam omnino ut in computum veniat. Nam vis illa ad hunc effectum requisita, quod mirum videri potest, plane non dependet ab extensione gurgitis, qui major minorve concipi potest, modo concipiatur ut valde parvus; semper eandem ad sui formationem absumit partem virium prementium, manentibus cæteris circumstantiis.

Quid sit gurges, ac quomodo formetur, ex ipsa rei tractatione intelligetur; simulque patebit formationem gurgitis peragi sine dispendio sensibili virium vivarum, respectu quantitatis earum quæ est in totali massa aquea. Hinc eluceffit ratio, cur tuto & sine errore adhiberi possit Theoria virium vivarum in Hydraulicis; etiamsi ad gurgitem non attendant illi qui hac theoria utuntur; dummodo gurgitis existentiam non ignorent, videantque illum nihil derogare virium vivarum conservationi: secus enim contendere non possunt, se rei veritatem perfecte & scientifice consecutos esse.

Disquisitionem hanc absolvam duabus partibus: In prima considerabo phænomena aquarum fluentium, & effluentium per vasa cylindrica aut prismatica, sive sint simplicia, sive ex pluribus composita, ut sunt canales ex variis diversæ amplitudinis tubis, seu siphonibus cylindricis coagmentatis. In altera parte, perscrutabor omnia universalissime, cujuscunque sint figuræ, tam regularis quam irregularis, vasa perforata, ipsisque adaptati canales ac tubi.

Ad clariorem rerum intelligentiam, præmitto Definitiones atque Lemmata sequentia, quorum veritas, cum ex Dynamicis, tum ex Hydrostaticis est manifesta.

I. Vis *acceleratrix* uniformis est, quæ dato corpori, dato tempore, datam velocitatem imprimit.

II. Vis *motrix* est, quæ quando agit in corpus quiescens, illud in motum concitat, aut quæ corpus jam motum vel accelerare, vel retardare, vel ejus directionem mutare potest.

III. Vires motrices, sunt in ratione composita, ex ratione massarum & virium acceleratricium. Sic ex. gr. ad movendam

maſſam duplam, cum vi acceleratrice tripla, aut, quod idem eſt, ad movendam maſſam triplam, cum vi acceleratrice dupla, requiritur vis motrix ſextupla.

IV. Vis motrix diviſa per maſſam, dat vim acceleratricem; per hanc vero diviſa, dat maſſam.

V. Gravitas abſoluta g, ſeu cauſa gravitatis, quæcunque illa ſit, eſt vis acceleratrix, quæ cum animat determinatam maſſam corporis m, producit in illa vim motricem $= gm$. Licebit autem in mente noſtra eam ſeparare a corpore, & ita conſiderare tanquam extrinſecus in corpus ageret: concipimus utique idem illud corpus, gravitatis expers, a vi motrice externa gm eadem lege acceleratum iri, qua acceleratur naturaliter. Illam autem vim gm, tanquam extra materiam exiſtentem, vocare lubet vim motricem *immaterialem*: unde ſi illa aliorſum tranſlata, agat in aliam maſſam M, accelerabitur hæc, vi acceleratrice $= gm : M$.

VI. Vis motrix immaterialis atque invariabilis, agens ſine impedimento in corpus, eodem modo illud accelerat, ſive adhuc quieſcat, ſive jam ſit in motu: cum enim vis illa ſemper comitetur corpus, nullum inter ſe habent motum relativum, adeoque vis motrix eodem modo agit in corpus motum, ac ſi utrumque omnino quieſceret. Hæc cauſa eſt, cur corpora gravia, inter cadendum, continuo & uniformiter accelerantur ſecundum tempora; ſuppoſito ſcilicet intenſitatem vis acceleratricis non mutari inter agendum, hoc eſt, neque augeri neque minui; ſicuti revera vis gravitatis, eandem continuo ſervat intenſitatem, in corpore gravi deſcendente, æque ac ab initio deſcenſus.

VII. *Intenſitas* vis motricis invariabilis, dicitur menſura, ſecundum quam in corpore movendo producitur major minorve vis acceleratrix: Sic gravitas, in corpore verticaliter cadente, majorem habet intenſitatem, quam ea in eodem corpore ſuper plano declivi delabente; in priori enim caſu, major producitur vis acceleratrix quam in altero; in utroque autem gravitas eſt invariabilis.

VIII. *Vis motrix variabilis* eſt, cujus intenſitas mutatur in agendo. Sic ex. gr. vis elaſtri tenſi, ab initio relaxationis majorem habet

habet intenſitatem, per conſequens, majorem imprimit corpori propellendo vim acceleratricem, quam in progreſſu relaxationis. De his hæ habentur Regulæ: Sit ſpatium a corpore percurſum $= x$; maſſa corporis propulſi $= m$; vis motrix in fine ſpatii percurſi $= p$; velocitas acquiſita $= v$; tempus per $x = t$; proinde $dt = \frac{dx}{v}$; erit $\frac{pdt}{m}$, ſeu $\frac{pdx}{mv} = dv$, ideoque $\int pdx = \frac{1}{2} mvv$, id quod notiſſimum eſt.

IX. Partes inferiores aquæ in vaſe aliquo contentæ, premuntur a ſuper incumbente maſſa aquea, ſecundum ſolam profunditatem, quamcunque vas habeat figuram; hoc eſt, ſi maſſa aquea cogitatione dividatur in ſtrata horizontalia infinite parvæ craſſitiei, unumquodque ex illis ſtratis tantumdem premitur, ac ſi illi incumberet cylindrus aqueus ejuſdem altitudinis, quam eſt ea, quæ in vaſe reſpondet profunditati ipſius ſtrati.

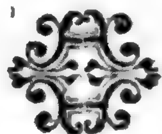
X. Hinc recte colligitur: Si amplitudines ſtratorum, eandem craſſitiem infinite parvam habentium, ſint m, m', m'', m''', &c. eorumque adeo ponduſcula propria ſint etiam ut m, m', m'', m''', &c., ſeparari poterunt per mentis abſtractionem, a ſtratis ipſorum gravitationes; ita ut eorum ſola ſuperſit materia ſine pondere: ſed ſi ablatarum gravitationum loco, totidem aliæ ſubſtituantur, quæ junctim premant ſupremam aquæ ſuperficiem, obſervando nimirum in ſingulis hanc analogiam, ut ſit amplitudo cujuſlibet ſtrati ad amplitudinem ſupremæ ſuperficiei, ita gravitatio propria ſtrati ad gravitationem ſubſtituendam: orietur inde in ſingulis ſtratis eadem preſſio, ac ſi manſiſſent in ſtatu ſuo naturali.

XI. Voco *Tranſlationem*, ſubſtitutionem illam mentalem. Ut me explicem, habeat ſtratum aliquod ex inferioribus amplitudinem $= m$, ejus gravitatio, vel ponduſculum proprium $= \pi$; amplitudo ſtrati ſupremi $= h$, erit *gravitatio tranſlata* ad ſuperficiem ſupremam $= \frac{h}{m} \pi$, quæ, cum reliquis omnibus ita *tranſlatis*, conſtituit totam vim motricem immaterialem, qua omnis aqua in vaſe deorſum urgetur, eodem modo ac fit naturaliter.

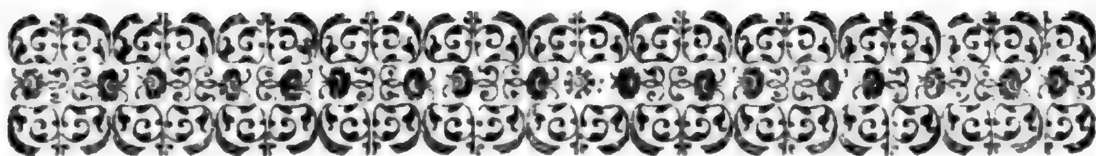
MONITUM.

Monere jam convenit in anteceſſum, me, per totam hanc tractationem de motu aquarum fluentium, abſtrahere a conſideratione impedimentorum peregrinorum & accidentalium, quæ alterare poſſunt motum per regulas determinatum. Talia impedimenta ſunt aquarum imperfecta fluiditas, item illarum adhæſio, atque frictio ad latera vaſorum, nimia tuborum gracilitas, foraminum ſeu luminum anguſtia, tenacitas particularum fluidarum, ob quam non facillime a ſe invicem ſecedunt, & quæ ſunt alia ejuſmodi, ad quæ non attendo.

Hoc quoque notari velim, non eſſe abſolutæ neceſſitatis, ut ſemper aquarum ſtrata in ſitu horizontali concipiantur: commodius illa finguntur, perpendicularia ad directionem motus aquæ. Sic ex. gr. cum aqua ex vaſe ampliori, transfluit in tubum anguſtiorem horizontalem, cujus orificii vel luminis area ſit in plano verticali, & ad latus tubi recto; aqua in tubo contenta rectiſſime dividi concipitur in ſtrata verticalia, & plano luminis parallela; eoque magis, quod ipſa natura hunc quaſi ſitum affectat: videmus enim columnam aqueam in tubo aliquo, duas lineas in diametro non multum excedente, habere ambas ſuas ſuperficies extremas diſpoſitas ad ſitum perpendicularem lateribus tubi, quamvis tubus ipſe ſit ad horizontem obliquus, vel omnino horizontalis. Linea conjungens centra gravitatis ſtratorum, ſive ſit recta ut in tubis rectilineis, ſive curva ut in tubis curvilineis, vocabitur *linea centrica*, vel ſimpliciter *centrica*: ſingula quippe ſtrata, quoad materiam in centris ſuis collecta, eum habere motum cenſentur quem ipſa habent ſtrata.



DISSER-



DISSERTATIONIS HYDRAULICÆ

PARS PRIMA,

Agens de motu aquarum per vasa & canales cylindricos, qui ex pluribus tubis cylindricis sibi invicem adataptis sunt conflati.

I.



Etur primo canalis, (Fig. 1) ABCFDE, compositus ex duobus tubis cylindricis, diversæ amplitudinis AGDE & GBCF, quorum ille fundum GD apertum habeat foramine GF, per quod communicet cum tubo angustiori BF. Sit vero totus canalis BE plenus liquore homogeneo, per se nullius gravitatis, sed urgeatur a parte orificii AE, data vi motrice $=p$, quæ, æqualiter premendo, expandatur per totam superficiem liquoris AE; quæritur lex accelerationis, qua liquor per canalem profluet? Suppono autem canalem semper manere plenum liquore, quod fit concipiendo suppeditari jugiter aliunde novam materiam liquoris, eadem quovis momento velocitate in tubum GE subingredientis, ad resarciendum id quod per alterum orificium GF egreditur in tubum GC, atque ex hoc ipso per lumen BC in auras dilabitur.

TAB. LXXXIX. N°. CLXXXVI. *Fig. 1.*

II.

Ex Hydrostaticis assumpsi vim motricem p immaterialem; qua premitur superficies liquoris AE, propagari in instanti, ad superficiem GF liquoris in tubo BF contenti; idque sive stagnet liquor in toto canali, sive fluat; dummodo plenus maneat.

I I I.

Dum transit liquor ex uno tubo in alterum, mutabitur utique velocitas in ratione reciproca amplitudinum; at nulla mutatio est subitanea, sed successiva & gradualis, procedens per omnes possibiles gradus intermedios a minori ad majorem, vel a majori ad minorem.

I V.

Hinc quando fluit liquor motu parallelo, ita ut quolibet momento, eadem insit velocitas singulis partibus liquoris, in directione ab AE versus GD, antequam partes ipsi GF proximæ, perveniant ad orificium GF, oportet ut per distantiam saltem minimam HG, incipiant accelerari, & accelerando pergant, donec in ipso ingressu GF, acquisiverint velocitatem liquoris per tubum BF fluentis motu pariter parallelo, singulisque partibus communi.

V.

Formatur itaque, pro latitudine indefinite parva HG, aliquis quasi gurges IFGH, ex lato in angustum coarctandus, per quem liquor, continua acceleratione sed tamen per gradus adaucta, perlabi debet, manente portiuncula quam minima liquoris (quæ replet spatiolum IFD) in quiete perpetua.

V I.

Sit curva IMF, terminans gurgitem, cujuscunque naturæ, neque enim necesse est, eum supponere alicujus determinatæ figuræ; mox enim demonstr abo, eandem semper requiri vim motricem, ad id unice destinatam ut liquor per gurgitem cogatur, qualemcunque habeat latitudinem HG, modo sit infinite parva, & cujuscunque sit naturæ linea IMF, quæ connectit extremitates I & F.

VII.

VII.

Nemo putet vim illam motricem [quæ exiguam adeo, imo infinite parvam, portiunculam liquoris per gurgitem protrudit] debere & ipsam esse infinite parvam, adeoque contemni posse. Est enim omnino finitæ quantitatis illa vis motrix; ideo quia si quantitas materiæ movendæ est infinite parva, ex altera parte, vis acceleratrix debet esse infinite magna, ad id nimirum, ut tempusculo infinite parvo, quo liquor percurrit spatiolum HG, generari tamen possit mutatio finita in velocitate, utpote ea quæ fuerat velocitas in H ad eam quæ jam est in G, se habet ut GF ad HI.

VIII.

Neglectio hujus vis motricis, tanquam nullius momenti, in causa fuit, cur nemo ad hunc usque diem extiterit, qui ex principiis staticis & pure mechanicis, dare potuerit leges liquorum per canales non uniformes fluentium; sed quicunque susceperunt illas exacte determinare recurrerunt, meo quidem exemplo, ad principium virium vivarum, de cujus applicatione ad hoc negotium aliaque in solidis æque ac in fluidis, forsan nunquam cogitassent, si me præeuntem non habuissent, quippe qui primus docui, hunc usum derivare ex conservatione virium vivarum. Sed ipse ego non satis contentus indirecta hac methodo, utpote fundata in theoria illarum virium a multis nondum admissa, non destiti inquirere in methodum directam, quæ niteretur unice principiis dynamicis a nemine negatis; donec tandem, post meditationem longiusculam, anno jam 1729 voti compos factus, vidi totius rei cardinem versari in contemplatione gurgitis, antea a nemine animadversi. Nunc itaque inventa mea, Amicis quibusdam privatim explicata, etiam cum publico communicare consultum duco. Hunc in finem, gurgitis generatione jam indicata, inceptum lubet, qua potero perspicuitate, prosequi.

IX.

I X.

Concipiatur abſciſſa HL $= t$, applicata LM $= y$, atque prioris elementum L$l = dt$, dicaturque tubi HE amplitudo AE ſeu HI $= h$, tubi GC amplitudo BC ſeu GF $= m$, liquoris in tubo GC velocitas $= v$, adeoque liquoris in tubo HE velocitas erit $\frac{m}{h} v$; ſunt enim velocitates amplitudinibus reciproce proportionales: ob eandem rationem, erit, in quolibet gurgitis loco, liquoris LMml velocitas $= \frac{m}{y} v$, quod dicatur $= u$. Jam ergo ſit vis acceleratrix, qua animatur ſtratum liquoris L$m = \gamma$; erit, ex natura accelerationis $\gamma dt = u du$, proinde $\gamma y dt = y u du$, hoc eſt, vis motrix qua urgetur ſtratum liquoris LM$ml = y u du$. Hæc vero vis motrix, per §II, generatur a vi motrice partiali in tubo HE exiſtente, & expanſa per totam amplitudinem AE; quæ ut innoteſcat, faciendum eſt ut LM ad HI, ſeu ut y ad h, ita $y u du$ ad $h u du$, erit $h u du$ [tranſlata nempe ipſius $y u du$] vis motrix particularis in tubo HE, quæ producere poteſt vim motricem $y u du$, in gurgitis ſtrato LMml; & integrando per totum gurgitem habetur $\frac{1}{2} h \left(vv - \frac{mm}{bb} vv \right)$ ſeu $\frac{hh - mm}{2h} vv$, quæ deſignat vim motricem requiſitam in tubo HE, ad id unice, ut in gurgite fiat acceleratio neceſſaria ad mutandam velocitatem minorem in majorem, qua opus eſt, ut tranſeat liquor in tubum anguſtiorem GC.

COROLLARIUM I.

Hinc patet naturam curvæ IMF, ut & latitudinem gurgitis HG, non ingredi in vis motricis determinationem, ad generandum motum gurgitis. Datis enim amplitudinibus extremis HI & GF, ſeu h & m, & velocitate v, ſemper habetur vis motrix in tubo HE $= \frac{hh - mm}{2h} vv$, pro motu in gurgite generando.

COROL-

COROLLARIUM II.

Quod si, continuante fluxu liquoris, ejus velocitas v in tubo BF maneat semper constans, manifestum est, etiam alteram velocitatem in tubo HE manere constantem; adeoque vim motricem, vel pressionem p, nihil amplius conferre ad motum in utroque tubo accelerandum: unde liquet totam illam vim p unice adhiberi ad formandum gurgitem, eumque in statu suo conservandum; erit propterea $p = \frac{hh - mm}{2h} vv$.

COROLLARIUM III.

Fingamus tubum HE, vel GE, esse verticaliter erectum instar vasis cylindrici, & communicare cum tubo horizontali GC, atque vim p esse ipsum pondus columnæ liquoris contenti GE; ita ut [posito g designare vim naturalem acceleratricem gravium, atque HA vel GA $= a$] habeatur $p = gah$ = ponderi liquoris in GE contenti; unde $gha = \frac{hh - mm}{2h} vv$. Sed ut v determinetur per altitudinem verticalem z, per quam grave aliquod libere delapsum acquirat velocitatem v; faciendum est $gdz = vdv$, proinde $gz = \frac{1}{2} vv$; substituendo igitur gz pro $\frac{1}{2} vv$; habebimus $gha = \frac{hh - mm}{h} \times gz$; unde emergit $z = \frac{hh}{hh - mm} a$, id quod dat hoc Theorema hydraulicum.

X.

THEOREMA.

Sit, (Fig. 2) vas cylindricum AGFE verticaliter erectum, instructumque ad fundum tubo cylindrico horizontali FB utrinque aperto: Sit item, tam vas quam tubus, aqua jugiter plenus, ut nimirum tantum aquæ, eadem velocitate quam habet aqua in vase, TAB. LXXXIX. N°. CLXXXVI. Fig. 2.

continuo suppeditetur per AE, quantum effluit per lumen BC. Dico velocitatem aquæ effluentis [si illa nascatur ex quiete] convergere citissime, ad eam quæ acquiritur a gravi libere cadente per altitudinem $= \frac{hh}{hh - mm}$ a.

Cujus veritas patet ex *Coroll.* 3 præced.

COROLLARIUM I.

Unde si lumen BC sit valde parvum, respectu amplitudinis vasis AE, adeo ut *m* negligi possit respectu *h*, prodibit $z = a$; hoc est, velocitas aquæ effluentis ex tubo, erit æqualis ei quam grave libere delapsum ex altitudine EF acquirit: Quod est Theorema notissimum; sed ex principiis dynamicis nondum hucusque demonstratum; præsertim si adfuerit tubus BF adaptatus: cum antea creditum fuerit Theorema valere tantum pro parvo foramine ad F supposito.

COROLLARIUM II.

Quo majus est lumen BC, respectu amplitudinis vasis AE, eo major fit velocitas maxima aquæ effluentis; aucto enim *m*, augetur valor fractionis $\frac{hh}{hh - mm}$, donec evadente $m = h$, velocitas maxima fit infinita; quod verum esse vel hinc quoque patet, quia tunc & vas & tubus sunt ejusdem amplitudinis, formantque unum continuum tubum reflexum; adeoque vis ponderis aquæ, in parte AF semper plena, continuo accelerat totam massam aqueam, ut tandem ejus velocitas, tempore infinito generata, fiat & ipsa infinita. Nam dicendo longitudinem tubi FC $= b$, massa omnis aquæ in tubo reflexo AGC, erit $= ha + hb$; eaque non aliter accelerabitur, quam corpus aliquod solidum, quod animaretur vi acceleratrice $= \frac{gha}{ha + hb} = \frac{ga}{a + b}$: tale utique corpus, cadendo per tempus infinitum, acquireret velocitatem infinitam.

CO-

COROLLARIUM III.

Si vero m majus esset quam h, id est, si tubus horizontalis amplior esset quam vas verticale; velocitas maxima nunquam & nequidem tempore infinito daretur: foret enim $\frac{hh}{hh - mm}$ negativum; indicio quod, durante fluxu in æternum, acceleratio aquæ effluentis incrementum capere non desinet. Hoc enim in casu, fiet in tubo gurges inversus, respiciens orificium BC, qui, ut ex sequentibus patebit, eam habet naturam, ut vim motricem adjuvet potius quam diminuat, dum sese quasi subducit pressioni a tergo venienti, quo aqua in vase liberius descendere queat.

SCHOLIUM.

Hucusque consideravimus vas & tubum aqua constanter plenum, atque effluentem aquam in maxima sua velocitate, adeoque æquabili seu uniformi; quo fit, ut nulla amplius requiratur vis motrix ad aquam accelerandam, neque per vas, neque per tubum; sed vis motrix p tota usurpetur ad coërcendum gurgitem, qui formatur ante ingressum ex spatio ampliori in angustius. Nunc contemplabimur velocitatem fluxus aquæ tanquam crescentem, atque initium suum a quiete sumentem; ita ut ad accelerationem procurandam, tam in vase quam in tubo, sua pariter peculiaris pars vis motricis p requiratur. Examinabimus primo casum, quo vas cum tubo constanter plenum supponitur.

XI.

Sit x longitudo spatii quam aqua ex quiete in tubo percurrit, erit $\frac{m}{h}x$ longitudo quam eodem tempore percurrit in vase. Sic pariter, existente velocitate in tubo $= v$, erit quoque velocitas in vase $= \frac{m}{h}v$; unde vis acceleratrix in tubo $= \frac{v\,dv}{dx}$,

 caque

eaque multiplicata per massam aquæ mb, dabit vim motricem $= \frac{mbvdv}{dx}$, quæ (per §. 2) translata in vas, dabit æquipollentem $\frac{bbvdv}{dx}$, a qua nimirum illa in tubo $\frac{mbvdv}{dx}$ produci potest. Ita quoque vis acceleratrix in vase $= \frac{mm}{bb} vdv : \frac{m}{b} dx = \frac{mvdv}{bdx}$, quæ ducta in massam ba, dat vim motricem $= \frac{mavdv}{dx}$ ad aquam in vase propellendam, atque sic summa trium istarum virium motricium per gurgitem, per tubum, & per vas, debet æquare vim motricem totalem p: unde hæc nobis resultat æquatio $\frac{bb - mm}{2b} vv + \frac{bbvdv}{dx} + \frac{mavdv}{dx} = p$. Esto igitur, ut ante, p ipsum pondus columnæ aqueæ $= gba$, & fiat, ut in *Coroll.* 3, §. IX, $gz = \frac{1}{2} vv$, quibus substitutis, prodibit hæc æquatio $\frac{bb - mm}{b} z + \frac{bbdz}{dx} + \frac{madz}{dx} = ba$; seu $(bb - mm) zdx + (bbb + bma) dz = bbadx$, unde $dx = \frac{bbb + bma}{bba - bbz + mmz} dz$, quæ debite tractata & integrata per logarithmos, dabit $x = (\frac{bbb + bma}{bb - mm}) \times l (\frac{bba}{bba - bbz + mmz})$; unde progrediendo ad numeros [assumendo $1 = lf$] $z = (\frac{bba}{bb - mm}) \times (1 - 1 : f^{(bb - mm)x : (bbb + bma)})$.

Quod si aqua in vase [quod, brevitatis gratia, sine tubo annexo tantum habeat foramen amplitudinis m] animetur gravitate g' diversa a gravitate naturali g, invenietur $z = \frac{g'bba}{g(bb - mm} \times (1 - 1 : f^{(bb - mm)x : (bbb + bma)})$.

COROLLARIUM.

Si $x = \infty$; id quod dat casum maximæ velocitatis, ad quam fluxus con-

convergit, erit $1 : f^{(bb-mm)x:(bbb+bma)} = 0$, adeoque $z = \frac{bba}{bb-mm}$ pro gravitate naturali g, quod omnino conforme est *Coroll.* 3, art. IX; atque si præterea m est infinite parvum respectu ipsius b, provenit $z = a$, prorsus ut habetur in *Coroll.* 1, §. X, quæ methodum egregie confirmant.

X I I.

Expendamus nunc casum, ubi vas AF [Fig. 2] aqua non manet plenum, sed pro mensura aquæ effluentis paulatim exinanitur, ejusque superficies AE continuo descendit.

Finge aquam in tubo horizontali percurrisse longitudinem x, proinde ex eo effluxisse [suppono enim vas & tubum ab initio plenum esse] quantitatem aquæ $= mx$, hoc est = cylindro aqueo, cujus basis est m & longitudo x. Quod si igitur in EF, sumatur pars EI $= \frac{m}{b} x$, perspicuum est, horizontalem HI, esse locum superficiei supremæ, ad quam aqua descendit in vase, postquam aquæ pars mx effluxit per tubum. Restabit ergo in vase columna aquea GI $= ba - mx$, cujus pondus $g(ba - mx)$ jam est id ipsum quod vocavimus p. Sic itaque vis acceleratrix aquæ restantis in vase [quæ in §. XI generaliter invenia est $= \frac{mvdv}{bdx}$] si ducatur in massam aqueam, quæ nunc est $ba - mx$, habebimus vim motricem $= \frac{mvdv}{bdx}(ba - mx)$, quæ competit aquæ per vas detrudendæ; unde jam colligendo tres vires per gurgitem, per tubum, & per vas, aggregatumque æquando ipsi p, hoc est, ipsi $g(ba - mx)$ lucrabimur hanc æquationem $\frac{bb-mm}{2b} vv + \frac{bbvdv}{dx} + \frac{mvdv}{bdx}(ba - mx) = g(ba - mx)$; ubi substituendo gdz pro vdv, & gz pro $\frac{1}{2}vv$, ut fecimus in *Coroll.* 3, §. IX, mutabitur nostra æquatio in hanc aliam $\frac{bb-mm}{b} z + \frac{bbdz}{dx} + \frac{mdz}{bdx}(ba - mx) = ba - mx$; & multiplicando per bdx in hanc, $(bb - mm) zdx + hbbdz + mdz(ba - mx) = (bba - bmx)$.

 dx.

dx. Quæ vera est æquatio, ex qua si eruatur valor ipsius z, habebitur altitudo, per quam grave libere delapsum acquiret velocitatem quæsitam, nempe æqualem illi quam habebit aqua in tubo, postquam quantitas mx ex eo effluxit.

Potest autem æquatio inventa, in qua indeterminatæ permixtæ reperiuntur, per regulas nostras, ope Lemmatis mox sequentis integrari; atque ita innotescet valor ipsius z in terminis finitis. Interim hoc loco ei negotio diutius non est immorandum: sufficit mihi Problema reduxisse ad æquationem differentialem, utendo principiis pure mechanicis, quod an a quoquam alio ante me præstitum fuerit, haud recordor me unquam vidisse. Sciendum vero ipsissimam hanc æquationem inveniri per methodum virium vivarum; ita ut, & hoc nomine, usus illarum atque bonitas sese commendet contra Adversarios.

COROLLARIUM I.

Ut determinetur maxima velocitas liquoris effluentis, tum & ea in vase descendentis, ponendum est tantum $dz = o$: quo facto, æquatio nostra suppeditabit $(hh - mm) z = hha - hmx$, proinde $z = \frac{hha - hmx}{hh - mm}$, quod cum adhuc ipsum x incognitum in se contineat, nihil quidem determinat, nisi valor ipsius z simul etiam ex æquatione generali eruatur.

COROLLARIUM II.

Si m sit valde parvum respectu ipsius h; æquatio generalis hanc induit formam $z dx + b dz = a dx$; unde $dx = \frac{b dz}{a - z}$: quod dat $z = a - a : f^{x:b}$. Ergo ut in hoc casu z sit *maximum*, oportet x esse infinitum, & tunc fiet $z = a$; quod quidem ex ipso $dx = \frac{b dz}{a - z}$, seu ex $dx \; (a - z) = b dz$ statim colligi potest; faciendo enim propter maximum z ipsum $dz = o$, erit etiam $a - z = o$, ac proinde $z = a$. Unde iterum

rum liquet, in vase amplissimo, aquam per angustissimum tubum effluentem statim acquirere velocitatem maximam, ac postea semper æquabilem, atque æqualem ei quam grave libere cadens ex altitudine vasis acquireret, ut supra in *Coroll.* 1, §. X, invenimus; hoc quippe in casu, vas considerari potest tanquam semper plenum, quia, ob vasis infinitam quasi amplitudinem, respectu habito ad tubi angustiam, requireretur utique tempus etiam quasi infinitum, antequam in illo descendat aqua sensibiliter.

X I I I.

Ecce nunc alium casum: Sit tubus [qui ab initio ante fluxum usque ad C aqua plenus ponitur,] indefinite continuatus, ita scilicet, ut descendente aqua in vase, nihil extra tubum effluere possit, sed semper quicquid liquoris ex vase descendit in tubum, id una cum eo quod jam inesse supponitur, junctim propulsum intra tubum fluere cogatur. Quæritur lex accelerationis & velocitas ipsa, pro quolibet spatio intra tubi cavitatem percurso? Vis acceleratrix in tubo hic etiam, ut in §. XI ostensum est, erit $= vdv:dx$; sed massa aquæ propellendæ nunc est $= mb + mx$, per quam vis acceleratrix $vdv:dx$ multiplicata, dat vim motricem in tubo $(mbvdv + mxvdv):dx$, quæ translata ad amplitudinem vasis, dat vim motricem æquipollentem in vase $= (hbvdv + hxvdv):dx$. Atque sic, conjunctis tribus viribus motricibus per gurgitem, per tubum & per vas; iisque æquatis vi motrici totali p, prodibit, pro vase semper pleno ab affluente nova aqua, hæc æquatio $\frac{hh - mm}{2h}vv + \frac{hbvdv + hxvdv}{dx} + \frac{mavdv}{dx} = p = gha$ [conf. §. XI]: sed pro vase nihil novi liquoris accipiente, hæc altera $\frac{hh - mm}{2h}vv + \frac{hbvdv + hxvdv}{dx} + \frac{mvdv}{hdx}(ha - mx) = p = g(ha - mx)$, [conf. §. XII]: substituto gz pro $\frac{1}{2}vv$, æquatio prior dat hanc $(hh - mm)zdx + (hhb + hma + hhx)dz = hhadx$; posterior vero hanc

(hh

$(hh - mm)zdx + (hhb + hma + hhx - mmx)dz = (hha - hmx)dx$. Utraque autem æquatio integrari poteſt per Lemma ſupra promiſſum, quod nunc demonſtro.

X I V.

L E M M A.

Sit æquatio integranda, [& quidem ſine neceſſitate ſeparandi indeterminatas] $\alpha z dx + (\beta + \gamma x) dz = (\epsilon + \theta x) dx$; ſcribo y pro $\beta + \gamma x$, unde $dx = dy : \gamma$, & æquatio mutatur in hanc $\frac{\alpha}{\gamma} z dy + y dz = (\epsilon + \theta x) dx$; qua multiplicata per $y^{\alpha:\gamma - 1}$ habebitur $\frac{\alpha}{\gamma} z y^{\alpha:\gamma - 1} dy + y^{\alpha:\gamma} dz = (\epsilon + \theta x) dx \times y^{\alpha:\gamma - 1} = (\epsilon + \theta x) \times \frac{1}{\gamma} (\beta + \gamma x)^{\alpha:\gamma - 1} \gamma dx$. Integrando prodibit $y^{\alpha:\gamma} z = \int((\epsilon + \theta x) \times \frac{1}{\gamma} (\beta + \gamma x)^{\alpha:\gamma - 1} \gamma dx) = \frac{1}{\alpha} (\beta + \gamma x)^{\alpha:\gamma} \times (\epsilon + \theta x) - \int(\frac{\theta}{\gamma\alpha} (\beta + \gamma x)^{\alpha:\gamma} \gamma dx) = \frac{1}{\alpha} (\beta + \gamma x)^{\alpha:\gamma} \times (\epsilon + \theta x) - \frac{\theta}{\alpha\alpha + \gamma\alpha} (\beta + \gamma x)^{\alpha:\gamma + 1} - \frac{\epsilon}{\alpha} \beta^{\alpha:\gamma} + \frac{\theta}{\alpha\alpha + \gamma\alpha} \beta^{\alpha:\gamma + 1}$. Notetur hic duos poſtremos terminos datos adjectos eſſe, more ſolito, ad rectificandam æquationem; ut nimirum evaneſcente x, etiam evaneſcat z. Dividatur nunc æquatio per $y^{\alpha:\gamma}$, hoc eſt $(\beta + \gamma x)^{\alpha:\gamma}$, & emerget valor verus ipſius z, nempe $z = \frac{1}{\alpha} (\epsilon + \theta x) - \frac{\theta}{\alpha\alpha + \gamma\alpha} (\beta + \gamma x) + (\frac{\theta}{\alpha\alpha + \gamma\alpha} \beta^{\alpha:\gamma + 1} - \frac{\epsilon}{\alpha} \beta^{\alpha:\gamma}) \times (\beta + \gamma x)^{-\alpha:\gamma}$.

X V.

Ut igitur hujus applicatio fiat ad priorem æquationem $(hh - mm) zdx + (hhb + hma + hhx) dz = hhadx$, erit hic $\alpha = hh$

$bb - mm$, $\beta = bbb + bma$, $\gamma = bb$, $\varepsilon = bba$ & $\theta = 0$, quibus surrogatis obtinebitur $z = \frac{bba}{bb - mm} - \frac{bba}{bb - mm} (bbb + bma)^{(bb - mm):bb} \times (bbb + bma + bbx)^{(-bb + mm):bb}$, vel quod idem est $z = \frac{bba}{bb - mm} \times (1 - (\frac{bb + ma}{bb + ma + bx})^{(bb - mm):bb})$. Sin vero ad posteriorem, ubi $\alpha = bb - mm$, $\beta = bbb + bma$, $\gamma = bb - mm$, $\varepsilon = bba$, $\theta = -bm$, resultat $z = \frac{bba - bmx}{bb - mm} + \frac{bm}{2(bb - mm)^2} \times (bbb + bma + bbx - mmx) + (\frac{-bm}{2(bb - mm)^2} \times (bbb + bma)^2 - \frac{bba}{bb - mm}(bbb + bma)) \times (bbb + bma + bbx - mmx)^{-1}$, quibus in ordinem digestis, rite procedendo, emerget tandem $z = (\frac{bbax - \frac{1}{2}bmxx}{bbb + bma + bbx - mmx})$.

COROLLARIUM I.

Si m respectu b est valde parvum, habebitur pro vase semper pleno $z = \frac{ax}{b + x}$; pariter pro altero casu prodit $z = \frac{ax}{b + x}$ quod quidem omnino ita evenire debet; quia enim, ob m infinite parvum, aqua tempore infinito opus habet ad effluendum, antequam suprema ejus superficies in vase amplissimo sensibiliter descendat; patet utique perinde esse ac si semper plenum maneret vas, ac proinde hi duo casus in eundem prorsus recidunt.

COROLLARIUM II.

Si $b = 0$, hoc est, si in tubo horizontali indefinite longo FB, ab initio fluxus nihil aquæ continetur; erit pro casu vasis semper pleni $z = \frac{bba}{bb - mm} \times (1 - (\frac{ma}{ma + bx})^{(bb - mm):bb})$; sed pro altero casu nihil novi liquoris accipientis, erit $z =$

$bbax$

$\frac{bbax - \frac{1}{2}bmxx}{bma + bbx - mmx}$. In hoc postremo casu hoc quoque notari dignum est, quod eo momento, quo superficies liquoris ad fundum usque vasis descenderit, id quod fit sumendo $x = \frac{b}{m} a$; futurum sit $z = \frac{1}{2} a$, hoc est, velocitas aquæ in tubo, post totalem vasis depletionem, erit ea quam grave acquireret cadendo ex dimidia vasis altitudine.

XVI.

De Canali trium pluriumve Tuborum.

TAB. LXXXIX. N°. CLXXXVI. *Fig.* 3.

Sit nunc (Fig. 3) canalis AL, constans tribus tubis AD, GC, BL, ac totus aqua plenus: Sitque vis motrix p, quæ expansa uniformiter per superficiem AE, eandem premat vel urgeat. Quæritur acceleratio & velocitas actualis, qua cum aqua ex tubo BL erumpit?

Ante omnia hic notandum, duos fieri gurgites brevissimos; unum in transitu per GF, alterum in transitu per BK, qui singuli suam propriam requirunt vim motricem, transferendam ad amplitudinem AE, quibus dein addendæ sunt vires motrices columnarum aquearum in singulis tubis contentarum, post translationem earum virium ad amplitudinem AE: quo facto, summa omnium earum virium translatarum æquanda est vi motrici totali p, unde resultabit æquatio quæsita.

XVII.

Sint igitur longitudines tuborum $AG = a$, $GB = b$, $BM = c$; eorumque amplitudines $AE = h$, $GF = m$, $BK = n$. Dicatur hic etiam velocitas in tubo ultimo $BL = v$, velocitas in tubo secundo $GC = u = \frac{n}{m} v$. Erit itaque, per ratiocinium §. IX adhibitum, vis motrix in superficie AE, requisita pro

pro formando gurgite per GF $= \frac{bb - mm}{2b} uu =$ [substituendo valorem ipsius uu qui est $\frac{nn}{mm} vv$] $\frac{bbnn - mmnn}{2bmm} vv$; item vis motrix in tubo GC requisita pro gurgite per BK $= \frac{mm - nn}{2m} vv$, hæc vero translata ad amplitudinem AE, faciendo ut m ad b, ita $\frac{mm - nn}{2m} vv$ ad $\frac{bmm - bnn}{2mm} vv$, dat vim motricem in tubo primo AD, ad gurgitem producendum per BK, adeoque ambæ vires simul sumptæ $\frac{bbnn - mmnn}{2bmm} vv + \frac{bmm - bnn}{2mm} vv$, hoc est $\frac{bbmm - mmnn}{2bmm} vv$, seu $\frac{bb - nn}{2b} vv = p$. Atque ita determinata est velocitas fluxus per tres tubos, postquam illa ad æquabilitatem pervenit.

COROLLARIUM.

Hinc patet aquam per tres tubos eodem modo moveri, ac si, secundo remoto, tertius immediate primo esset adaptatus; posito scilicet, fluxum ad summam & æquabilem velocitatem pervenisse: imo porro nunc liquet, quotquot supponantur tubi, vires motrices per gurgites singulos translatas ad tubum primum, & junctim sumptas, æquivalere vi motrici unicæ in tubo primo adhibendæ ad gurgitem unicum, qui fieret, adaptando immediate tubum ultimum ad tubum primum; adeoque eandem, in utroque casu, sequi æquabilem velocitatem, ad quam convergit fluxus, sive transeat aqua per totum canalem ex omnibus tubis compositum, sive tantum omissis intermediis per primum & ultimum sibi invicem immediate connexos. Omnia igitur, quæ supra de æquabili velocitate per duos tubos demonstravimus, applicanda sunt ad canalem ex quot libuerit tubis constantem.

XVIII.

Consideranda nunc venit acceleratio per canalem multorum

tuborum, quando nimirum fluxus aquæ incipit a quiete; primo tamen tubo ſemper pleno exiſtente, per affluxum novæ aquæ deſcendenti eadem velocitate ſuccedentis. Hanc in rem, nihil aliud faciendum, quam ut vis motrix pro maſſa aquea protrudenda per ſingulos tubos ſumpta, transferatur ad amplitudinem tubi primi; aggregatum harum virium motricium tranſlatarum, ſi addatur ad vim motricem per gurgites, hoc eſt, per illum unicum qui fieret ſi ultimus tubus immediate primo adaptetur; habebitur vis omnium, quæ æqualis eſt facienda ipſi p.

X I X.

Ut hanc regulam applicemus ad canalem trium tuborum, quorum longitudines ſint a, b, c; amplitudines h, m, n: ſitque x longitudo ſpatii quam aqua in tubo ultimo, ſeu tertio, ex quiete incipiens percurrit, & v velocitas acquiſita in hoc tubo. Erit, ad imitationem operationis §. XI, $\frac{n}{m}x$ longitudo quam aqua eodem tempore percurrit in tubo ſecundo, & $\frac{n}{m}v$ ejus velocitas acquiſita. Item $\frac{n}{h}x$ longitudo percurſa in tubo primo, & $\frac{n}{h}v$ velocitas acquiſita. Hinc vis acceleratrix in tubo tertio $= \frac{vdv}{dx}$, eaque multiplicata per maſſam aqueam in hoc tubo nc, dabit vim motricem $= \frac{ncvdv}{dx}$, quæ tranſlata in tubum primum, dabit æquipollentem $= \frac{hcvdv}{dx}$. Sic quoque vis acceleratrix in tubo ſecundo $= \frac{nn}{mm}vdv : \frac{n}{m}dx$ $= \frac{nvdv}{mdx}$, quæ ducta in maſſam aquæ mb tubi ſecundi, dat vim motricem $\frac{nbvdv}{dx}$, quæ tranſlata in tubum primum, gignit $\frac{hnbvdv}{mdx}$. Sic tandem etiam vis acceleratrix in tubo primo $=$

$\frac{nn}{hh}vdv$:

$\frac{nn}{bb}vdv : \frac{n}{b}dx = \frac{nvdv}{bdx}$, ducta in massam tubi primi ha, dat vim motricem aquæ in tubo primo $= \frac{navdv}{dx}$, quæ cum jam sit in tubo primo, ulterius non est transferenda; tres illæ vires sunt igitur $\frac{hcvdv}{dx}$, $\frac{hnbvdv}{mdx}$, $\frac{navdv}{dx}$, quarum summa addita ad vim per gurgites, habebitur $\frac{hh - nn}{2h}vv + (hc + \frac{hnb}{m} + na)\frac{vdv}{dx} =$ vi totali p.

XX.

Sint nunc quatuor tubi, quorum longitudines a, b, c, e, amplitudines h, m, n, q, sitque x longitudo in ultimo tubo percursa, v velocitas acquisita in ultimo tubo. Ad observandam uniformitatem, & legem progressionis ab uno tubo ad alterum, incipiam a primo, in quo, vis acceleratrix $= \frac{qq}{hh}vdv : \frac{q}{h}dx$, est enim velocitas $= \frac{q}{h}v$, & elementum velocitatis $= \frac{q}{h}dv$, ut & elementum spatii percurrendi $= \frac{q}{h}dx$; habetur itaque ex lege accelerationis, vis acceleratrix $= \frac{qq}{hh}vdv : \frac{q}{h}dx = \frac{qvdv}{hdx}$ eamque multiplicando per massam aquæ movendæ, hæc oritur vis motrix $hqavdv : hdx$, quæ quia jam est in primo tubo, non indiget ulteriori translatione; sed in tubo secundo, vis acceleratrix $= \frac{qq}{mm}vdv : \frac{q}{m}dx = \frac{qvdv}{mdx}$, ducta in massam aqueam mb, dat vim motricem in tubo secundo $mqbvdv : mdx$, quæ translata in tubum primum, dat æquipollentem $= hqbvdv : mdx$; eodem modo vis motrix translata ex tubo tertio in primum, erit $hqcvdv : ndx$, & vis motrix translata ex quarto in primum $= hqevdv : qdx$. Omnes ergo simul sumptæ $= \frac{hqavdv}{hdx} + \frac{hqbvdv}{mdx} + \frac{hqcvdv}{ndx} + \frac{hqevdv}{qdx}$

 =

$=(\frac{a}{h}+\frac{b}{m}+\frac{c}{n}+\frac{e}{q})\times\frac{hqvdv}{dx}$. Ergo generaliter pro quocunque tuborum numero, quorum longitudines sint a, b, c, . . . π, & amplitudines h, m, n, . . . ω, erit summa omnium virium motricium in tubum primum translatarum $=(\frac{a}{h}+\frac{b}{m}+\frac{c}{n}+\frac{e}{q}\ldots+\frac{\pi}{\omega})\times\frac{h\omega vdv}{dx}$; cui si addatur vis motrix $\frac{hh-\omega\omega}{2h}vv$, pro gurgitibus universis, emerget vis motrix totalis ponenda æqualis ipsi p; unde resultat hæc æquatio $\frac{hh-\omega\omega}{2h}vv+(\frac{a}{h}+\frac{b}{m}+\frac{c}{n}\ldots+\frac{\pi}{\omega})\times\frac{h\omega vdv}{dx}=p$; vel scribendo gz pro $\frac{1}{2}vv$, hæc altera $\frac{hh-\omega\omega}{h}z+(\frac{a}{h}+\frac{b}{m}+\frac{c}{n}\ldots+\frac{\pi}{\omega})\times\frac{h\omega dz}{dx}=\frac{1}{g}p$, vel $(hh-\omega\omega)zdx+(\frac{a}{h}+\frac{b}{m}+\frac{c}{n}\ldots+\frac{\pi}{\omega})hh\omega dz=\frac{h}{g}pdx$.

COROLLARIUM I.

Si longitudines a & π tuborum primi & ultimi, nec non ongitudines intermediorum manent invariabiles, primi nempe per continuum affluxum & ultimi per effluxum, erit series $\frac{a}{h}+\frac{b}{m}+\frac{c}{n}\ldots+\frac{\pi}{\omega}$ constans, quæ vocetur M, & $p=gha$; unde hæc æquatio prodit $\frac{hh-\omega\omega}{h}z+\frac{Mh\omega dz}{dx}=ha$, vel $(hh-\omega\omega)zdx+Mhh\omega dz=hhadx$; cujus x construitur per logarithmos in z datos, ipsum vero z, per numerales datos in x.

COROLLARIUM II.

Quod si vero, nulla affluente aqua nova, depleatur primus tubus, effluente nimirum per ultimum datæ longitudinis; sicuti fieret

fieret, si primus tubus instar vasis verticaliter erecti, contineret liquorem proprio suo pondere pressum, dum per canalem horizontalem quem reliqui constituunt expelleretur : erit, si x vocetur spatium per ultimum tubum ex quiete percursum, altitudo liquoris restantis in vase cylindrico $= a - \frac{\omega x}{b}$, adeoque a serie $\frac{a}{b} + \frac{b}{m} + \frac{c}{n} \ldots + \frac{\pi}{\omega}$, auferendum jam est $\frac{\omega x}{bb}$ & pro $\frac{1}{g} p$ scribi debet $ba - \omega x$; id quod dat hanc æquationem $(bb - \omega\omega) z dx + Mbb\omega dz - \omega\omega x dz = (bba - b\omega x) dx$; quæ, per *Lemma* §. XIV, potest integrari.

COROLLARIUM III.

Porro si tubus ultimus sit indefinite prolongatus, ita ut aquæ superficie suprema descendente in vase, aqua ex tubo ultimo non quidem effluat, sed in eo continuo magis magisque protrudatur; scribendum est in serie, non tantum $a - \frac{\omega x}{b}$ pro a, sed etiam $\pi + x$ pro π, & ita, pro hoc casu, acquiremus hanc alteram æquationem $(bb - \omega\omega) z dx + Mbb\omega dz - \omega\omega x dz + bbx dz = (bba - b\omega x) dx$. Quæ per idem *Lemma* integrabilis est.

COROLLARIUM IV.

Si computando vas ipsum pro primo tubo, habeatur $\frac{a}{b} = \frac{b}{m} = \frac{c}{n} \ldots = \frac{\pi}{\omega}$, hoc est, si longitudines tuborum, quorum numerus sit N, ubique sint proportionales suis respective amplitudinibus; generalis nostra æquatio mutatur in hanc $(bb - \omega\omega) z dx + Nba\omega dz = \frac{1}{g} bp dx$.

COROL-

COROLLARIUM V.

Si vero, excepto vaſe vel tubo primo, habeatur $\frac{b}{m} = \frac{c}{n} \ldots = \frac{\pi}{\omega}$, ſitque numerus reliquorum tuborum $= N$, erit utique $(bb - \omega\omega)\, z\,dx + b\,a\,\omega\,dz + \frac{Nbb\,\omega\,dz}{m} = \frac{1}{g}\,bp\,dx$.

COROLLARIUM VI.

Eſto nunc numerus tuborum infinitus, ſed unuſquiſque eorum, excepto primo, longitudinis infinite parvæ, ita ut omnes ſimul ſumpti repræſentent canalem conoidicum truncatum, cujus amplitudo antica $= m$, & poſtica $= \omega$, qualis eſt (Figura 4) RSTV, qui ſi concipiatur ſectus duobus planis proximis sr, tv, ipſis SR, TV, parallelis, erit $srvt$ unus ex iſtis tubulis, habens pro longitudine rv elementum longitudinis RV totius canalis, & pro amplitudine planum sr. Unde ut habeatur ſumma ſeriei $\frac{b}{m} + \frac{c}{n} \ldots + \frac{\pi}{\omega}$, integrari debet $\frac{vr}{sr}$, quod in pluribus exemplis fieri poteſt algebraice, ex. gr. ſi ST ſit linea recta, hoc eſt, ſi SRVT ſit conus decurtatus ordinarius: Item ſi ST ſit arcus Hyperbolæ cujuſvis generis ad aſymptotum RV.

TAB. LXXXIX. N°. CLXXXVI. Fig. 4.

XXI.

Illuſtremus rem ipſam in priori exemplo. Sit nempe SRVT conus decurtatus, cujus amplitudo antica $SR = m$, poſtica $TV = \omega$; proinde earum ſemidiametri ut $\sqrt{m}$ & $\sqrt{\omega}$: Porro dicatur ejus abſciſſa $Vv = t$; ejus elementum $vr = dt$; ſemidiameter amplitudinis $tv = y$; totaque tubi longitudo $RV = L$, invenietur $y = (t\sqrt{m} - t\sqrt{\omega} + L\sqrt{\omega}) : L$; ipſa vero amplitudo sr, quæ eſt ut yy, $= (t\sqrt{m} - t\sqrt{\omega} + L\sqrt{\omega})^2 : L^2$; quare

quare $\frac{vr}{sr} = \frac{L^2 dt}{(t\sqrt{m} - t\sqrt{\omega} + L\sqrt{\omega})^2}$; cujus integrale debito modo rectificatum $= \frac{Lt}{t\sqrt{m\omega} - t\omega + L\omega}$, adeoque per totum canalem RSTV, ſumendo nempe V*v*, ſeu $t = VR = L$, habetur integrale quæſitum $= \frac{L}{\sqrt{m\omega}} = \frac{b}{m} + \frac{c}{n} \ldots + \frac{\pi}{\omega}$. Atque ſic æquatio noſtra generalis §. XX, $(hh - \omega\omega)zdx + (\frac{a}{h} + \frac{b}{m} + \frac{c}{n} \ldots + \frac{\pi}{\omega})hh\omega dz = \frac{b}{g}pdx$, dabit, pro canali ſeu tubo conico, cujus longitudo L, & duæ amplitudines extremæ ſunt m & ω, exiſtente vaſis altitudine a & amplitudine h, hanc æquat. $(hh - \omega\omega)zdx + ha\omega dz + \frac{hhL\omega dz}{\sqrt{m\omega}} = \frac{1}{g}hpdx$.

XXII.

Pro caſu *Coroll.* 1, §. XX, erit quoque $(hh - \omega\omega)zdx + Mhh\omega dz = hhadx$, ubi $M = \frac{a}{h} + \frac{L}{\sqrt{m\omega}}$. Pro caſu *Coroll.* 2, §. ejuſdem, erit ſumpto pro M eodem, $(hh - \omega\omega)zdx + Mhh\omega dz - \omega\omega xdz = (hha - h\omega x)dx$. Pro caſu *Coroll.* 3, intelligendum eſt tubum conicum, in extremitate ſibi adjunctum habere tubum cylindricum indeterminatæ longitudinis, & quidem amplitudinis ω, ita ut in eo aqua propulſa ſemper contineatur, atque percurrat ab initio motus ſpatium x; erit tunc $(hh - \omega\omega)zdx + Mhh\omega dz - \omega\omega xdz + hhxdz = (hha - h\omega x)dx$.

XXIII.

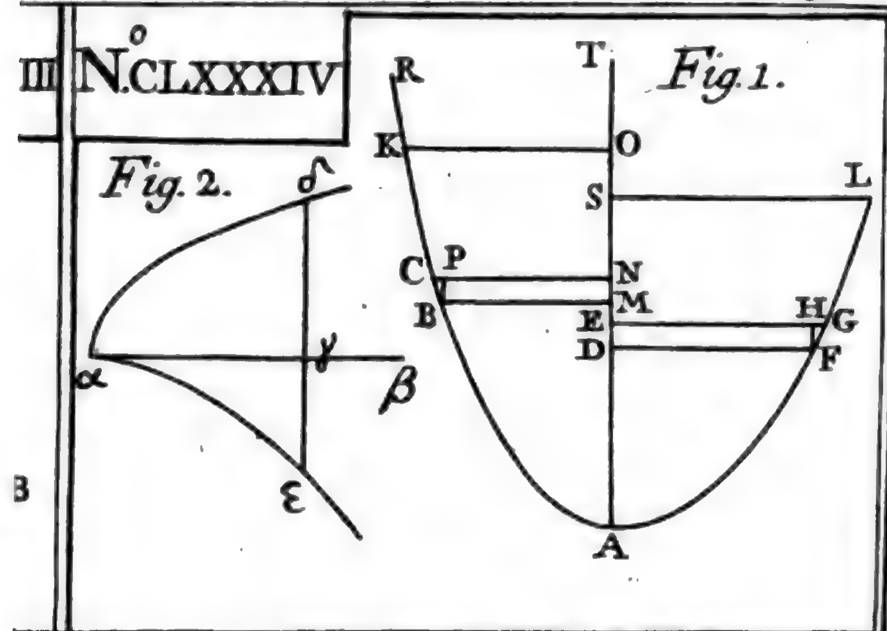
SCHOLIUM GENERALE.

Poſſent ex his derivari plura alia Corollaria, utilia non minus quam curioſa & elegantia. Nam quæ ad hanc ſpectant materiam, omne ſuum fundamentum habent in jam traditis & explicatis; licet id non indicaverim expreſſis verbis: ex. gr. ſup-

posuimus quidem aquam, aliumve liquorem, in primo duntaxat tubo tanquam in vase gravitare, indeque urgeri per canalem situm horizontalem habentem, per quem dum movetur aqua, destituitur quasi sua propria gravitate. Interim si in ipso canali, seu in tubis qui illum componunt, retineat quoque gravitatem suam, sive totalem, sive saltem partem, sicuti accideret si tubi non essent horizontales, sed vel verticales, vel diversimode inclinati ad horizontem; id nullam prorsus habet difficultatem: potest enim aquæ propria gravitas ex quolibet tubo per §. II, transferri in vas vel in tubum primum, adeo ut aqua in reliquis tubis considerari possit tanquam destituta gravitate; sed translatæ gravitationes, una cum pondere aquæ in vase vel tubo primo junctim sumptæ, spectari queant pro eo quod vocavimus p, seu vim motricem fundamentalem, a qua fluxus totius massæ aqueæ generatur. Ut scilicet si canalis EGBL (*Fig.* 5) constaret tribus tubis diversæ amplitudinis AD, GC, BL, quorum primus AD haberet amplitudinem AE vel GD, alter GC, amplitudinem GF vel BK, tertius BL amplitudinem BK vel ML: primus vero esset verticalis, secundus faceret cum horizonte angulum GBH, tertius angulum BMO: Sint amplitudines $AE = b$, $GF = m$, $BK = n$; vis gravitatis seu acceleratrix naturalis $= g$, & vis motrix in tubo AD aqua pleno $= gb \times AG$. Item $GB : GH = g : \frac{g \times GH}{GB} =$ vi acceleratrici liquoris in tubo GC. Item $BM : BO = g : \frac{g \times BO}{BM}$ $=$ vi acceleratrici aquæ in tubo BL. Hinc $\frac{g \times GH}{GB} \times m \times GB$, seu $gm \times GH$ dabit vim motricem aquæ tubi secundi, similiter $gn \times BO$ dat vim motricem aquæ in tubo tertio. Sed transferendæ jam sunt vires motrices ex tubis obliquis GC & BL in verticalem, faciendo $m : b = gm \times GH : gb \times GH$, & $n : b = gn \times BO : gb \times BO$. Hunc itaque in modum, considerari potest aqua universa in tubis tanquam carens gravitate, sed ejus loco pressa prima columna AD vi motrice expansa uniformiter

TAB. LXXXIX. N°. CLXXXVI. *Fig.* 5.

per



N.° CLXXXVI

Fig. 2.

Fig. 4.

Fig. 5.

per superficiem AE, quæ vis esset $= gh(AG + GH + BO)$ $=$ [ob $AG + GH + BO =$ toti altitudini verticali canalis, quæ sit A] $gh \times A = p$. Atque ita reduximus hunc casum aliosque similes ad Methodum nostram generalem.

Nota; si unus pluresve ex tubis oblique sursum dirigatur; erit, pro eo aut pro iis, vis motrix translata in tubum primum negativa, eritque sumenda pro A excessus quo affirmativarum summa superat summam negativarum, aut vicissim. Uno verbo, A erit excessus vel defectus quo superficies aquæ in primo tubo altior est humiliorve supra horizontalem, quam est superficies aquæ in tubo ultimo. Hoc inservit determinationi legis secundum quam liquores oscillantur in tubis recurvis qualibuscunque. Huc etiam refer Problema sequens a Filio mihi propositum, ante sex septemve annos, sed paulo generalius conceptum.

XXIV.

PROBLEMA HYDRAULICUM.

ABCD est vas aqua plenum usque ad EF; GI est tubus cylindricus, cujus pars KI aqua pariter plena est: Obducto pollice super orificium GO, tubus immergitur aquæ in vase contentæ, sed ita tantum, ut pars tubi MI, major quam KI, intra aquam externam penetret usque ad MN: Remoto nunc pollice, ascendet [ob prævalentem pressionem aquæ externæ] superficies KL, atque ab impetu concepto, pertinget supra superficiem EF usque ad PQ. Quæritur altitudo MP vel NQ, quousque nempe aqua in tubo ascendere valet? TAB. XC. Fig. 6.

SOLUTIO.

Dicatur pars tubi immersa $HM = a$, pars ejus HK primitus aqua plena $= b$ minor quam a, amplitudo vasis $EF = h$, amplitudo tubi GO, vel $HI = m$. Jam vero aqua tubum circumdans, & deorsum nitens suo pondere, per orificium apertum HI ingredi & ascendere conatur, propellendo partem aquæ HL superincumbentem. Actionem istam, atque effectum hoc

 modo

modo concipio. Sit ad orificium HI adaptatus alius tubus deorſim ſpectans, amplitudinis vaſis EF $= h$, & altitudinis HM $= a$. Sit hic tubus plenus aqua, ſed tali aqua, quæ levitaret, hoc eſt, quæ ſurſum niteretur, & quidem tanta vi præciſe quanta deorſum gravitat aqua [cujus loco illa in tubo per mentis fictionem ſubſtituitur] in vaſe altitudinis MH: proinde erit vis motrix aquæ in hoc fictitio tubo ſurſum tendentis $= gha$, & ſic, hujus reſpectu, erit vis motrix in tubo HO aquæ HL negativa $= gmb$, quæ translata in tubum fictitium dat gbb, quæ utpote contraria ipſi gha, ab hac ſubducenda eſt, & relinquet $gha - gbb$, ſeu $gh(a - b)$ pro vi motrice quam vocavimus p; cui igitur æquandæ ſunt vires motrices, quæ a fluxu generantur per gurgitem formandum ad ingreſſum HI, per tubum HO fluendo, & per tubum fictitium aſcendendo. Hinc, ſi x vocetur ſpatium ab aqua intra tubum HO percurſum, incipiendo a KL, adeoque ſpatium quod ſuperficies aquæ in tubo fictitio percurrit aſcendendo $= \frac{m}{h} x$; ad imitationem ratiocinii §. XIII, habebimus vim acceleratricem in tubo HO $= \frac{vdv}{dx}$, quæ, multiplicata per maſſam aquæ ſurſum pellendæ $mb + mx$, dat vim motricem in hoc tubo $= (mb + mx) \frac{vdv}{dx}$, transferendam in tubum fictitium, ut inde habeamus vim motricem æquipollentem $= (hb + hx) \frac{vdv}{dx}$. Et cum præterea in tubo fictitio [in quo aqua aſcendit velocitate $\frac{m}{h} v$ per ſpatium $\frac{m}{h} x$] vis motrix propria, non amplius transferenda, fit $= (ha - mx) \frac{mvdv}{hdx}$, quibus ergo binis viribus, addita porro ea quæ ad formandum gurgitem requiritur, obtinebimus vim motricem totalem $\frac{hh - mm}{2h} vv + (hb + hx) \frac{vdv}{dx} + (ha - mx) \frac{mvdv}{hdx}$. Verum quia hic p eſt $= gh(a - \frac{m}{h} x - b - x)$ ſeu $g(ha - hb - mx - hx)$,

reſultabit

resultabit æquatio pro determinanda velocitate v, nempe hæc $\frac{hh - mm}{2h} vv + (hh + hx + ma - \frac{mm}{h} x) \frac{vdv}{dx} = g(ha - hb - mx - hx)$; qua reducta, scriptoque gz pro $\frac{1}{2} vv$, fiet $(hh - mm) zdx + (hhb + hhx + hma - mmx) dz = (hha - hhb - hmx - hhx) dx$, quæ per *Lemma* §. XIV est integrabilis. Si vas AC, vel tubus fictitius, est amplitudinis per quam magnæ, [qui Problematis tacitus est sensus] emergit æquatio multo simplicior [neglectis nempe terminis in quibus m reperitur, cæterisque per hh divisis] scilicet hæc $zdx + (b + x) dz = (a - b) dx - x dx$; quæ integrata dat $(b + x) z = (a - b) x - \frac{1}{2} xx$, unde si $z = 0$, hoc est, si superficies KL cessat ascendere, id quod fit, quando ad maximam, quousque ascendere potest, altitudinem PQ pervenit; oportet ut tunc etiam $(a - b) x - \frac{1}{2} xx$ sit $= 0$, quocirca $a - b = \frac{1}{2} x$, seu $x = 2a - 2b$; ergo $KP = 2KM$.

XXV.

Idem Problema solvi potest facilius, si consideretur tanquam casus §. XIII. Concipiendo scilicet in *Fig.* 2 vas AF aqua plenum ab initio fluxus habere altitudinem $= a =$ MH in *Fig.* 6, & tubum FC, qui in *Fig.* 2 est horizontalis, jam esse verticaliter erectum, atque indefinite continuatum, in quo pars infima longitudinis $b =$ HK, in *Fig.* 6, sit ab initio aqua plena. Jam ergo, si a prævalente pressione columnæ aqueæ in vase, aqua in tubo supra b ascendit per spatium $= x$, & proin in vase descendit per spatium $\frac{m}{h} x$, habebimus vim motricem in vase oriundam a pondere superstitis aquæ $= g(ha - mx)$, ac vim motricem in tubo verticali, priori oppositam, a pondere totius aquæ in tubo existentis venientem $= g(mb + mx)$, quæ translata in vas dat $g(hb + hx)$, a priori $g(ha - mx)$ subtrahendum, & ita relinquetur $p = g(ha - hb - hx - mx)$, cui æquari debet summa trium virium motricium a motu generandarum per gurgitem, per tubum & per vas, ut inveni-

TAB. LXXXIX. N°. CLXXXVI. *Fig.* 2.

TAB. XC. *Fig.* 6.

 mus

mus §. XIII; quo facto, hæc ſuppeditatur æquatio $\frac{bb - mm}{2b} vv$ $+ \frac{(bbvdv + bxvdv)}{dx} + \frac{mvdv}{bdx}(ba - mx) = p = g(ba - bb - bx - mx)$; quæ, conjunctis conjungendis, hanc habebit formam $\frac{bb - mm}{2b} vv + (bb + bx + ma - \frac{mmx}{b}) \frac{vdv}{dx}, = g(ba - bb - bx - mx)$, prorſus eandem quam modo ſupra invenimus.

XXVI.

Ex Theoria noſtra hucuſque expoſita, reddi poteſt ratio phyſica [quam nec NEWTONUS, nec quiſquam alius recte dedit, ex principiis nempe pure dynamicis] cur ſcilicet corpus cylindricum ſolidum, quod uniformiter movetur, baſi ſua antrorſum verſa, in fluido continuo infinito ejuſdem cum corpore denſitatis, offendat reſiſtentiam æqualem ponderi corporis cylindrici; poſito nimirum, velocitatem corporis eſſe æqualem illi quam grave, libere cadendo, ex altitudine æquali lateri cylindri poſſet acquirere. Ex pluribus, quæ mihi ſunt, demonſtrationibus, hanc dare lubet Theoriæ noſtræ Hydraulicæ in hoc ſcripto ſtabilitæ innixam.

TAB. XC. Fig. 7. Sit (Fig. 7) cylindrus RMNS, qui moveatur ſecundum directionem lateris MN, in fluido ſtagnante, æque denſo, continuo & infinito. Dicatur velocitas cylindri $= v$, latus MN $= a$, baſis ſeu amplitudo NS $= b$. Fingamus loco cylindri ſolidi eſſe tubum MS eadem materia fluida plenum, & per hunc tubum quieſcentem [ubi præter figuram nihil aliud conſidero] fluere, continua & æquabili velocitate v, integrum cylindrum fluidum, ita ut tubus ſemper plenus maneat, & quantum per NS effluit, tantundem per MR eadem promptitudine reſarciatur per novum affluxum; attendenti fit ſtatim manifeſtum, cylindrum hunc fluidum, in effluxu per NS, eandem prorſus offendere vim reſiſtentem, ab allapſu ad fluidum ſtagnans externum & motui oppoſitum, quam offenderet ipſe cylindrus ſolidus; quia cylindrus fluidus, dum movetur per tubum, haberi

poteſt

potest pro solido, cæteræque omnes circumstantiæ sunt pares. Videndum ergo est solum modo, quanta sit resistentia quam patitur fluidum egrediens in ipso egressus momento. Verum evidens est, hanc resistentiam oriri a gurgite TNSV, qui formatur pone orificium tubi NS; cujus gurgitis figura hæc esse debet, ut, in distantia quantumvis parva, habeat asymptoton FG perpendicularem ad directionem axis tubi; propterea quoniam, ob decrescentem promptissime & omnino evanescentem motum fluidi egressi, amplitudines gurgitis vicissim accrescere, ac brevissimo tempore veluti in infinitum dilatari debent: suppono enim fluidum ex tubo egrediens non esse permiscibile cum altero extra stagnante. Hinc per ea quæ §. IX demonstrata sunt, & quia ultima velocitas in gurgite est $= v$; erit vis per gurgitem $= \frac{1}{2} hvv$: adeoque, ob constantem velocitatem in tubo, erit per *Coroll.* 2 §. IX, $\frac{1}{2} hvv = p = gha$, hoc est $\frac{1}{2} vv = ga$; hinc scribendo gz pro $\frac{1}{2} vv$, erit $z = a$. Oporret ergo velocitatem requisitam fluidi in tubo, ad id ut fiat resistentia æqualis ponderi cylindrici, eam esse debere, quam acquireret grave libere cadens ex altitudine $= a$. *Q. E. D.*

COROLLARIUM.

Ex demonstrata hac fundamentali proprietate [antea nondum satis accurate stabilita] sequuntur ultro omnia, quæ de resistentiis fluidorum continuorum & non elasticorum vulgo traduntur: Scilicet resistentiæ, in hujusmodi fluidis, perpendiculariter in plana opposita corporum exercitæ, sunt in ratione composita ex duplicata velocitatis relativæ & simplici densitatis fluidi. Ex hoc denique reliqua deducuntur.

XXVII.

De pressione fluidi in fundum vasis cylindrici (sine annexo tubo) per foramen effluentis.

Esto [Fig. 8) vas cylindricum AF fluido constanter plenum, cujus amplitudo $AE = b$, longitudo AG vel $EF = a$, amplitudo TAB. XC. Fig. 8.

plitudo foraminis GB $= m$. Habeat fluidum in egressu, postquam aliquandiu jam effluxit, velocitatem $= v$, ideoque in ipso vase velocitatem $= \frac{m}{b} v$. Sit GL longitudo cylindri cujus basis m, qui cylindrus designet quantitatem fluidi jam egressi $= x$. Sit nunc porro velocitas post futura $= u$, & longitudo prædicti cylindri fluidi ulterius egressuri $= y$; adeoque longitudo totalis tam egressi quam egressuri $= x + y$. Concipiamus autem fluidum carere omni gravitate, ac proin nullam aliam habere vim premendi fundum, quam eam quæ a motu pendet: Hæc vis offendit resistentiam æqualem ab oppositione fundi, ob æqualitatem inter actionem & reactionem. Resistentia vero invenitur, si more solito quæratur vis retardatrix, quæ velocitatem columnæ fluidi imminuit, illaque multiplicata per massam columnæ, id est, per ba, dabit resistentiam vel pressionem in fundum. Rem ita perago: Æquatio §. XI exposita $\frac{bb - mm}{2b} vv + \frac{bbvdv}{dx} + \frac{mavdv}{dx} = p$, in præsenti casu [ubi longitudo tubi, utpote absentis, $b = 0$, & pondus columnæ fluidi in vase $p = 0$] mutatur in hanc æquationem particularem $\frac{bb - mm}{2b} vv + \frac{mavdv}{dx} = 0$; & ponendo u pro v in hanc similem $\frac{bb - mm}{2b} uu + \frac{maudu}{dx} = 0$.

XXVIII.

Per reductionem, & scribendo dy pro dx [nunc enim x est constans, dum $x + y$ est longitudo indeterminata & variabilis cylindri fluidi egredientis) provenit æquatio sub hac forma $\frac{bb - mm}{2b} dy + \frac{madu}{u} = 0$; atque integrando $\frac{bb - mm}{2b} (x + y) + malu = malv + \frac{bb - mm}{2b} x$. Hoc ita scribo adjiciendo duos postremos terminos constantes, rectificationis gratia, eum in finem, ut evanescente y & incipiente u ab v ipsa

ipſa æquatio fiat identica. Habebitur itaque $mal\left(\frac{u}{v}\right) = -\left(\frac{bb-mm}{2b}\right)y$; unde tranſeundo ad numeros, & ponendo $1 = lf$, oritur $uu = vvf^{-(bb-mm)y:bma}$.

XXIX.

Differentiando probe inventam hanc æquationem [ſumpto nimirum v pro conſtante,] habebitur $udu = -vvdy\left(\frac{bb-mm}{2bma}\right):f^{(bb-mm)y:bma}$. Eſt autem in vaſe vis acceleratrix negativa, hoc eſt, abit illa in vim retardatricem $-\frac{mudu}{bdy}$; quæ itaque erit $= vv\left(\frac{bb-mm}{2bba}\right):f^{(bb-mm)y:bma}$.

XXX.

Hæc vis, quæ nobis uſui eſt in primo tantum momento poſt abolitionem vel ceſſationem ſuppoſitam gravitatis quam antea columna fluidi in vaſe verticaliter erecto habebat, erit utique $y = 0$, & $vv = 2gz$; adeoque vis illa inventa erit $= gz\left(\frac{bb-mm}{bba}\right)$, vid. Art. XI, ubi $z = \left(\frac{bba}{bb-mm}\right)\times(1 - 1:f^{(bb-mm)x:bma})$, ac proinde multiplicando per maſſam fluidi ba, habetur reſiſtentia vel preſſio in fundum $= gba(1 - 1:f^{(bb-mm)x:bma})$ a ſolo motu fluidi oriunda; cui ſi prætere addatur pondus columnæ fluidi gba, quod in ſitu verticali conſtanter agit in fundum, ſeu moveatur fluidum ſeu quieſcat, prodibit preſſio totalis $= gba + gba(1 - 1:f^{(bb-mm)x:bma})$.

COROLLARIUM.

Si $x = \infty$, erit preſſio totalis $= gba + gba:f^{\circ} = 2gba$. Eſt enim $f^{\circ} = 1$. Si vero $x = 0$, preſſio fundi erit $= gba$

$+gha(1-1)=gha$; quod vel hinc quoque patet verum esse, quia ab initio fluxus, solum pondus cylindri fluidi agit in fundum, postea, crescente x, crescit etiam pressio; ita tamen ut nunquam attingat $2gha$, nedum excedat; tametsi eo appropinquet data quavis quantitate propius.

S C H O L I U M.

Ne quis autem credat, ponderosum liquorem in vase aliter forsan premere fundum, cum ipse movetur, quam cum quiescit: non obstante quod contrarium facile pateat attendenti ad naturam virium immaterialium, ut est gravitatis causa extra corpus considerata, quæ vires agunt in instanti per totam massam animandam, adeoque eodem modo agunt, eandemque pressionem exercent in obstaculum, ac si liquor gravis ei incumbens quiesceret. Probabo tamen per calculum rei veritatem in nostro casu. Statim utique liquet, liquorem gravem descendendo in vase accelerari; debet autem ejus vis motrix, quantacunque illa sit, duas habere partes, quarum una destinatur ad vim retardatricem a fundo oppositam contra ponderandam, altera vero pars residua impenditur in accelerationem descensus actualis. Hæc vero posterior illa ipsa est, quæ habetur ex æquatione §. XI petenda, nempe $z=\frac{bba}{bb-mm}\times(1-1:f^{(bb-mm)x:bma})$, quam differentiando, & per g multiplicando, habebimus $gdz=vdv=\frac{b}{m}gdx:f^{(bb-mm)x:bma}$; idcirco vis acceleratrix residua in vase, seu $\frac{mvdv}{bdx}=g:f^{(bb-mm)x:bma}$; cui si addatur vis quam destruit retardatrix supra inventa $g(1-1:f^{(bb-mm)x:bma})$, faciunt simul vim acceleratricem $=g$, ideoque passionem a pondere oriundam $=gha$, hoc est $=$ ipsi ponderi. *Q. E. D.*

Atque ita procedendum erit in reliquis casibus, ubi unus pluresve tubi adaptati sunt vasi, ut scilicet, ante omnia, quæratur vis retardatrix ad fundum alicujus ex tubis datis, supponendo fluidum

dum ſubito amittere ſuam gravitatem, atque tum vi retardatrici inventæ addatur preſſio a ſolo pondere fluidi proveniens, [conſiderando illud tanquam in quiete conſtitutum & ſtagnans] atque propagata, vel immediate ad primum fundum, vel mediate per præcedentes tubos, ad quodcunque cupimus fundum.

APPENDIX.

Adumbratio calculi inſtituendi, pro determinandis ſingulari modo velocitatibus aquæ per plures tubos ex uno in alterum fluentis, acſi ſeorſim per ſingulos ſolitarios effluerent; atque hinc inveniendis preſſionibus in fundum ſingulorum exercitis.

In anteceſſum monere oportet, nos hic ſupponere canalem compoſitum ex variis tubis ad ſe invicem adaptatis, qualemcunque habentibus ſitum, verticalem, horizontalem, vel inclinatum. Supponimus porro, canalem aquæ conſtanter plenum eſſe, fluxumque perveniſſe ad æquabilitatem; dum tantum liquoris effluit ex quolibet tubo, quantum neceſſe eſt ad ſuppeditandum tubo proxime inferiori, ut adeo unuſquiſque conſtanter plenus eſſe, atque ſinguli ita conſiderari queant, ac ſi eſſent ſolitarii & ſeorſim poſiti.

Sit longitudo tubi primi & ſupremi $= a$, ſecundi proxime inferioris $= b$, tertii $= c$, &c. amplitudo primi $= h$, ſecundi $= m$, tertii $= n$, quarti $= q$, &c. foramen tubi primi $=$ amplitudini tubi ſecundi $= m$, foramen ſecundi $= n$, foramen tertii $= q$, &c. Gravitas naturalis $= g$, gravitas naturalis in diverſis directionibus obliquis $= \gamma', \gamma'', \gamma'''$, &c. Sit vero gravitas, ex actione mutua in tubis adaptatis oriunda, pro vaſe ſeu tubo primo $= g'$, pro ſecundo $= g''$, pro tertio $= g'''$, &c.; Longitudo cylindri aquei egreſſi per foramen primum $= x'$, ea per ſecundum $= x''$, per tertium $= x'''$, &c. altitudo unde grave naturale delapſum acquirit velocitatem aquæ egredientis per

foramen primum $= z'$, ea quæ per ſecundum $= z''$, per tertium $= z'''$, &c.

His itaque poſitis, & reliquis ut ſunt in Scripto hydraulico; habetur utique pro tubis ad ſe invicem adaptatis per translationem virium, & quidem pro canali duorum tuborum $gha + \gamma' hb = g'ha + g''hb$, vel $ga + \gamma' b = g'a + g''b$; pro canali trium tuborum $ga + \gamma' b + \gamma'' c = g'a + g''b + g'''c$. Has æquationes voco fundamentales.

Porro clarum eſt haberi $z' = \frac{nn}{mm} z'' = \frac{qq}{mm} z'''$, &c : Item $x' = \frac{n}{m} x'' = \frac{q}{m} x'''$, &c : Habentur autem per §. XI, æquationes ſequentes, pro tubis ſolitariis verticaliter erectis.

Pro tubo primo, $g(hh - mm) z' dx' + ghmadz' = g'hhadx'$
. . . . ſecundo, $g(mm - nn) z'' dx'' + gmnbdz'' = g''mmbdx''$
. . . . tertio, $g(nn - qq) z''' dx''' + gnqcdz''' = g'''nncdx'''$,
& ita deinceps.

Nota ſi quis ex tubis eſſet horizontalis, in æquatione fundamentali evaneſceret γ ad ipſum pertinens, ſic ex. gr. ſi tres eſſent tubi, quorum primus tantum verticalis, ſed reliqui duo horizontales, foret æquatio fundamentalis hæc, $ga = g'a + g''b + g'''c$, ſin vero omnes tres eſſent verticales, hæc haberetur fundamentalis $g(a + b + c) = g'a + g''b + g'''c$. Quod nunc in hac inveſtigatione palmarium eſt, oportet definire vires gravitatum g', g'', g''', &c. ex mutua actione gravitatis naturalis reſultantium, unde poſtea tam velocitates, quam preſſiones in fundo tuborum innoteſcent. Hoc autem ita perago. Ad imitationem operationis adhibitæ in §. XI, invenietur pro ſingulis tubis ut ſequitur.

Pro tubo primo $z' = \frac{g'}{g} \left(\frac{bba}{bb - mm} \right) \times (1 - 1 : f^{(bb - mm)x' : bma})$

Pro tubo ſecundo $z'' = \frac{g''}{g} \left(\frac{mmb}{mm - nn} \right) \times (1 - 1 : f^{(mm - nn)x'' : mnb})$

Pro tubo tertio $z''' = \frac{g'''}{g} \left(\frac{nnc}{nn - qq} \right) \times (1 - 1 : f^{(nn - qq)x''' : nqc})$

Atque ſic porro.

Quo-

Quoniam itaque z', z'', z''', ut &, x', x'', x''' per se invicem dantur, est enim $z' = \frac{nn}{mm} z'' = \frac{qq}{mm} z'''$, atque $x' = \frac{n}{m} x'' = \frac{q}{m} x'''$; substituantur valores singulorum z & x per unum expressos, & habebuntur tot æquationes, una pauciores, quot sunt tubi, vel quot species gravitatis g', g'', g''', &c. nempe ex. gr. pro tribus, servato z' ad quod reliqua z'', z''' sunt reducenda, ut & x'', x''' ad servatum x': habebuntur hæ duæ æquationes: z' vel $\frac{g'}{g} (\frac{bba}{bb - mm}) \times (1 - 1 : f^{(bb - mm)x' : bma}) = \frac{nn}{mm} z''$ vel $\frac{nng''}{mmg} (\frac{mmb}{mm - nn}) \times (1 - 1 : f^{\frac{mm - nn}{mnb} \times \frac{n}{m} x'})$, idemque illud primum etiam $= \frac{qqg'''}{mmg} (\frac{nnc}{nn - qq}) \times (1 - 1 : f^{\frac{nn - qq}{nqc} \times \frac{q}{m} x'})$. Sed cum tres sint quærendæ gravitatis species g', g'', g''', alia adhuc requiritur æquatio ad determinationem Problematis. Hæc autem peti debet ex æquatione fundamentali $ga + \gamma' b + \gamma'' c = g'a + g''b + g'''c$, aut [siquidem duo tubi supponuntur horizontales] ex hac tantum $ga = g'a + g''b + g'''c$, evanescunt enim γ', γ''.

Faciamus applicationem, brevitatis gratia, ad casum simplicissimum, duorum tuborum aqua constanter plenorum, quorum primus sit verticalis, alter horizontalis; ponamusque fluxum pervenisse ad uniformitatem, hoc est, x', x'', &c. esse $= \infty$. Prodibit una æquatio ex z' petita $g' (\frac{bba}{bb - mm}) = \frac{nng''}{mm} (\frac{mmb}{mm - nn})$, altera vero ex fundamentali $ga = g'a + g''b$; ex quibus rite procedendo, elicitur $g' = \frac{gnn (bb - mm)}{mm (bb - nn)}$ & $g'' = \frac{gbba (mm - nn)}{mmb (bb - nn)}$.

Hinc omnia reliqua derivantur, nempe $z' = \frac{bbnna}{mm (bb - nn)}$ & $z'' = \frac{bba}{bb - nn}$, prorsus consentanea iis quæ supra demonstrata dedimus. Item pressiones in fundum cujuslibet tubi facillime eruuntur; quia enim singuli tubi considerari possunt tanquam essent solitarii, adhiberi debet formula, quam invenimus

 supra

ſupra pro tubo primo & unico, ſcribendo tantum litteras quæ cuilibet alii tubo, tanquam unico ſeu ſolitario conſiderato, conveniunt. Cum itaque pro illo unico inventa ſit preſſio totalis $= gha + gha(1 - 1 : f^{(bb - mm)x : bma})$, ſcribendum hic erit pro tubo primo, preſſio totalis $= g'ha + gha \times (1 - 1 : f^{(bb - mm)x' : bma})$; pro ſecundo $= g''mb + gmb(1 - 1 : f^{(mm - nn)x'' : mnb})$; pro tertio $= g'''nc + gnc \times (1 - 1 : f^{(nn - qq)x''' : nqc})$, atque ſubſtitutis valoribus ipſarum g', g'', g''', vel quia applicationem facimus ad duos tantum tubos, & quidem ubi $x = \infty$, nonniſi valores ipſarum g' & g'' ſubſtitui debent; qui ſunt $g' = gnn(bb - mm) : mm(bb - nn)$ & $g'' = gbba(mm - nn) : mmb(bb - nn)$, habebitur preſſio prima $= 2gha \times \frac{nn(bb - mm)}{mm(bb - nn)}$, & preſſio ſecunda $= \frac{2gbba}{m} \times \frac{mm - nn}{bb - nn}$. Si præterea $b = \infty$, ſed m & $n =$ finito, erit preſſio prima $= 2gha \times \frac{nn}{mm} = \infty$, ut fieri par eſt, ſed preſſio ſecunda $= \frac{2ga}{m} \times (mm - nn) =$ finito.

Hac methodo probe obſervata, invenientur pro 5 tubis gravitates g', g'', g''', g^{IV}, g^{V}, ut ſequitur

$$g' = gbbssa(bb - mm) : bbmma(bb - ss)$$
$$g'' = gbbssa(mm - nn) : mmnnb(bb - ss)$$
$$g''' = gbbssa(nn - qq) : nnqqc(bb - ss)$$
$$g^{IV} = gbbssa(qq - rr) : qqrrd(bb - ss)$$
$$g^{V} = gbbssa(rr - ss) : rrsse(bb - ss)$$

Ex hoc laterculo, plus ſatis elucet lex progreſſionis pro quocunque numero tuborum. Adeoque in canali conoidico truncato [*Fig.* 9] FB, vaſi cylindrico AF adaptato, qui canalis conſideratur tanquam conflatus ex innumeris tubis infinite parvæ longitudinis, invenietur, pro qualibet amplitudine NO, ſpecies gravitatis,

TAB. XC. *Fig.* 9.

vitatis, qua ſtratum aquæ infinite parvæ craſſitiei animatur, quando ad æquabilem fluxum pervenerit: dicendo enim amplitudinem NO $= y$, craſſitiem ſtrati aquei $= dx$, reliquaſque litteras adhibendo, quas hactenus uſurpavimus, erit gravitas animans hoc ſtratum $= \frac{gbb\omega\omega a \times 2yy\,dy}{y^4 dx\,(bb - \omega\omega)} = \frac{gbb\omega\omega a \times 2dy}{y^3 dx\,(bb - \omega\omega)}$. Proin pondus ipſum hujus ſtrati, ſeu preſſio qua urgetur, prodibit ſi multiplicatur per quantitatem materiæ $y\,dx$, erit igitur hæc preſſio $= \frac{gbb\omega\omega a \times 2dy}{yy\,(bb - \omega\omega)}$. Huic autem addendæ ſunt preſſiones omnium ſtratorum ſequentium, ab O uſque ad extremum B, ſed per translationem ad locum O collectæ, ſicuti poſtulat methodus noſtra ab initio expoſita. Hunc in finem ponatur tantiſper y conſtans, & alia amplitudo variabilis RS $= t$, erit hujus ſtrati $t\,dx$ preſſio $= \frac{gbb\omega\omega a \times 2dt}{tt\,(bb - \omega\omega)}$ quæ transferatur ad locum invariabilem NO, faciendo ut t ad y, ita $\frac{gbb\omega\omega a \times 2dt}{tt\,(bb - \omega\omega)}$ ad $\frac{gbb\omega\omega a y \times 2dt}{t^3\,(bb - \omega\omega)}$, cujus integrale debite correctum dat $\frac{gbb\omega\omega a y}{\omega\omega\,(bb - \omega\omega)} - \frac{gbb\omega\omega a y}{tt\,(bb - \omega\omega)}$; ubi nunc ponendo $t = y$, habetur $\frac{gbba\,(yy - \omega\omega)}{y\,(bb - \omega\omega)} =$ preſſioni totali, qua nimirum aqua in NO comprimitur. Ut igitur reperiatur z, altitudo cylindri aquei cujus baſis eſt y, & pondus æquale huic preſſioni, faciendum eſt $gyz = \frac{gbba\,(yy - \omega\omega)}{y\,(bb - \omega\omega)}$, unde $z = \frac{bba\,(yy - \omega\omega)}{yy\,(bb - \omega\omega)}$. Ad hanc itaque altitudinem NM, hærebit aqua in fiſtula in loco N inſerta. Notandum vero, canalem FPBC conſiderari tanquam habentem diametros amplitudinum maximæ FP & minimæ CB ſatis parvas reſpectu longitudinis PB, ut nimirum hoc modo tangens curvaturæ FNC, in quolibet puncto N, faciat angulum acutiſſimum cum horizontali PB, ne alias, ex alliſione aquæ inter movendum ad canalis latus nimis curvum FNC, oriatur nova vis preſſionis [quam hic tanquam accidentalem neglecimus] quæ priori ſuperveniens, augeret

geret altitudinem NM; quemadmodum id revera accidit, si canalis FB desinit in laminam perforatam foramine amplitudinis ω, cui laminæ aqua perpendiculariter impingens augere potest compressionem in partibus foramini vicinis; in remotioribus augmentum illud minus fit sensibile, variatque prout postulat curvatura gurgitis, quam autem a peculiari qualitate aquæ, aliusve liquoris transfluentis dependere existimo, adeoque generaliter indeterminabilem.

DISSERTATIONIS HYDRAULICÆ

PARS SECUNDA,

Continens Methodum directam & universalem solvendi omnia Problemata Hydraulica, quacunque de aquis per canales cujuscunque figuræ fluentibus formari ac proponi possunt.

I.

CAnalis esto qualiscunque sive, sit rectus, sive curvus, sive sit continuus, sive compositus ex pluribus tubis cylindricis, sive denique sit verticalis, sive pro parte horizontalis, sive in partibus suis diversis diversimode inclinatus. Plenus sit hic canalis aqua, aliove liquore gravi, homogeneo, & fluidissimo. Incipiat autem pergatque accelerando [quantum & quousque potest] fluere, & ita quidem, ut canalis constanter plenus maneat, succedente scilicet aliunde aqua nova, quæ elabentem ex imo orificio singulis momentis resarciat, influendo per summum orificium, ea cum velocitate qua suprema superficies subsideret, si influxus subito cessaret. Hæc conditio additur facilioris calculi gratia; valet enim methodus, si nihil novi liquoris aquei subintraret, ad omnimodam usque vasis canalisve depletionem. Quæritur primo velocitas liquoris effluentis, pro data qualibet quantitate liquoris, jam egressi? Quæritur deinde quantum latera canalis in singulis locis a transfluente liquore premantur; vel, quod

quod eodem recidit, ad quantam altitudinem verticalem, liquor ejusdem generis cum transfluente suspensus hærere debeat in fistula in aliquo loco inserta, & verticaliter erecta?

I I.

Detur itaque canalis (Fig. 10.) qualiscunque ECce; recta verticalis AB, tanquam abscissarum axis considerata, ad quam ordinatim applicatæ AEe, PFf, TNn, BCc; quarum partes Ee, Ff, Nn, Cc, designent amplitudines seu sectiones horizontales canalis. Concipiatur liquor in eo contentus, divisus in strata horizontalia infinite parvæ crassitudinis FMmf, NLln, &c. quorum puncta intermedia, seu centra gravitatis G, H, V, I, &c. faciant lineam, sive rectam, sive curvam, GHVI, quam vocabo *lineam centricam* seu simpliciter *centricam*; quæ utique data erit, ob datas curvas EFC, efc, quæ ex Figura data canalis determinantur. TAB. XC. *Fig.* 10.

Sit amplitudo prima Ee $= h$, amplitudo ultima Cc $= \omega$, amplitudo aliqua intermedia Ff $= y$, alia intermedia Nn $= r$, crassities singulorum stratorum PR vel TS $= dt$. Erunt strata ipsa Fm $= y\,dt$, Nl $= r\,dt$. Sit porro aliqua recta indeterminata ID, tangens centricam in I, quæ dicatur x, $=$ longitudini cylindri obliqui liquoris effluentis in directione ipsius ID, cujus cylindri est basis Cc, & qui contineat quantitatem liquoris jam egressi. Velocitas liquoris eo ipso momento elabentis $= v$. Sit gravitas qua corpora naturaliter animantur $= g$. Nominando jam elementa lineæ centricæ Hh, &c,: $= ds$, erunt gravitates, quibus animantur strata in directionibus Hh, Vu, &c:, $= \frac{g\,dt}{ds}$, adeoque pondera, vel vires motrices ipsorum stratorum in istis directionibus $= \frac{gy\,dt^2}{ds}$, $\frac{gr\,dt^2}{ds}$ &c.; ipsæ vero vires motrices absolutæ, secundum directionem verticalem $= gy\,dt$, $gr\,dt$, & ita porro.

III.

Transferendo has vires absolutas (per Princip. Hydrost. ut in Parte prima ostensum est) ad amplitudinem primam h; erunt illæ pro singulis $ghdt$; erit ergo integrando per omnes dt, hoc est, per totam altitudinem AB [quæ dicatur $= a$] $gha =$ pressioni totali ad Ee verticaliter applicandæ, & æquipollenti summæ virium motricium absolutarum in stratis omnibus. Et hæc pressio totalis gha, ad amplitudinem primam applicanda, est ea quæ mihi vocari solet p.

Sit jam tangens in I lineæ centricæ GHI ad suam subtangentem verticalem, ut α ad 1; & tangens in G ad suam subtangentem, ut β ad 1; tangens autem in quolibet puncto intermedio H ad suam subtangentem, ut ds ad dt: Erit utique, per decompositionem motus, v seu velocitas actualis in I liquoris effluentis ad suam subvelocitatem verticalem, etiam ut α ad 1, adeoque subvelocitas illa $= \frac{v}{\alpha}$. Pariter nominando u velocitatem actualem in H secundum Hh, erit ejus subvelocitas $= \frac{udt}{ds}$. Verum, ut inveniatur velocitas actualis u, notandum est, stratorum subvelocitates, esse in ratione reciproca suarum amplitudinum, ad id ut transmittant eodem tempusculo elementari, quantitates æquales liquoris; faciendo itaque $y : \omega = \frac{v}{\alpha} : \frac{v\omega}{\alpha y}$, erit $\frac{v\omega}{\alpha y} =$ subvelocitati strati Fm. Faciendo nunc porro $dt : ds = \frac{v\omega}{\alpha y} : \frac{v\omega ds}{\alpha y dt}$, erit $\frac{v\omega ds}{\alpha y dt} = u$, seu velocitati actuali strati Fm in directione Hh. Hinc velocitas actualis strati primi, amplitudini Ee contigui, [ubi y ponitur h, & $ds : dt = \beta : 1$] erit $= \frac{\beta\omega v}{\alpha h}$.

Haud aliter ratiocinandum, pro inveniendo progressu actuali strati Fm in directione Hh. Nam nominando dx progressum momentaneum strati ultimi Cc in directione ID; erit ejus sub-

pro-

progreſſus in directione verticali $= \frac{dx}{\alpha}$; ſunt autem hic etiam ſubprogreſſus ſtratorum in reciproca ratione amplitudinum: faciendo itaque $y : \omega = \frac{dx}{\alpha} : \frac{\omega dx}{\alpha y}$, erit $\frac{\omega dx}{\alpha y} =$ ſubprogreſſui ſtrati Fm. Proinde etiam faciendo $dt : ds = \frac{\omega dx}{\alpha y} : \frac{\omega dx ds}{\alpha y dt}$; erit $\frac{\omega dx ds}{\alpha y dt} =$ progreſſui actuali ſtrati Fm, in directione ſui motus Hh.

IV.

Exiſtente jam aqua in motu, ſtrata ejus diverſimode in ſe mutuo agunt urgendo & reſiſtendo, ac viribus quidem diverſis, pro diverſitate circumſtantiarum, tam loci quam celeritatis. Vocetur itaque tantiſper γ, vis acceleratrix indeterminata, quæ ex actione mutua oritur, & u velocitas acquiſita, quam aliquod ſtratum Fm habet in directione Hh; adeoque $\gamma ds = udu$, unde $\gamma = \frac{udu}{ds}$. Ducatur hoc in maſſam ſtrati ydt, & prodibit ejus vis motrix $\gamma y dt = \frac{yudu dt}{ds}$ in directione Hh. Ut autem ea habeatur in directione verticali a qua hæc produci queat, faciendum eſt $dt : ds = \frac{yudu dt}{ds} : yudu$, quæ erit vis motrix requiſita in directione verticali; quæ ergo tranſlata ad amplitudinem primam h, dat æquipollentem $hudu$. Integretur hæc ut habeatur $\frac{1}{2}huu$, quod per debitam correctionem, accommodandum eſt ad omnia ſtrata, in toto canali ECce contenta, atque ſimul ſumpta. Proinde [ob velocitatem ſtrati ultimi $= v$, & primi $= \frac{6\omega v}{\alpha h}$] correctum integrale $= \frac{h}{2}(vv - \frac{66\omega\omega}{\alpha\alpha hh} vv)$ ſeu $\frac{vv(\alpha\alpha hh - 66\omega\omega)}{2\alpha\alpha h} =$ vi verticali ad Ee applicandæ æquipollenti, a qua ſcilicet ſingula ſtrata vim ſuam particularem ſe mutuo urgendi obtinent, ad id tantum ut niſum ſuum con-

 ſer-

ſervent, eo momento quo aqua effluit velocitate v, quod cum fiat, non ſucceſſive, ſed in inſtanti indiviſibili, & a ſola figura canalis pendeat, poterit hæc vis ex tranſlatione orta, vocari *vis* vel *potentia ſtatica*, aut ſi magis arrideat, *potentia hydroſtatica*, utpote quæ in ſolo niſu conſiſtit tranſeundi ab uno ſtrato in locum proxime inferioris, nulla facta attentione ad vim acceleratricem actualem.

V.

Quærenda porro eſt vis altera, quæ naſcitur ex acceleratione actuali liquoris transfluentis. Hunc in finem, pono cujuſlibet ſtrati Fm progredientis vim acceleratricem actualem $= \gamma'$, erit [ob progreſſum actualem ultimi ſtrati Cc per ſpatiolum dx] progreſſus ſtrati Fm $= \frac{\omega dxds}{\alpha y dt}$, adeoque $\frac{\gamma' \omega dxds}{\alpha y dt} = u'du'$ $=$ [Art. III.] $\frac{\omega \omega v dv ds^2}{\alpha \alpha yy dt^2}$, unde $\gamma' = \frac{\omega v dv ds}{\alpha y dx dt}$, & vis motrix actualis in directione Hh ſtrati, ſeu $\gamma' y dt = \frac{\omega v dv ds}{\alpha dx}$, adeoque vis motrix verticalis, ex qua illa produci poteſt $= \frac{\omega v dv ds^2}{\alpha dx dt}$, quæ translata ad primam amplitudinem h, dat æquipollentem $= \frac{h \omega v dv ds^2}{\alpha y dx dt}$; quod ut integretur per totam longitudinem axis AB reſpondentem toti canali, pro quolibet ſtrato, & pro qualibet acquiſita velocitate v, debent hic non tantum h & ω, ſed etiam $\frac{vdv}{\alpha dx}$, conſiderari tanquam conſtantes; & ita integrando, habebimus $\frac{h \omega v dv}{\alpha dx} \int \frac{ds^2}{ydt} =$ vi alteri, ex actuali accelerationis liquoris effluentis oriundæ, quam vocari liceat *vim hydraulicam*, ad diſtinctionem *vis hydroſtaticæ*, quæ in ſolo niſu vel preſſione in inſtanti exercita conſiſtit, idque ſingulis momentis, quomodocunque liquor moveatur.

V I.

Hæ duæ vires, *hydrostatica* & *hydraulica*, componunt vim totalem, quæ nimirum generatur ab actione vis primitivæ p, quæ inventa est Art. III $= gha$. Æquando itaque hanc, cum aggregato illarum duarum Art. IV & V inventarum, obtinebimus æquationem generalissimam, pro determinatione velocitatis quacum liquor quovis momento effluit, quæ æquatio hæc est $\frac{vv(\alpha\alpha bb - \mathrm{G}\mathrm{G}\omega\omega)}{2\alpha\alpha b} + \frac{b\omega v dv}{\alpha dx}\int\frac{ds^2}{ydt}, = gha$. Ubi notandum per $\int\frac{ds^2}{ydt}$ intelligi summam omnium $\frac{ds^2}{ydt}$ quæ continentur non tantum inter Cc & Ff, sed omnino inter extremas ab una ad alteram omnes comprehendendo.

V I I.

Quod si lubeat exprimere æquationem per z, seu altitudinem unde corpus naturali gravitate g præditum delabendo acquirat velocitatem quæsitam v; scribendum tantum est, per principia dynamica, $2gz$ pro vv & gdz pro vdv; id quod dabit hanc æquationem $\frac{gz(\alpha\alpha bb - \mathrm{G}\mathrm{G}\omega\omega)}{\alpha\alpha b} + \frac{gb\omega dz}{\alpha dx}\int\frac{ds^2}{ydt} = gha$, vel reductione peracta hanc $(\alpha\alpha bb - \mathrm{G}\mathrm{G}\omega\omega)zdx + \alpha bb\omega dz \times \int\frac{ds^2}{ydt} = \alpha\alpha bbhadx$, vel quia $\int\frac{ds^2}{ydt}$, sumendum per totam axis longitudinem, ut constans, adeoque ut datum supponi potest, saltem per quadraturas, nominetur illud M; eritque æquatio ad hanc formam reducta $(\alpha\alpha bb - \mathrm{G}\mathrm{G}\omega\omega)zdx + \alpha Mbb\omega dz = \alpha\alpha bbhadx$. Ex resolutione hujus æquationis, invenietur z in quantitatibus datis per x, & constantes M, a, b, ω, α, G.

C O R O L L A R I U M I.

Existente effluxus velocitate uniformi, ad quam sensibiliter

pervenitur citissime, & quasi uno ictu oculi, ut in suo loco hujus scripti demonstrabitur; evanescit dz: quo igitur neglecto, prodit æquatio algebraïca hæc $(\alpha\alpha bb - \mathfrak{G}\mathfrak{G}\omega\omega)z = \alpha\alpha bba$, unde quæsita $z = \frac{\alpha\alpha bba}{\alpha\alpha bb - \mathfrak{G}\mathfrak{G}\omega\omega}$.

COROLLARIUM II.

Hinc duo vasa vel duo canales, qualescunque habeant figuras, licet a se invicem diversissimas, modo eandem habeant altitudinem verticalem a, ut & amplitudines supremam & infimam, seu primam & ultimam, b & ω, in eadem ratione, ac præterea α & $\mathfrak{G}$ utrobique sibi proportionales; effluet aqua ex utroque canali, seu vase, velocitate æquali, postquam venerit utrobique ad uniformitatem.

COROLLARIUM III.

Si linea centrica GHI est linea recta, sive sit verticalis sive obliqua, erit $\mathfrak{G} = \alpha$, & $ds : dt = \alpha : 1$; proinde $ds = \alpha dt$, & $\int \frac{ds^2}{ydt}$ seu $M = \alpha\alpha \int \frac{dt}{y}$, id quod æquationem generalem $(\alpha\alpha bb - \mathfrak{G}\mathfrak{G}\omega\omega) zdx + \alpha Mbb\omega dz = \alpha\alpha bbadx$ mutat in hanc $(bb - \omega\omega) zdx + \alpha bb\omega dz \int \frac{dt}{y} = bbadx$. Qualiscunque autem sit situs centricæ rectilineæ, sive verticalis sive obliquus, erit in casu effluxus uniformis semper $z = \frac{bba}{bb - \omega\omega}$.

COROLLARIUM IV.

Quod si manente figura canalis vel vasis, ut & utraque ejus amplitudine summa & ima Ee, Cc; fiat tantilla mutatio in directione liquoris influentis & effluentis; potest illa mutatio, etsi fere sit insensibilis, producere mutationem insignem in velocitate; ut ex. gr. si in *Figura* 11, vasi vel canali ECce adaptentur

tentur margines vel labra Emne & Cpqc, tantillæ altitudinis verticalis Em, cp, ut amplitudines mn, pq, maneant eædem cum prioribus Ee, Cc, ipsaque tota canalis altitudo sensibiliter non augeatur; nemo facile crediderit, quanta hinc in effectu futura sit velocitatis mutatio. Quoniam enim nunc aqua influit & effluit, non amplius oblique sed verticaliter, ob directionem labrorum verticalem, quæ ideo etiam dat situm verticalem tangentibus extremis lineæ centricæ, facitque $\alpha = \beta = 1$; manifestum est æquationem generalem $(\alpha\alpha hh - \beta\beta\omega\omega)zdx + \alpha Mhh\omega dz = \alpha\alpha hhadx$, nunc subito assumere hanc faciem $(hh - \omega\omega)zdx + Mhh\omega dz = hhadx$, atque pro velocitate uniformi fore $z = \frac{hha}{hh - \omega\omega}$; quod monere operæ pretium duxi, ne alioquin, si in experimentis capiendis ad minimas circumstantias, quæ nullius esse momenti videntur, non satis accurate attenditur, & inde quod provenit cum nostris minus recte quadrare falso apparet, ne, inquam, theoria nostra statim erroris suspecta habeatur. Sicuti accidit aliquando Cl. POLENO, Viro alias in experimentalibus industrio & circumspecto, qui visurus quas diversas quantitates aquæ, dato tempore, emitterent diversæ amplitudinis lumina, eidem vasi aqua pleno admota, sumpserat ad hoc negotium varias laminas non admodum spissas, unamquamque peculiaris amplitudinis foramine pertusam, ut nunc hac nunc illa obtegeret aperturam in fundo vasis factam: contigit autem, ni fallor forte fortuna, ut cum aliqua ex illis laminis experimentum bis repetierit, & postea pluries de industria; ubi semper attonitus observavit unam eandemque illam laminam, per suum idem foramen, modo majorem, modo minorem aquæ copiam eodem tempore emisisse, prout una vel altera ejus laminæ facies extrorsum spectaret: tandem foraminis forma curatius examinata fuit, atque tum observatum figuram foraminis, licet in tenui lamina insculpti, non fuisse exacte cylindricam, sed instar conuli truncati, basin unam habentis tantillum ampliorem quam alteram: quod jam sufficiebat ad detegendam rationem, cur extrorsum hiante basi ampliore forami-

TAB. XC. Fig. 14.

foraminis, aqua largius effluxerit quam in sensu contrario; idque duplicem ob causam; nam & crassior fuit vena aquea exiliens, & major ejus velocitas, ceu patet ex formula nostra $z = \frac{bba}{bb - \omega\omega}$, ubi palam est, valorem hujus fractionis esse majorem, si major fuerit ω, reliquis b & a manentibus, & contra fore minorem, si ω minor fuerit.

COROLLARIUM V.

In casu quo $\alpha b = \zeta\omega$, seu ubi $\alpha : \zeta = \omega : b$; habebitur $M\omega dz = \alpha a dx$, proinde $z = \frac{\alpha a x}{M\omega}$; unde liquet, crescente effluxu x in infinitum, etiam z in infinitum crescere; adeoque velocitatem nunquam ad uniformitatem convergere. Quod sane apparet quoque ex ipsa formula *Coroll.* 1, est enim $z = \frac{\alpha\alpha bba}{\alpha\alpha bb - \zeta\zeta\omega\omega} =$ [in hoc casu] $\frac{\alpha\alpha bba}{\alpha\alpha bb - \alpha\alpha bb} = \frac{a}{0} = \infty$.

VIII.

SCHOLIUM I.

Notandum, in canalibus & tubis non admodum amplis & sufficienter longis, hoc communiter observari, sicuti jam innui in Præfatione *, quod strata F m (Fig. 10) in fluxu constituta, ex situ horizontali se facile componunt ad situm perpendicularem lateribus, seu potius lineæ centricæ G H I; quod utique ex motu supremæ superficiei E e [si nullus alius liquor succedit] ut ex. gr. in tubis barometricis & aliis ejusmodi siphonibus non ultra unam duasve lineas in diametro habentibus, luculenter patet; sive hoc fiat ob adhæsionem fluidi ad latera, quæ circumcirca in ambitu stratorum æquabilis esse debet, ut quam commodissime fluidum moveatur & sine notabili frictione, sive id contingat aliam ob causam physicam, hujus loci non est inquirere: sufficit hoc loco insinuare, hanc circumstantiam nihil offi-

TAB. XC. *Fig.* 10.

* pag. 396.

officere nostræ Theoriæ. Nam quia, per legem generalem, centrum gravitatis corporum quacunque de causa in motum concitatorum, eodem modo eademque velocitate in sua directione inchoata movetur, ac si universa eorum materia in ipso centro gravitatis esset concentrata; poterit sane materia cujuslibet strati Fm considerari tanquam congesta in centro gravitatis H vel h. Cum igitur, in canalibus oblongis ac non admodum amplis, quælibet eorum modica portio sumi possit pro quasi cylindrica vel prismatica; evidens est unumquodque stratum Fm, levissimam ob causam, situm suum horizontalem Ff mutare posse in rs perpendicularem ad Hh, manente interim Hh ejusdem longitudinis, & quantitate strati novi rtos æquali strato FMmf. Concipiamus igitur quo pacto singula reliquorum stratorum Nl [sine ulla alia mutatione, sive in velocitate, sive in directione secundum Vu] se componere possint in situm perpendicularem ad latera canalis, seu potius ad lineam centricam. Quod si jam porro attendimus quid fieret, si obturaretur exitus Cc, ejusque loco aperiretur in latere canalis foramen cd ejusdem amplitudinis cum Cc; haud difficulter intelligimus, aquam per aperturam cd sub eadem obliquitate ad cd erumpere debere, sub qua erumpebat per Cc, ejusque adeo directionem bg fore horizontalem. Cum præterea apertura cd ponatur æqualis amplitudini Cc, & conatus erumpendi per Cc jam detorqueatur versus dc [per vulgarem legem hydrostaticam,] oportet sane velocitatem aquæ per cd effluentis, eandem fore quam determinavimus pro Cc. Unde & hoc colligitur, si ad foramen cd adaptaretur novus canalis horizontalis, in quo nempe linea centrica horizontalis sit, fore ut motus & velocitas aquæ per eum fluentis & effluentis eodem modo se habeat, ac se haberet, si idem ille novus canalis [clauso cd] ad Cc adaptaretur secundum directionem ID, sed in quo aqua fluens destituta supponi deberet propria sua gravitate. Adeo ut stratorum pondera ad amplitudinem Ee translata hic etiam faciant eandem summam *gha*, æque ac si abesset novus canalis, ac proin in generali æquatione expressa [Art. VII],

$(\alpha\alpha bb - \beta\beta\omega\omega)zdx + \alpha Mbb\omega dz = \alpha\alpha bbadx$, nihil aliud mutandum ſit quam ut M, ſeu $\int\frac{ds^2}{ydt}$, nunc exprimat ſummam omnium $\frac{ds^2}{ydt}$, quæ in ambobus continentur canalibus. Velocitas vero uniformis utrobique, tam in ſimplici quam in combinato canali, erit eadem; [quia terminus, in quo reperitur M, in caſu uniformitatis evaneſcit;] utpote ſemper ea quæ habetur per $z = \frac{\alpha\alpha bba}{\alpha\alpha bb - \beta\beta\omega\omega}$.

IX.

De Preſſionibus quas ſuſtinent latera canalis a liquore transfluente.

Ut recte clareque percipiamus, in quo conſiſtat vis illa quæ exeritur in latera canalis, dum in illo fluit liquor; ſciendum eſt illam vim nihil aliud eſſe, quam quæ originem habet a vi compreſſionis, qua nimirum partes fluidi ſibi invicem contiguæ, ex. gr. EFfe & CFfc, una ad alteram adigitur, unde in ipſo contactu Ff per actionem & reactionem gignitur vis intermedia, quam vocare ſoleo *immaterialem*; quia quaſi extra partes ſe invicem prementes, inter utramque tamen intermedia reſidet, atque ad unam non magis pertinet quam alteram. Hujus vis proprium eſt urgere partem liquoris præcedentem *antrorſum*, ſeu ea verſus qua tendit, ſequentem vero *retrorſum* ſeu ea verſus unde venit; facereque ut pars liquoris ſequens, quæ a viribus tranſlatis propellitur, atque pars liquoris præcedens, cui aliquid accelerationis imprimere debet, acquirant in ipſo contactu æqualitatem virium acceleratricium; quemadmodum idem contingere dudum * monuimus in corporibus ſolidis, quæ diverſis viribus acceleratricibus ſeorſim animata, quando in ſe mutuo agere incipiunt, oritur in eorum contactu vis intermedia *immaterialis* ad utrumque corpus communi jure ſpectans, quæ ita

* Nis. CLXXVII, pag. 262, & CLXXIX, pag. 335, 340.

ita temperet utriusque vim acceleratricem particularem, unam diminuendo, alteram augendo, ut inde in tota massa, combinata ex duobus istis corporibus, resultet una communis vis acceleratrix.

X.

Id vero discriminis est in agendi modo, quod in corporibus solidis directe in se invicem agentibus, vis illa immaterialis agat prorsum & retrorsum, instar elastri alicujus rectilinei quod inter utrumque corpus positum sese expandere conatur: sed in partibus fluidi in se mutuo agentibus, vis immaterialis intercedens considerari debeat tanquam aura elastica, quæ, non tantum in partes oppositas, sed in omnes plagas circumfusas sese exerit: ex quo nunc facile intelligitur, ab hac ipsa vi immateriali provenire pressionem, de qua hic est quæstio, quæ nempe exercetur in latera canalis, & quæ vicissim ab hisce coërceri debet, dum agit libere antrorsum & retrorsum in partes liquoris quibus interjacet.

X I.

Restat igitur ut, secundum datam hanc ideam de vi immateriali, ejus quantitatem vel mensuram determinemus. Sit illa ubilibet in F f quærenda, quam dicamus $= \pi$. Nunc ita procedo: Finge tantisper partem canalis E F f e [durante fluxu] subito auferri, manente reliqua C F f c in statu suo cum omnibus suis circumstantiis, atque eodem momento ad amplitudinem F f apponi novam vim motricem ipsi π æqualem. Concipis utique hoc modo effluxum liquoris ex truncato canali egredientis acceleratum iri [saltem in primo temporis momento] perinde ac si integer mansisset canalis. Quare jam considerabo canalem residuum C F f c tanquam canalem integrum, cujus suprema seu prima amplitudo est y, seu F f, amplitudo alia intermedia N n variabilis $= r$, stratumque adjacens N l $= r\,dt$. Hinc si [Art. IV] pro h substitut y, habebo $\frac{vv(\alpha\alpha yy - \omega\omega ds^2 : dt^2)}{2\alpha\alpha y} =$ vi hydrostaticæ: TAB. XC. Fig. 10.

ticæ: quod enim in primo puncto G dicebatur $\mathfrak{C}$, id in puncto H est $ds:dt$, ratio scilicet tangentis ad subtangentem, & [Art. V] $\frac{y\omega v dv}{\alpha dx}\int\frac{ds^2}{rdt}$ = vi hydraulicæ; ubi in integratione supponitur r continuari ab ω usque ad y.

X I I.

Aggregatum harum duarum virium, hydrostaticæ & hydraulicæ, æquari deberet vi primitivæ p, quæ hic esset [Art. III & VI] gyt, si nimirum hæc sola ageret in liquorem in canali truncato contentum; sed quia π conjunctim agit cum gyt, oportet sane hanc instituere æquationem $\frac{vv(\alpha\alpha yy - \omega\omega ds^2:dt^2)}{2\alpha\alpha y}+\frac{y\omega v dv}{\alpha dx}\int\frac{ds^2}{rdt}$ $= gyt + \pi$. Ex qua statim emergit valor quæsitus ipsius π: Transposito enim gyt, prodit $\frac{vv(\alpha\alpha yy - \omega\omega ds^2:dt^2)}{2\alpha\alpha y}+\frac{y\omega v dv}{\alpha dx}\times$ $\int\frac{ds^2}{rdt} - gyt = \pi$; ubi quoque monendum, in integratione $\int\frac{ds^2}{rdt}$ variabile r sumi debere a B usque ad P; unde pro qualibet assumpta y dabitur $\int\frac{ds^2}{rdt}$, dicatur ergo hoc $= N$, eritque $\frac{vv(\alpha\alpha yy - \omega\omega ds^2:dt^2)}{2\alpha\alpha y}+\frac{Ny\omega v dv}{\alpha dx} - gyt = \pi$. Quoniam igitur ex resolutione æquationis generalis [Art. VII] habetur valor ipsius vv seu $2gz$, is in hac substitutus dabit valorem ipsius π in g, & quantitatibus mere linearibus; scilicet hunc $\frac{gz(\alpha\alpha yy - \omega\omega ds^2:dt^2)}{\alpha\alpha y}+\frac{gNy\omega dz}{\alpha dx} - gyt = \pi$.

X I I I.

Quod si nunc porro scire lubeat, si fistula aliqua, utrinque aperta, in loco quolibet f canali inseratur, erigaturque ad situm verticalem, quousque in illa liquor ascendere debeat, ob hanc pressionem π, quæ facit ut ascendat: attendere convenit, quod π æquivalet ponderi alicujus cylindri ex liquore gravitate naturali

rali g animato confecti, qui pro basi habet amplitudinem Ff seu y, & pro altitudine illam ipsam liquoris in fistula hærentis; unde hæc altitudo erit $= \frac{\pi}{gy}$, ad quam suspensus hærebit liquor in fistula, invariabiliter quidem, postquam velocitas liquoris effluentis ad sensibilem uniformitatem pervenerit; sed antequam hoc fiat [fit autem in momento quasi] ascendere perget liquor in fistula, donec acquisiverit locum suum stabilem, quando nempe liquor effluens non amplius sensibiliter acceleratur.

X I V.

Accidit, in quibusdam casibus, ut valor ipsius π evadat negativus, quando scilicet in illo quantitates negativæ $\frac{-vv\omega\omega ds^2}{2\alpha\alpha y dt^2}$ $- gyt$ prævalent affirmativis $\frac{1}{2}vvy + \frac{y\omega v dv}{\alpha dx} \int \frac{ds^2}{rdt}$; aut jam existente velocitate in sua uniformitate, ita ut $dv = 0$, quando $\frac{vv\omega\omega ds^2}{2\alpha\alpha y dt^2} + gyt$ majus est quam $\frac{1}{2}vvy$: id quod contingere potest, non tantum in illis casibus ubi αy minus est quam $\frac{\omega ds}{dt}$, sed etiam in illis ubi αy majus quam $\frac{\omega ds}{dt}$, modo interim gyt sat magnum sit ut ejus excessus supra $\frac{y\omega v dv}{\alpha dx} \int \frac{ds^2}{rdt}$ superet prioris defectum. Quocunque autem modo id fiat, palam est in ejusmodi casibus compressionem converti in relaxationem, qua fit, ut latera canalis circa Ff, non tantum plane non extrorsum premantur, sed omnino introrsum [si laterum rigiditas non impediat] contrahantur. Unde sequitur, per fistulam canali implantatam, sed ex alto ad imum demissam verticaliter, ubi hiet in vasculum liquore plenum, posse liquorem quasi per suctionem sursum attolli ad altitudinem $= \frac{\pi}{gy}$.

X V.

SCHOLIUM II.

Hactenus non attendimus ad causas quasdam particulares & accessorias [non semper locum habentes] quæ alterare possunt, seu pressiones, seu suctiones π nostra methodo determinatas. Inter tales causas hæc præcipue occurrit, quæ facit ut aqua in motu constituta, offendens in via superficiem immobilem, ei per allapsum imprimat vim, quæ vocatur *vis resistentiæ fluidorum*, proportionalis utique partim quadrato velocitatis, partim quadrato sinus obliquitatis incidentiæ, ut notum est. Eo ipso itaque hæc vis fit insensibilis in canalibus angustioribus oblongis: in iis enim, ob FM fere parallelam ipsi hH, quæ est directio motus fluidi cum venit ad Ff, sicuti in quolibet alio loco Nn, directio Vu fere parallela est ipsis NL, nl, sinus incidentiæ pro nullo reputari potest. In canali ex tubis cylindricis conflato, sinus ille prorsus nihil est, quia directio fluidi omnino est parallela lateribus cylindrorum, per totam canalis longitudinem. Alia insuper causa accessoria, quæ turbare posset effectum a pressione π oriundum, reperitur in canali valde incurvato, in quo quippe liquor celeriter fluens acquirit vim centrifugam [de qua alibi egimus], hæc vis centrifuga majorem redderet pressionem π quam revera est, in parte convexa canalis, sed minorem in parte concava ejusdem. Quocirca, si cui volupe esset experimentum instituere ope fistulæ canali implantandæ; insertio facienda esset neque in convexitate, neque in concavitate curvedinis, sed a latere, ita ut fistula exeat ex canali perpendiculariter ad planum convexitatis & concavitatis, & deinde, si planum illud non sit horizontale, ut fistula quantum opus inflectatur, donec situm verticalem obtineat.

XVI.

X V I.

Corollaria generalia circa velocitates & pressiones.

In effluxu liquoris uniformi & æquabili, æquatio generalis [Art. VI] mutatur, ob $dv = 0$, in hanc $\frac{vv(\alpha\alpha bb - \zeta\zeta\omega\omega)}{2\alpha\alpha b} = gba$, seu $vv = \frac{2\alpha\alpha gbba}{\alpha\alpha bb - \zeta\zeta\omega\omega}$. Unde hoc elegans Theorema deducitur: Si duo sint vasa vel canales, habentes æquales altitudines verticales, æqualesque amplitudines tam supremas quam infimas, qualescunque de cætero figuras habeant canales, & quantumvis dissimiles inter se, dummodo earum centricæ ita sint comparatæ, ut ratio inter α & ζ in uno sit eadem quæ est inter α & ζ in altero vase & canali: Dico ex utroque [subintellige jugiter pleno existente] liquorem, postquam ad æquabilem effluxum pervenerit, effluxurum utrobique eadem velocitate. Quod sane patet ex ipso valore ipsius vv qui est $\frac{2\alpha\alpha gbba}{\alpha\alpha bb - \zeta\zeta\omega\omega}$; utpote in quo amplitudines intermediæ y haud reperiuntur. Sint ex. gr. duo vasa cujuscunque figuræ ABCD, EFGH [*Fig.* 12], quorum lineæ centricæ sint rectæ, & quidem nil refert an sint verticales an obliquæ, aut una magis minusve obliqua quam altera, in omnibus enim his casibus erit utrobique semper $\alpha = \zeta$, dummodo habeant illa duo vasa æquales altitudines verticales a, item æquales amplitudines extremas AD = EH = b, & BC = FG = ω, aut quod sufficit, modo sit AD : EH = BC : FG; sintque illa vasa constanter plena aqua, aliove liquore homogeneo, in quibus nempe utrobique est eadem gravitas g naturalis animans strata; erit velocitas maxima & uniformis aquæ per BC effluentis æqualis velocitati maximæ & uniformi aquæ effluentis per FG. In tali enim casu, habetur utrobique [Art. VI] ob $dv = 0$, & $\alpha = \zeta$, habetur, inquam, $(bb - \omega\omega) z = bba$; adeoque $z = \frac{bba}{bb - \omega\omega}$; conformiter *Co-* TAB. X C. *Fig.* 12.

rollario

rollario 2 Art. VII, & ut alias, in prima Parte, pro vase cylindrico tantum invenimus. Manifestum interim est valorem $\frac{hha}{hh - \omega\omega}$ pro data altitudine a utriusque vasis esse eundem, si ratio inter h & ω utrobique sit eadem, hoc est, si AD: EH = BC: FG. Notandum autem nos hic abstrahere a contractione venæ aqueæ, quæ aliquousque ultra orificium observari solet, in illis præcipue vasis, quæ subito in foramen desinunt in fundo latiori apertum, secus ac fit in illis figuram EFGH habentibus, & quasi in tubum cylindricum convergentibus, in quibus nulla conspicitur sensibilis venæ contractio. Interim, si ejus quoque habenda esset ratio; considerari deberet vas tanquam continuatum ad maximam venæ contractionem, ubi contrahi cessat: atque tunc amplitudo venæ contractæ esset sumenda pro ipso foramine inferiori ω, hujusque distantia ab amplitudine summa pro vera altitudine verticali.

XVII.

TAB. XC. *Fig.* 12. Si jam stantibus iisdem conditionibus, ut in præcedenti, duorum vasorum æque altorum ABCD, EFGH [*Fig.* 12] & in extremitatibus æque amplorum, atque centricas rectas habentium; habeant præterea adhuc tertiam amplitudinem alicubi LM, NO sibi mutuo æqualem, & ab orificiis BC, FG æqualiter distantem: erit non tantum velocitas maxima [per præced.] utrobique æqualis; sed etiam pressiones in LM & in NO æquales erunt; adeoque in fistulis iis in locis insertis atque in situm verticalem inflexis, aqua utrobique ad altitudinem eandem suspensa hærebit. Patet veritas hujus ex æquatione [Art. XII] quæ, ob $a = \mathfrak{C} = \frac{ds}{dt}$, in casu velocitatis uniformis abit in hanc simpliciorem $\frac{vv(yy - \omega\omega)}{2y} - gyt = \pi$, vel (scribendo $2gz$ pro vv) in hanc $\frac{gz(yy - \omega\omega)}{y} - gyt = \pi$, in qua, quia pro utroque vase sunt eadem z, y, ω, g, t, debet utique resultare idem valor

valor ipsius π, proindeque etiam ipsius $\frac{\pi}{gy} = \frac{z(yy - \omega\omega)}{yy} - t$ $= \frac{bba(yy - \omega\omega)}{yy(bb - \omega\omega)} - t$.

XVIII.

Hinc si omnes LM, NO in æqualibus distantiis verticalibus a BC, FG, essent æquales; id quod fieret, si vasa illa duo ABCD, EFGH essent ex. gr. conoidica truncata ejusdem generis, unum rectum, alterum scalenum, in hoc casu non solum velocitates uniformes quibus aqua ex utroque vase efflueret forent æquales, sed etiam pressiones in singulis altitudinibus æqualibus forent æquales, adeoque etiam suspensiones aquæ in fistulis hærentibus haberent in utroque vase eandem altitudinem.

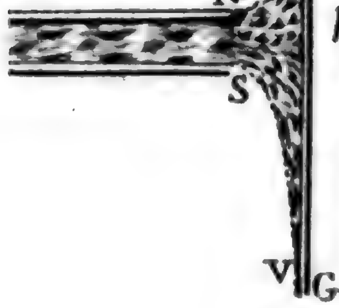
XIX.

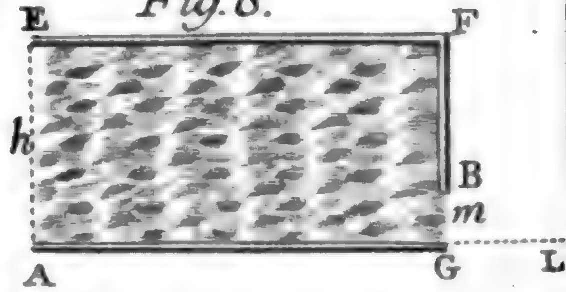
Quoniam æquatio Art. VII inventa pró velocitate generaliter determinanda, sive jam sit æquabilis, sive nondum æquabilis, dat $dx = \frac{\alpha Mbb\omega dz}{\alpha\alpha bba - \alpha\alpha bbz + \beta\beta\omega\omega z}$, substituatur hic valor in æquatione pro pressionibus π [Art. XII] & $2gz$ pro vv, habebimus $\frac{gz(\alpha\alpha yy - \omega\omega ds^2 : dt^2)}{\alpha\alpha y} + \frac{(\alpha\alpha bba - \alpha\alpha bbz + \beta\beta\omega\omega z)gNy}{\alpha\alpha Mbb}$ $- gyt = \pi$: hinc altitudo liquoris in fistula, seu $\frac{\pi}{gy}$ $= \frac{z(\alpha\alpha yy - \omega\omega ds^2 : dt^2)}{\alpha\alpha yy} + \frac{N(\alpha\alpha bba - \alpha\alpha bbz + \beta\beta\omega\omega z)}{\alpha\alpha Mbb} - t$; quæ adeo, pro quacunque determinata z, exprimit generaliter altitudinem liquoris in fistula. Hinc, quod curiosum est, invenitur statim altitudo illa initialis, hoc est, ea quæ observaretur in fistula primo momento quo orificium inferius aperiretur & liquor in procinctu esset exeundi. Cum enim, primo temporis momento, sit adhuc $z = 0$, erit certe [deletis z] $\frac{\pi}{gy} = \frac{Na}{M} - t$.

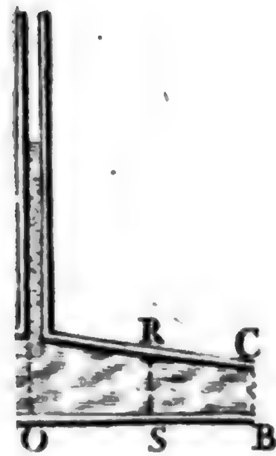
X X.

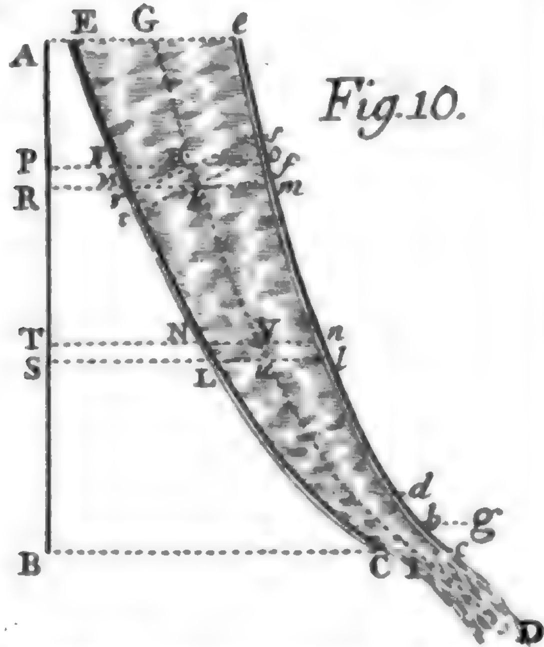
Ante hanc demonstrationem, potuisset aliquis dubius hærere, annon forte, in momento quo orificium BC aperitur, & antequam liquor in actualem motum erumpat, annon, inquam, pressiones in quolibet loco LM adhuc eædem sint, saltem per momentum temporis, quæ modo ante fuerant, cum orificium BC esset adhuc clausum vel obturatum. Verum trita & vulgaris lex hydrostatica ubique recepta docet, pro casu vasis obturati in BC, liquorem, in fistula alicubi in circumferentia strati alicujus LM inserta & verticaliter erecta, hærere suspensum in altitudine $= a - t$, hoc est, in eodem horizonte cum superficie suprema AD liquoris in vase contenti. Nunc autem videmus rem aliter se habere, in casu orificii clausi BC, & aliter in casu aperti ejusdem, etiamsi liquor nondum actualiter effluat. Quia enim N, tanquam pars, minor est quam tota M, erit $\frac{Na}{M}$ minor quam a, adeoque etiam $\frac{Na}{M} - t$ minor quam $a - t$. Unde patet, in primo instanti quo aperitur orificium BC, liquorem jam aliquid quasi amittere, vel potius remittere de sua gravitate, quod impendit non ad premendum latera, sed ad propellendum liquorem; adeo ut latera vasis non amplius tam graviter premat, quam fecerat ante aperturam factam. Interim etiam hic monendum, me abstrahere a causis accessoriis, quæ inventam altitudinem in fistula $\frac{Na}{M} - t$ possent alterare. Ex. gr. figuræ vasis aliquid dandum est: Si enim esset valde amplum & subito convergeret in angustum foramen, tunc sine dubio nostra Theoria posset abludere ab eo quod experientia monstraret: Ratio est quia
TAB. X C. Fig. 10. Theoria supponit, strata Fm, Nl, [*Fig.* 10] eam dispositionem ad motum affectare [etiamsi nondum actu moveantur] ut per totum decursum amplitudines Ff, Nn &c. conservent situm horizontalem, undique ad latera usque extensum, atque insuper linea centrica GHI transeat ubique per puncta media G,

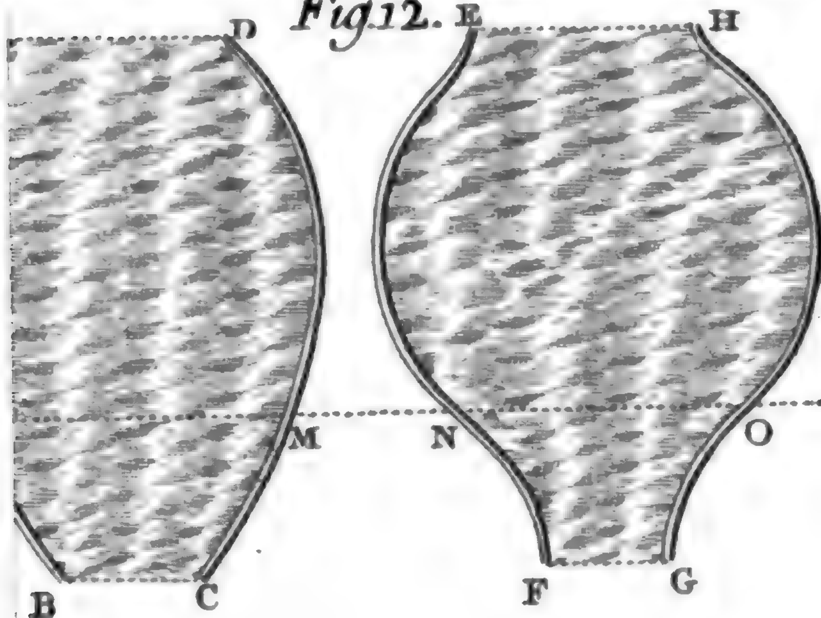
CLXXXVI


Fig. 7.
T
F
N
S
V
G


Fig. 8.
E
F
h
B
m
A
G
L


R
C
O
S
B


Fig. 10.
E
G
e
A
P
R
T
S
N
L
d
g
B
C
D


Fig. 12.
D
E
H
M
N
O
B
C
F
G

G, H, V, I; quod quidem iis in vasis & canalibus, quorum latera paulatim, neque subito, ad orificium inferius convergunt vel divergunt, accurate satis ita obtinere debet ut Theoria docet; sed in aliis valde amplis & desinentibus in fundum amplum, quod pro exitu habet foramen angustum, in hisce, ut probabile est, strata se non extendunt per totas vasis amplitudines, sed aliquousque tantum, prout id requirit qualitas liquoris non perfecte fluidi, sed magis minusve tenacis, ut a frictione minimam, quæ sit possibilis, patiatur resistentiam; relicta nimirum parte liquoris prope latera vasis in quiete, vel sine sufficiente dispositione ad motum. Unde fieri potest ut, in tali vase, gurges continuus seu aliqua quasi cataracta generetur, qualem fere NEWTONUS concepit, quamvis non ea necessaria lege quam indicavit. Intelligitur ex dictis, in hujusmodi vasis non esse considerandam eorum figuram externam & artificialem, sed illam internam gurgitis continui a natura formati, non qualem concepit NEWTONUS, sed quæ optime convenit qualitati vel constitutioni liquoris. In hujus ergo gurgitis superficie ambiente, si posset implantari fistula, observaretur liquoris in illa suspensi altitudo omnino semper ut regula nostra postulat, sive jam sit in motu, sive moveri incipiat liquor in vase.

X X I.

Cum vero non possit facile sensibus observari, quousque in vase peramplo gurges vel cataracta terminetur, seu ubinam ejus superficies ambiens existat; securius erit, si fistula intra vas usque ad meditullium, hoc est, usque ad lineam centricam perpendiculariter penetret; ac dein pars altera fistulæ extra vas sursum inflexa sit verticalis. Hoc enim modo altitudo liquoris in fistula hoc unicum monstrat, quanta sit liquoris compressio in loco lineæ centricæ quem orificium fistulæ attingit, & ubi causæ illæ accessoriæ effectum compressionis alterantes, de quibus supra [Art. XV] egimus, jam nihil officiunt. Id tamen curandum, ut saltem portio fistulæ intra liquorem vasis intruden-

da ſit ſatis gracilis, ne alioquin nimia ejus craſſities libero motui liquoris aliquid impedimenti objiciat. His probe obſervatis, non dubito accuratiſſime obſervatum iri ſequentia; 1°. Generalem altitudinem liquoris in fiſtula fore [Art. XII. & XIII.] $\frac{\pi}{gy} = \frac{z(\alpha\alpha yy - \omega\omega ds^2 : dt^2)}{\alpha\alpha yy} + \frac{N\omega dz}{\alpha u x} - t$, durante adhuc effluxus acceleratione; 2°. ſed ceſſante ſenſibili acceleratione, ubi nempe velocitas pervenerit ad ſenſibilem uniformitatem, fore $\frac{\pi}{gy} = \frac{z(\alpha\alpha yy - \omega\omega ds^2 : dt^2)}{\alpha\alpha yy} - t$; 3°. altitudinem initialem fore [Art. XIX] $\frac{\pi}{gy} = \frac{Na}{M} - t$.

X X I I.

Applicatio Theoriæ noſtræ ad Exempla vaſorum & canalium ſemper plenorum.

Sit vaſis alicujus linea centrica in ſitu verticali. Pro hoc caſu faciliori, ubi $\alpha = \zeta = 1$, habetur [Art. VII] $z = \frac{bba}{bb - \omega\omega} \times (1 - 1 : f^{(bb - \omega\omega)x : Mbb\omega})$; id quod invenitur ex reductione æquationis ibi traditæ, & huic caſui applicatæ $(bb - \omega\omega) \times zdx + Mbb\omega dz = bbadx$, poſito ſcilicet $lf = 1$; adeoque exiſtente $x = \infty$, hoc eſt, in caſu æquabilis effluxus ſeu velocitatis uniformis, erit $z = \frac{bba}{bb - \omega\omega}$; unde fluit Theorema Art. XVI jam demonſtratum. Sit igitur vas ABCD (Fig. 13) cujuſcunque figuræ, cujus centrica vel altitudo verticalis $= a$, habeatque ſibi adaptatum canalem CK conflatum ex pluribus tubis, ex. gr. tribus cylindricis CG, FI, HK in ſitu horizontali poſitis: Sit amplitudo ſuprema AD [ad quam vas cum tubis jugiter plenum ſupponitur] $= b$, amplitudines CE $= m$, FG $= n$, HI $= q$, & foramen ultimi tubi $= \omega$. Dico fore ſemper $z = \frac{bba}{bb - \omega\omega}$, adeo ut nec figura vaſis, nec multitudo tuborum,

TAB. XCI. N°. CLXXXVI. *Fig. 13.*

borum,

borum, nec eorum amplitudines in considerationem veniant], modo prima h & ultima ω sint datæ, ut & data sit altitudo vasis a. Neque etiam scire attinet, utrum gurges, vel cataracta sese extendat per totam vasis capacitatem, an tantum partem aliquam ejus circa lineam centricam occupet. Res est clara per Art. XV, quia canalis CK supponitur horizontalis, adeoque eadem semper est velocitas uniformis, quæ esset si foramen ω immediate ad CE esset adaptatum, ope laminæ alicujus perforatæ ad aperturam CE applicandæ.

COROLLARIUM.

Si ω sit valde parvum respectu h, erit $z = a$, ac proinde velocitas aquæ uniformiter effluentis, quæ maxima est quam acquirere potest, erit æqualis ei quam acquirit corpus grave cadendo ex altitudine $= a$.

XXIII.

Pro invenienda altitudine liquoris in fistula implantanda alicubi in canali horizontali CK; notetur in hoc casu esse $t = 0$, quia t significat excessum altitudinis verticalis loci ubi fistula inseritur, supra altitudinem foraminis per quod liquor egreditur; seu, quod idem est, t significat altitudinem loci insertionis fistulæ supra locum effluxus. Hic autem, ob positionem canalis horizontalem, ipsa quoque centrica quasi horizontalis censetur; præsertim si ejus tubi ex quibus canalis componitur, non admodum sunt ampli, ita ut [Art. XXII] strata liquoris per illos fluentis fiant verticalia. Erit igitur altitudo liquoris in fistula [Art. XIX], seu $\frac{\pi}{gy} = \frac{z(yy - \omega\omega)}{yy} + \frac{N(hha - hhz + \omega\omega z)}{Mhh}$; ob $\alpha = \beta = \frac{ds}{dt}$. In casu velocitatis uniformis, ubi (§. præced.) habetur $z = \frac{hha}{hh - \omega\omega}$; hoc valore substituto pro

 z, eva-

z, evanescet terminus posterior $\frac{N(bba - bbz + \omega\omega z)}{Mbb}$ & prior $\frac{z(yy - \omega\omega)}{yy}$ evadet $= \frac{bba(yy - \omega\omega)}{yy(bb - \omega\omega)}$; prodibit igitur altitudo in fistula $\frac{\pi}{gy} = \frac{bba(yy - \omega\omega)}{yy(bb - \omega\omega)}$. Conferantur quæ in Partis primæ Appendice † sub finem jam invenimus, quamvis per aliam viam. Adeoque pro tubo primo CG, ubi y est m, erit illa altitudo $= \frac{bba(mm - \omega\omega)}{mm(bb - \omega\omega)}$; pro secundo tubo FI, ubi y est n, erit illa $= \frac{bba(nn - \omega\omega)}{nn(bb - \omega\omega)}$; pro tertio tubo HK, ubi y est q, erit altitudo in fistula $\frac{bba(qq - \omega\omega)}{qq(bb - \omega\omega)}$, & sic porro, quotquot essent tubi canalem componentes. Quæ omnia accuratissime respondent experimentis de hac re sumptis.

COROLLARIUM.

Altitudo initialis in fistula est $= \frac{Na}{M}$, ut supra inventum est pro vasis ipsis sine canalibus.

XXIV.

Quod itaque attinet ad altitudinem liquoris in fistula inserenda aliquo in loco ipsius vasis [& si opus producenda usque ad lineam centricam, quam in posterum semper rectilineam verticalem, alteram vero canali ad vas adaptato ut horizontalem supponimus]; sit locus insertionis in aliquo puncto strati indeterminati LM, cujus distantia ab horizonte infimo $= t$, amplitudo gurgitis [si non sit ipsa LM] quæcunque illa sit per experientiam capienda $= r$; habebitur altitudo liquoris in fistula [per Art. XI huc applicatum] $= \frac{z(rr - \omega\omega)}{rr} + \frac{N(bba - bbz + \omega\omega z)}{Mbb} - t$, ubi $N = \int \frac{dt}{r}$, contentum inter BE &

† supra, pag. 431.

& LM, & $M = \int \frac{lt}{r}$, ſed contentum inter BE & AD [Art. VII]. Pro velocitate liquoris uniformiter effluentis, ubi $z = \frac{bba}{bb - \omega\omega}$, ſubſtituatur hic valor pro z, & prodibit altitudo in fiſtula $= \frac{bba(rr - \omega\omega)}{rr(bb - \omega\omega)} - t$, [evaneſcit enim terminus in quo N & M habentur]; addita itaque altitudine t, ſeu loci inſertionis, habebitur totalis altitudo ſummitatis liquoris hærentis in fiſtula ſupra horizontem infimum BE $= \frac{bba(rr - \omega\omega)}{rr(bb - \omega\omega)}$. Quod ſi ω infinite parvum reſpectu b & r, erit illa totalis altitudo $= a$, hoc eſt, ſummitas liquoris in fiſtula eſt in eodem horizonte cum ſuprema amplitudine AD : hoc ita evenire debere, vel hinc quoque colligere poſſemus, quia liquor in vaſe quaſi quieſcit. Cæterum initialis altitudo totalis in fiſtula, exiſtente nimirum $z = 0$, hic etiam eſt $= \frac{Na}{M}$. Quæ omnia egregie inter ſe conſpirant.

X X V.

Ponamus nunc canalem horizontalem CK convergere in conum truncatum, ſeu qualemcunque conoïdicum, habereque majorem baſin vaſi obverſam. Erit, pro velocitate uniformi aquæ effluentis, altitudo in fiſtula quovis in loco inter F & H implantata, [nominando amplitudinem FG $= y$] erit, inquam, altitudo illa [ut Art. XXIII expreſſa] $= \frac{bba(yy - \omega\omega)}{yy(bb - \omega\omega)}$. Hinc ſi minor baſis ſit vaſi applicata, & canalis oblongus non nimis ſubito divergat, ne aqua in illo diffluat, ſed ſtrata ordine inſequentia ſuccedant præcedentibus, ſicuti Theoria rite ſtabilita ſupponit, erit, ob y minus quam ω, preſſio in latera negativa, ac proin mutatur in ſuctionem; qua fit ut, aqua in fiſtula verticaliter deſcendente, & hiante in aquam vaſculo inferiori contentam, attollatur per ſuctionem ad altitudinem =

b b a

$\frac{bba(\omega\omega - yy)}{yy(bb - \omega\omega)}$. Quod si quoque ω majus sit quam b, fit numerator & denominator fractionis negativus, ideoque valor ejus rursus affirmativus, id quod indicat adesse pressionem. Quare existente vase ABCD semper pleno, quod haberet amplitudinem supremam AD minorem orificio canalis conoïdici divergentis, per cujus majorem basin aqua erumpit, observaretur iterum aquam in fistula sursum erecta continuo & sine fine ascensuram esse; in tali enim casu acceleratio aquæ effluentis nunquam cessat, nunquam proin pervenitur ad æquabilitatem velocitatis, quod patet ex generali æquatione [ex Art. VII huc applicata] $(bb - \omega\omega)zdx - Mbb\omega dz = bbadx$; vel clarius ex æquatione Art. XXII exposita in terminis finitis, $z = \frac{bba}{bb - \omega\omega} \times (1 - 1 : f^{(bb - \omega\omega)x : Mbb\omega})$, quæ æquivalet huic $z = \frac{bba}{\omega\omega - bb} \times (f^{(\omega\omega - bb)x : Mbb\omega} - 1)$; ex qua statim liquet, in casu quo ω majus quam b, evadere $z = \infty$, adeoque velocitatem infinitam, quando x est infinitum; secus ac fit si b majus est quam ω.

XXVI.

De brevitate temporis, ab initio effluxus, usque ad velocitatem sensibiliter æquabilem seu uniformem.

Etiamsi, accurate loquendo, requiratur tempus infinitum, antequam fluxus aquæ ex vasis per foramen prosilientis perveniat gradatim ad uniformitatem perfectam & geometricam; Experientia tamen quotidie monstrat aquam, ex vasis præsertim amplioribus, quamvis altitudinis vix trium quatuorve pedum, a primo fluxus momento, tanta rapiditate ad maximam suam & æquabilem fluxus velocitatem convergere, dum effluit per foramen mediocriter licet angustum, ut sensibus percipi non possint incrementa gradualia velocitatis, per quæ transit a quiete ad

ad uniformem & maximam poſſibilem velocitatem quam ſenſibiliter acquirere poteſt. Ut hujus phænomeni rationem reddamus ex noſtra Theoria; conſideremus vas cylindricum vel priſmaticum, ſat magnæ amplitudinis b, & juſtæ altitudinis a; ex quo prorumpat aqua per foramen anguſtum ω in directione horizontali, ſive id fiat immediate ex ipſo vaſe, ſive mediante canali in extremitate orificium ω habente. Supponamus tamen prius, brevitatis gratia, ſcilicet foramen ω in ipſo vaſis latere prope fundum eſſe inſculptum.

XXVII.

Æquatio generalis [Art. VI] pro determinatione velocitatis adhuc creſcentis hæc fuit, $\frac{vv(bb - \omega\omega)}{2b} + \frac{bb\omega vdv}{dx}\int\frac{dt}{y} = gba$, quæ in noſtro caſu, ubi $\int\frac{dt}{y} = \frac{a}{b}$, & $\omega\omega$ juxta bb negligi poteſt, in hanc mutatur $2a\omega v dv = 2gbadx - bvvdx$, ſeu $dx = \frac{2a\omega vdv}{2gba - bvv}$; adeoque elementum temporis $d\theta$, ſeu $\frac{dx}{v}$, erit $\frac{2a\omega dv}{2gba - bvv} = \frac{2a\omega dv : b}{2ga - vv} = \frac{a\omega}{b\sqrt{2ga}}\left(\frac{dv}{v + \sqrt{2ga}} + \frac{dv}{-v + \sqrt{2ga}}\right)$; integrando habetur $\theta = \frac{a\omega}{b\sqrt{2ga}} \times l\left(\frac{v + \sqrt{2ga}}{-v + \sqrt{2ga}}\right) = $ [ob $v = \sqrt{2gz}$] $\frac{a\omega}{b\sqrt{2ga}} \times l\left(\frac{\sqrt{z} + \sqrt{a}}{-\sqrt{z} + \sqrt{a}}\right) = $ [art. XXII] $\frac{a\omega}{b\sqrt{2ga}} \times l((1 + \sqrt{(1 - 1 : f^{bx:a\omega})}) : (1 - \sqrt{(1 - 1 : f^{bx:a\omega})}))$; Eſt enim in hoc caſu $z = a(1 - 1 : f^{bx:a\omega})$. Hinc $\frac{b\sqrt{2ga}}{a\omega}\theta = l((1 + \sqrt{(1 - 1 : f^{bx:a\omega})}) : (1 - \sqrt{(1 - 1 : f^{bx:a\omega})}))$. Tranſeundo a logarithmis ad numeros & rite procedendo, invenietur $f^{bx:2a\omega} =$ huic fractioni $(f^{b\theta\sqrt{2ga}:a\omega} + 1) : 2f^{b\theta\sqrt{2ga}:2a\omega}$.

XXVIII.

Verum ex principio dynamico pro lapſu libero gravium, po-

nendo $C =$ altitudini quam grave libere cadens percurrit tempore dato θ, invenietur $\theta = \sqrt{\frac{2C}{g}}$; substituatur hic valor in fractione modo inventa, & habebitur $f^{bx:2a\omega} =$ huic alteri fractioni $(f^{2b\sqrt{aC}:a\omega} + 1) : 2f^{b\sqrt{aC}:a\omega}$. Nunc quia amplitudo vasis b valde major supponitur quam amplitudo foraminis ω, & altitudo lapsus liberi C uno secundo horario percurrenda $= 15$ pedibus, ac præterea, ex natura curvæ logarithmicæ, f major quam binarius; manifestum est, pro qualibet mediocri altitudine vasis a, hunc numerum $f^{2b\sqrt{aC}:a\omega}$ in immensum superare unitatem, ita ut hæc contemni possit in numeratore fractionis nostræ: erit igitur sensibiliter $f^{bx:2a\omega} = f^{2b\sqrt{aC}:a\omega} : 2f^{b\sqrt{aC}:a\omega} = \frac{1}{2}f^{b\sqrt{aC}:a\omega}$, seu $2f^{bx:2a\omega} = f^{b\sqrt{aC}:a\omega}$, vel sumendo logarithmos $\frac{bx}{2a\omega} + l\,2 = \frac{b\sqrt{aC}}{a\omega}$, unde $x = 2\sqrt{aC} - \frac{2a\omega l2}{b} =$ [ob ω incomparabiliter minus quam b] $2\sqrt{aC}$ = [ponendo $a = 4$ ped. & $C = 15$ ped.] $2\sqrt{60}$ ped. = circiter 16 pedibus. Quod si igitur in æquatione $z = a(1 - 1 : f^{bx:a\omega})$, quæ pro quolibet aquæ effluxu longitudinis x determinat velocitatem, substituamus 4 pro a, 16 pro x, 2 pro f [quamvis, quod rem fortius probaret, f majus sit quam 2] & ponamus amplitudinem vasis b esse ad amplitudinem foraminis ω, tantum ut 100 ad 1, habebimus $z = 4(1 - 1 : 2^{400})$, quod ob stupendam parvitatem fractionis $1 : 2^{400}$, non differre censetur a quatuor pedibus, quæ designat altitudinem vasis, & simul illam a qua grave delapsum acquirit velocitatem æqualem ei quam habet effluxus cum pervenerit ad uniformitatem; unde patet uno secundo temporis elapso, aquam effluentem jam habere sensibiliter illam velocitatem uniformem.

Sed ut melius appareat, quanta promptitudine convergat velocitas effluxus ad uniformitatem; videamus quam parum debeat abludere velocitas aquæ effluentis, acquisita post elapsam

deci-

decimam partem unius ſecundi, a maxima velocitate quam acquirere poſſet, ſi effluxus duraret per infinitum temporis ſpatium. Reducamus pedes ad pollices, & habebimus $a = 48$ poll. atque reperietur C circiter $= 2$ poll. unde x ſeu $2\sqrt{aC}$ circiter $= 20$ poll. & $f^{bx:aa} = f^{2000:48}$, pro quo ſcribo tantum 2^{40}. Erit itaque $z = a(1 - 1:2^{40})$; quod etiamnum, ob imperceptibilem parvitatem fractionis $1:2^{40}$, ab ipſo a denotante velocitatem uniformem neutiquam differre cenſendum eſt.

COROLLARIUM.

Effluxus aquæ ex vaſis amplioribus per anguſta foramina, poteſt tuto conſiderari tanquam æquabilis in momento poſt motus initium.

XXIX.

Theorema hydraulicum generale directe deductum ex principiis hydrodynamicis, demonſtratum per Methodum indirectam virium vivarum.

Ad uberiorem confirmationem bonitatis methodi noſtræ directæ & univerſalis, lubet nunc tradere ſolutionem indirectam, ex Theoria conſervationis virium vivarum eruendam, Propoſitionis principalis de velocitate aquæ erumpentis ex vaſe & canali ſemper pleno, prout illam ſtabilivimus per æquationem Art. VII traditam.

Concipiamus aquam per Cc [*Fig.* 10] egredientem, dirigi ſtatim ad ſitum horizontalem, ut conſiderari poſſit ſine aſcenſu & ſine deſcenſu in ſuo progreſſu: Sit vero x longitudo cylindri aquei ſecundum directionem obliquam ID, habentis pro baſi Cc, qui cylindrus contineat tantam quantitatem aquæ quanta jam egreſſa eſt; erit illa quantitas $= \frac{\omega x}{\alpha}$, cujus differentiale $\frac{\omega dx}{\alpha}$ deſignat particulam aquæ elementarem porro ſtatim egreſſuram ex TAB. XC. *Fig.* 10.

 Cc,

Cc, poſtquam egreſſa eſt quantitas $\frac{\omega x}{\alpha}$. Sit z altitudo verticalis, ex qua grave aliquod libere delapſum acquirat velocitatem quæſitam, quam nempe debet habere particula illa elementaris aquæ $\frac{\omega dx}{\alpha}$; erit, per principium virium vivarum ejus, velocitas $= \sqrt{z}$, & ſubvelocitas $= \frac{1}{\alpha}\sqrt{z}$, unde ſubvelocitas in G $= \frac{\omega\sqrt{z}}{\alpha b}$, ipſa vero velocitas actualis in G in directione tangentis $= \frac{\mathfrak{C}\omega\sqrt{z}}{\alpha b}$. Similiter ſubvelocitas in quolibet puncto H $= \frac{\omega\sqrt{z}}{\alpha y}$, adeoque ipſa actualis velocitas in H $= \frac{\omega dz\sqrt{z}}{\alpha y dt}$.

X X X.

Quoniam autem per ſingulas amplitudines, in toto canali, eodem tempuſculo, eadem quantitas aquæ $\frac{\omega dx}{\alpha}$ perfluere debet, concipienda eſt talis quantitas elementaris $\frac{\omega dx}{\alpha}$ tanquam collocata ſupra ſupremam Ee, in altitudine verticali $= \frac{\mathfrak{C}\mathfrak{C}\omega\omega z}{\alpha\alpha bb}$, ut convenienti tempore cadere incipiens ſua gravitate perveniat ad amplitudinem Ee, ibique reſarciat, eodem momento & eadem velocitate $\frac{\mathfrak{C}\omega\sqrt{z}}{\alpha b}$, particulam ſupremam $\frac{\omega dx}{\alpha}$ deſcendentem in canali, atque hoc modo canalis jugiter plenus conſervabitur, prout conditio Problematis id requirit.

X X X I.

Quod ſi igitur ſingulæ $\frac{\omega dx}{\alpha}$ ſua quæque altitudine $\frac{\mathfrak{C}\mathfrak{C}\omega\omega z}{\alpha\alpha bb}$ collocatæ ſupra Ee fuerint, & jam omnes ſucceſſive delapſæ ſint, per Ee ingreſſuræ, canalem ſemper plenum conſervantes, patet æqualem quantitatem aquæ $\int\frac{\omega dx}{\alpha}$ ſeu $\frac{\omega x}{\alpha}$ per orificium Cc eſſe egreſ-

egreſſam, quam in plano horizontali Cc prolongato moveri concipimus, & ita quidem ut ſingulæ ejus particulæ $\frac{\omega dx}{\alpha}$ habeant ſuam acquiſitam velocitatem $\sqrt{z}$. Quare unaquæque ex particulis $\frac{\omega dx}{\alpha}$ cenſenda eſt deſcendiſſe ex loco primitivo quietis, uſque ad infimum horizontem BCc prolongatum, hoc eſt, ex altitudine $= \frac{\beta\beta\omega\omega z}{\alpha\alpha bb} + AB = \frac{\beta\beta\omega\omega z}{\alpha\alpha bb} + a$. Oportet itaque multiplicare deſcenſus per particulas deſcendentes, ut habeatur $\frac{\beta\beta\omega^3 zdx}{\alpha^3 bb} + \frac{a\omega dx}{\alpha}$; quod integratum dat $\frac{\beta\beta\omega^3}{\alpha^3 bb}\int zdx + \frac{a\omega x}{\alpha} =$ vi vivæ ex deſcenſu univerſo particularum gravium collectæ. Hæc autem æqualis eſſe debet effectui ſuo, qui conſiſtit in aggregato productorum, quæ fiunt ducendo ſingulas particulas in quadrata ſuarum reſpective velocitatum.

XXXII.

Quocirca particulam $\frac{\omega dx}{\alpha}$ jam egreſſam ex canali multiplico per quadratum velocitatis ſuæ, quod eſt z, & habebo $\frac{\omega z dx}{\alpha}$, cujus integrale $\frac{\omega}{\alpha}\int z dx$, exprimit vim vivam ex velocitatibus oriundam totius materiæ aqueæ ex canali egreſſæ; cui addenda adhuc eſt ea quam habet omnis materia intra canalem fluens, & quæ reperitur multiplicando ſingula ſtrata ydt per quadratum ſuarum reſpective ultimarum velocitatum $\frac{\omega\omega z ds^2}{\alpha\alpha yy dt^2}$, adeo ut cujuſlibet ſtrati ydt prodeat vis viva ex motu ſuo oriunda $\frac{\omega\omega z ds^2}{\alpha\alpha yy dt^2} \times ydt = \frac{\omega\omega z ds^2}{\alpha\alpha y dt}$: proinde vis viva omnium ſtratorum $= \frac{\omega\omega z}{\alpha\alpha}\int\frac{ds^2}{ydt}$, per totum canalem ſumendorum = [ob datum per magnitudinem datam totius canalis $\int\frac{ds^2}{ydt}$, quod di-

catur M] $\frac{M\omega\omega z}{\alpha\alpha}$. Sumendo itaque aggregatum ambarum harum virium vivarum ex motu oriundarum, habebimus vim vivam universi systematis aquei $= \frac{\omega}{\alpha}\int z dx + \frac{M\omega\omega z}{\alpha\alpha}$.

XXXIII.

Hinc æquando hanc vim ex motu collectam, cum illa quam modo ante ex descensu particularum collegimus; suppeditabitur nobis hæc æquatio $\frac{\beta\beta\omega^3}{\alpha^3 bb}\int z dx + \frac{a\omega x}{\alpha} = \frac{\omega}{\alpha}\int z dx + \frac{M\omega\omega z}{\alpha\alpha}$, quæ differentiata & a fractionibus liberata, hanc præbet, $\beta\beta\omega\omega z dx - \alpha\alpha hhz dx = M\alpha hh\omega dz - \alpha\alpha hhadx$, vel denique [reductione peracta] hanc $(\alpha\alpha bh - \beta\beta\omega\omega) z dx + \alpha M hh\omega dz = \alpha\alpha hhadx$: omnino ut invenimus per methodum directam [Art. VII].

COROLLARIUM.

Si h vel E e sit amplitudinis permagnæ respectu ω vel C c, æquatio inventa abit in hanc $\alpha z dx + M\omega dz = \alpha a dx$, & pro effluxu uniformi in hanc $z = a$. Sin vero E e non quidem sit valde magnæ amplitudinis respectu C c, velimus tamen ut aqua nova succedat continuo descendenti intra canalem, non cum velocitate acquisita aliqua, sed ex quiete incipiat succedere, ita ut etiam hoc modo canalis semper plenus conservetur; poterit hoc effectui dari, si ad E e (*Fig.* 14) adaptatur vas amplissimum sed valde parvæ altitudinis, quod sit aqua plenum. Effluet utique ex illo aqua sumens motum ex quiete, & tamen influens in canalem cum debita velocitate, conservabit jugiter ejus plenitudinem. Res ipsa patet ex figura: Ubi canalis E C c e adaptatum habet vas cylindricum amplissimum A Q V K, cujus altitudo A K vel Q V valde parva supponitur, ita ut altitudinem verticalem A B canalis E c sensibiliter non augeat, id est, ut K B sumi possit pro A B, & tamen capacitas A V hujus

TAB. XCI. N°. CLXXXVI. *Fig.* 14.

jus vasis cylindrici permagnam aquæ copiam contineat. Quare ut jam velocitas aquæ effluentis per C c determinetur, non amplius E e, sed K V, sumenda est pro prima amplitudine b, manente interim altitudine verticali a canalis, quia per hypothesin sensibiliter non differt AB a KB. Hoc pacto, habebimus semper pro velocitate uniformi $z = a$, hoc est, eam velocitatem quam grave acquireret cadendo libere ex altitudine $= a = $ AB, seu KB.

XXXIV.

Exemplum singulare determinandi motus aquæ in canali conoidico verticaliter descendentis, ubi nihil effluit nullaque nova aqua descendenti succedit.

Esto Hyperbola BEG (*Fig.* 15) inter asymptotos orthogonales, unam verticalem AM, alteram horizontalem AH; cujus applicatæ DI, EK, FL, GM, &c. designent amplitudines ipsas canalis conoidici in infinitum continuati, qui generari intelligitur, si alia hyperbola inter easdem asymptotos [cujus applicatæ sunt ut radices hyperbolæ ordinariæ prioris] descripta circa asymptoton verticalem, tanquam circa axem, revolvitur. Concipiatur in loco quocunque canalis dari partitionem aquæ, designatam per aream hyperbolicam DK, a quiete descendere incipientem, & eam descendendo pervenisse in locum quemlibet alium FM; ita ut per consequens FM sit $=$ DK. Quæruntur velocitates in GM, in FL, &c. & velocitas cujuscunque strati intermedii POop?

TAB. XCI. N°. CLXXXVI. *Fig.* 15.

XXXV.

Sit unumquodque rectangulum coordinatarum, hoc est, productum amplitudinis cujusque PO per altitudinem conoidis AO $= aa$; item abscissæ datæ AI $= b$, AK $= c$; descensus quilibet assumptus AL amplitudinis superioris $= x$. Erunt, ex natura

tura hyperbolæ, amplitudo DI $= \frac{aa}{b}$, EK $= \frac{aa}{c}$, FL $= \frac{aa}{x}$, & præterea [ob DK = FM] AM $= \frac{cx}{b}$, proinde GM $= \frac{aab}{cx}$; ipſaque area vel potius ſolidum DK vel FM $= aa(lc - lb)$. Erit porro [calculo docente] centri gravitatis areæ DK diſtantia ab horizonte AH $= \frac{c-b}{lc-lb}$, & diſtantia centri gravitatis areæ FM [nota, per aream ſemper ſolidum me intelligere] ab eadem AH $= \frac{x(c-b)}{b(lc-lb)}$. Hinc deſcenſus centri gravitatis ex ſitu DK in ſitum FM $= \frac{(x-b)\times(c-b)}{b(lc-lb)}$, multiplicetur per quantitatem aquæ deſcendentis deſignatam per $aa(lc-lb)$, erit productum $\frac{aa(x-b)\times(c-b)}{b}$ = vi vivæ ex deſcenſu productæ.

XXXVI.

Dicatur jam velocitas in GM $= \sqrt{z}$, erit velocitas in FL $= \frac{b}{c}\sqrt{z}$: Dicatur etiam quælibet AO $= y$, erit PO $= \frac{aa}{y}$, ſtratum Po $= \frac{aady}{y}$, ipſaque ejus velocitas $= \frac{by}{cx}\sqrt{z}$. Hujus ergo quadratum ductum in ſtratum Po dat $\frac{aabbzydy}{ccxx}$ = vi vivæ ſtrati Po, cujus integrale debite correctum [ſumendo a, b, c, z & x pro conſtantibus] $= \frac{aabbz}{2ccxx}yy - \frac{aabbz}{2cc}$ = [in caſu y, ſeu AO, $= \frac{cx}{b}$ ſeu AM] $\frac{1}{2}aaz - \frac{aabbz}{2cc}$ $= \frac{aaz}{2cc}(cc - bb)$ = vi vivæ totius maſſæ aqueæ ex motu oriundæ. Comparando hanc cum præcedente, habebimus

aa

$\frac{aa(x-b)\times(c-b)}{b} = \frac{aaz}{2cc}(cc-bb)$; unde per reductionem invenietur $z = \frac{(x-b)2cc}{(c+b)b}$ = quadrato velocitatis in GM; adeoque quadratum velocitatis in FL $= \frac{(x-b)2b}{c+c}$, & quadratum velocitatis cujuscunque strati intermedii Po [pro abscissa AO seu y] $= \frac{(x-b)2byy}{(c+b)xx}$.

COROLLARIUM I.

Stratum infimum EK, descendens ex quiete in situm GM, acquirit majorem velocitatem quam corpus grave libere cadens ex altitudine KM. Est enim $\frac{(x-b)2cc}{(c+b)b}$ majus quam KM, vel quam $\frac{cx}{b} - b$.

COROLLARIUM II.

Sed stratum supremum DI descendens in locum FL, acquirit minorem velocitatem quam grave cadens libere ex altitudine IL. Nam $\frac{(x-b)2b}{c+b}$ minus est quam IL, seu quam $x-b$.

COROLLARIUM III.

Partes ergo inferiores massæ aqueæ fortius, & superiores segnius accelerantur, quam si libere descenderent a sola naturali gravitate animatæ. Quod vel hinc quoque citra calculum prævideri poterat, quia partes aquæ in locis angustioribus premuntur ab incumbentibus, atque sic ad majorem accelerationem incitantur; contra vero renituntur partibus iis quæ occupant loca ampliora, atque ita superiores in acceleratione sua naturali retardantur.

Corollarium IV.

Datur itaque alicubi ſtratum P o intermedium, quod nec incitatur nec retardatur, ſed eodem ritu acceleratur, ac ſi libere deſcenderet. Hoc autem ut determinetur, facio ut AL ad AO, ſeu ut x ad y, ita AI ſeu b ad Aω, quæ erit $\frac{by}{x}$, eritque $\pi\omega$ ſitus primitivus ſtrati P o. Proinde ωO, ſeu $y - \frac{by}{x}$, eſt altitudo per quam deſcendit ſtratum P o. Ut igitur acceleratio hujus ſtrati ſit = naturali, oportet tantum facere $y - \frac{by}{x} = \frac{(x-b)2byy}{(c+b)xx}$; nunc prodibit $y = \frac{(c+b)x}{2b}$; id quod oſtendit diſtantiam AO eſſe mediam arithmeticam inter AL & AM; ſicuti Aω eſt media arithmetica inter AI & AK: adeoque LO = OM, & Iω = ωK. His itaque in locis, ſtratum intermedium P o tantundem premitur deorſum verſus ab incumbente aqua FO, quantum ſurſum verſus reprimitur ab aqua ſubjecta p M; ita ut haud aliter deſcendat, quam ſi libere deſcenderet a ſola gravitate naturali animatum. Cæterum & hoc quoque obſervandum, in iiſdem his locis fieri maximam aquæ compreſſionem; unde concludimus, ſi in loco ſtrati P o inſereretur fiſtula verticaliter, fore ut aqua in illa ad majorem altitudinem a loco inſertionis aſcenderet, quam ſi inſereretur in cujuſlibet alius loci ſtrato inter FL & GM. Etenim altitudo in fiſtula dependet a ſola aquæ compreſſione, ut ex ſupra explicatis patet.

XXXVII.

Collatio hujus ſolutionis per vires vivas, cum ea quæ elicitur per methodum noſtram directam ex principiis mere dynamicis petitam.

In Scripti hujus hydraulici Parte ſecunda Art. VII* dedimus per

* ſupra pag. 437.

per principia dynamica æquationem generalissimam pro determinatione velocitatis, nempe hanc $(\alpha\alpha hh - \mathfrak{CC}\omega\omega)\, zdx + \alpha Mhh\omega dz = \alpha\alpha hhadx$. Sed ibi supponitur vas vel canalis semper plenus, succedente nimirum continuo liquore novo, eadem velocitate sese adjungente illi qui in suprema amplitudine jam jam descendit, ipseque canalis existit datæ & determinatæ altitudinis verticalis. Cum vero, in præsenti exemplo, canalis sit indefinitæ altitudinis, in quo quippe pars tantum liquore plena FM locum suum semper mutat, habetque proin altitudinem suam LM singulis momentis variabilem; adeo ut non statim videatur hujus exempli casum contineri sub formula illa inventa Art. VII; cum præsertim nullus novus liquor hic succedat descendenti, sed una eademque semper ejus quantitas DK vel FM in canali conservetur; modo hunc, modo alium locum occupans.

XXXVIII.

Interim monstrabimus, quo pacto, per aliquam mentis fictionem, præsens casus reduci possit ad leges hypotheseos Art. VII stabilitæ. Considerandum nempe spatium primitivum DEKI sub specie canalis datæ altitudinis IK, cujus amplitudo superior est DI, inferior EK; utraque data & determinata: Jam ex EK dum liquor fluit, occupaturus loca inferiora canalis prolongati; fingo per supremam amplitudinem DI subingredi fluidum aliquod, tam gravitatis quam omnis inertiæ vel resistentiæ expers, quod, quamvis tale in rerum natura non detur, tamen ita fingi potest, ut nihil aliud agat quam supplere spatium quod a liquore descendente vacuum relinqueretur. Hoc ita præsupposito, descenderit jam liquor realis ex DK in locum FM: Hujus singulorum stratorum PO vires, tum hydrostaticas tum hydraulicas, transfero ad supremam amplitudinem DI, ubi premat fluidum fictum, quod occupat spatium DFLI, eundemque effectum præstare debet, quam præstat vis a gravitate oriunda liquoris realis FM pariter translata ad amplitudinem supremam

 DI,

DI, & hæc eſt illa vis quam vocavi p ſeu gha: omnia applicando ad mentem Theoriæ noſtræ in Scripto hoc hydraulico expoſitæ. Atque ſic nullæ aliæ vires in computum venient, quam quæ reſultant a gravitate & motu liquoris realis, fluido ficto nihil omnino contribuente, & nullum alium in finem inſervientе, quam ut tranſmittat vires translatas ad depellendum liquorem realem FM.

XXXIX.

Nihil igitur aliud reſtat, quam ut debita fiat applicatio methodi expoſitæ in Art. IV, & V; eum in finem ut accommodetur ad exemplum propoſitum: ubi ſtatim patet, eſſe $\alpha = \mathfrak{C} = 1$; reliquæ vero litteræ deſignant hic ea quæ ſequuntur, ſcilicet $b =$ DI, $\omega =$ EK, a ſeu altitudo liquoris realis $=$ LM, $M =$ ſummæ omnium $\frac{Oo}{IO}$ in altitudine LM contentorum; item $z =$ altitudini ex qua grave libere delapſum acquirit velocitatem v, qua cum liquor realis, ſub initium deſcenſus, vel poſtea fluidum fictum effluit per EK, ac denique $dq =$ progreſſui momentaneo ex amplitudine EK.

XL.

His probe obſervatis, nunc ita procedo: Poſita velocitate per EK $= v$, erit velocitas per FL $= \frac{xv}{c}$, velocitas per GM $= \frac{xv}{b}$; progreſſus momentaneus per GM $= d(AM) = \frac{cdx}{b}$, progreſſus per PO $= d(AO) = \frac{ydx}{x}$, progreſſus per EK ſeu $dq = \frac{cdx}{x}$; qui progreſſus omnes cum debeant eſſe ſimultanei, ſunt utique in ratione reciproca amplitudinum, ſicuti & ipſæ velocitates adeoque in ratione directa diſtantiarum ab horizontali AH. Quærenda jam eſt, ad imitationem Art. IV [exiſtente hic $\alpha = \mathfrak{C} = 1$] vis hydroſtatica, quæ exprimitur per ſemiſſem amplitudinis

dinis supremæ DI multiplicatum per differentiam quadratorum velocitatum maximæ per GM & minimæ per FL. Est autem DI $= \frac{aa}{b}$, velocitas per GM $= \frac{xv}{b}$, & velocitas per FL $= \frac{xv}{c}$, unde tota vis hydrostatica $= \frac{aa}{2b}\left(\frac{xxvv}{bb} - \frac{xxvv}{cc}\right) = \frac{aaxxvv}{2b^3cc} \times (cc - bb)$.

X L I.

Ad imitationem Art. V, vim hydraulicam ita determino. Vim acceleratricem strati indefiniti Po, quam voco γ', multiplico per ejus progressum $\frac{ydx}{x}$, & habebo per principium dynamicum $\frac{\gamma' ydx}{x} = u'du' = \frac{yyvdv}{cc}$; unde vis acceleratrix progressiva $\gamma' = \frac{xyvdv}{ccdx}$, & ipsa vis motrix strati Po, hoc est, γ' Po $= \frac{aaxvdvdy}{ccdx}$, quæ translata ad amplitudinem DI, seu ad $\frac{aa}{b}$, facit $\frac{aaxvdvydy}{bccdx}$, quod integratum dat $\frac{aaxvdvyy}{2bccdx}$ = [corrigendo vel sumendo per omnes yy, quæ sunt contentæ in intervallo LM] $\frac{aax^3vdv(cc-bb)}{2b^3ccdx}$ = vi hydraulicæ. Aggregatum virium hydrostaticæ & hydraulicæ erit $\frac{aaxxvv(cc-bb)}{2b^3cc} + \frac{aax^3vdv(cc-bb)}{2b^3ccdx}$ seu $\frac{aaxx}{2b^3cc}\left(vv + \frac{xvdv}{dx}\right) \times (cc - bb)$, quod virium aggregatum debet esse æquale vi primitivæ translatæ ex gravitate stratorum oriundæ. Habetur autem vis primitiva translata cujuslibet strati Po, faciendo ut PO ad DI, seu ut AI ad AO, hoc est, ut b ad y, ita $g \times$ Po seu $\frac{gaady}{y}$ ad $\frac{gaady}{b}$, quod debite integratum per intervallum LM dat $\frac{gaax(c-b)}{bb}$ pro tota vi primitiva translata.

XLII.

Lucramur ergo æquationem inter aggregatum virium hydrostaticæ & hydraulicæ, atque inter vim primitivam translatam, quæ æquatio ita se habet $\frac{aaxx}{2vcc}(vv+\frac{xvdv}{dx})\times(cc-bb)=\frac{gaax(c-b)}{bb}$, unde dividendo per $\frac{aax}{bb}(cc-bb)$ prodit hæc altera $\frac{x}{2bcc}(vv+\frac{xvdv}{dx})=\frac{g}{c+b}$, vel reducendo, hæc, $xvvdx+xxvdv=\frac{2gbccdx}{c+b}$; atque integrando, & corrigendo debito modo [ut AL, vel x, existente $=$ AI vel $=b$, ipsum v sit $=0$] habebitur $\frac{1}{2}xxvv=\frac{2gbccx-2gbbcc}{c+b}$, aut scribendo, secundum legem dynamicam, $2gz$ pro vv, & dividendo per g, erit $xxz=\frac{2bccx-2bbcc}{c+b}$, adeoque $z=\frac{(x-b)2bcc}{xx(c+b)}$, quod determinat velocitatem per EK; ex qua nunc determinatur velocitas per quamlibet aliam amplitudinem. Faciendo namque ut GM^2 ad AM^2, hoc est ut cc ad $\frac{ccxx}{bb}$, sive ut bb ad xx, ita $\frac{(x-b)2bcc}{xx(c+b)}$ ad $\frac{(x-b)2cc}{b(c+b)}$, erit hoc $=$ altitudini, ex qua grave libere cadendo acquirit velocitatem quam habet liquor in puncto infimo M. Faciendo porro ut cc ad xx, ita $\frac{(x-b)2bcc}{xx(c+b)}$ ad $\frac{(x-b)2b}{c+b}=$ altitudini unde grave libere delapsum habebit velocitatem eam quæ convenit liquori in supremo puncto L. Ac denique faciendo ut cc ad yy, ita $\frac{(x-b)2bcc}{xx(c+b)}$ ad $\frac{(x-b)2byy}{xx(c+b)}$, indicabit hoc altitudinem ex qua grave libere cadere debet ut acquirat debitam velocitatem, quam liquor habebit in puncto quolibet dato intermedio O. Quæ omnia mirifice conspirant cum iis quæ invenimus per Theoriam virium vivarum.

XLIII.

X L I I I.

Sed & hoc jam præstare possumus, quod non æque facile præstari potest per vires vivas, scilicet invenire quantum liquor inter descendendum in quavis sui parte comprimatur. Vidimus quidem supra in *Coroll.* IV, liquorem, postquam ex situ initiali seu primitivo DK descendit in situm FM, in singulis suis partibus PO diversas pati compressiones; atque earum maximam esse, ubi PO bifariam secat LM: verum ejus quantitatem determinare & cum pondere aliquo dato comparare, nedum in aliis locis, cum scilicet PO dividit LM in alia quacunque ratione, res esset altioris indaginis, si quis id ex natura virium vivarum eruere vellet. Per methodum nostram directam, in capite de pressionibus expositam, haud arduum est quæsitum obtinere, etiam pro hoc peculiari exemplo.

X L I V.

Sit itaque indagandum, quanta vi massa liquoris FM comprimatur in quolibet loco PO, quam vim quærendam hic etiam vocabo π. Ostendi Art. XI & XII, si portio tantum PM, remoto residuo FO, descendere pergeret, sed ita ut non solum a propria gravitate, sed insuper etiam a π urgeretur, fore ut [saltem primo momento] eodem modo acceleraretur, quo accelerari debet tota massa FM a sola sua gravitate. Secetur IK in ω in simili ratione ut secta est LM in O, ita ut AI: $A\omega =$ AL: AO; erit $\pi\omega$ situs initialis ipsius P. Et $\pi K =$ PM. Sit AL ad AO, vel AI ad $A\omega$, ut 1 ad n, proinde $AO = nx$ & $A\omega = nb$. Fingamusque liquorem in πK contentum descendere vi suæ gravitatis, ac præterea vi π, quæ in quolibet loco descensus ipsi convenit, ut acceleratio fiat perinde ac si tota massa DK vi sola suæ gravitatis descenderet. Quare quod erat AL, vel x, id nunc est AO, vel nx; & quod erat AI, vel b, id nunc est nb. Ideoque vires hydrostaticæ & hydraulicæ invenientur,

tur, si nx pro x, & ndx pro dx, item nb pro b scribatur, atque sic habebitur $\frac{aannxxvv}{2n^3b^3cc}(cc - nnbb)$ vel $\frac{aaxxvv}{2nb^3cc}(cc - nnbb)$ = vi hydrostaticæ, nec non $\frac{aan^3x^3vdv}{2n^3b^3ccndx}(cc - nnbb)$ vel $\frac{aax^3vdv}{2nb^3ccdx}(cc - nnbb) =$ vi hydraulicæ. Vis autem per translationem a gravitate oriunda, quæ erat $\frac{gaax(c-b)}{bb}$, nunc est utique $\frac{gaanx}{nnbb}(c - nb)$ vel $\frac{gaax}{nbb}(c - nb)$.

X L V.

Sumendo jam aggregatum virium hydrostaticæ & hydraulicæ; illudque æquando cum vi primitiva translata ex gravitate oriunda $\frac{gaax}{nbb}(c - nb)$, cui addi debet vis compressionis translata ex PO in $\pi\omega$, quæ habetur si facimus ut PO ad $\pi\omega$, seu ut AI ad AL, hoc est, ut b ad x, ita π ad $\frac{x\pi}{b}$, lucramur hanc æquationem $\left(\frac{aaxxvv}{2nb^3cc} + \frac{aax^3vdv}{2nb^3ccdx}\right)\times(cc - nnbb) = \frac{gaax}{nbb}\times(c - nb) + \frac{x\pi}{b}$, quæ ordinata hanc induit formam $\frac{aa}{2nbbcc}\times(d(\frac{1}{2}xxvv)\times(cc - nnbb)) = \frac{gaadx}{nb}\times(c - nb) + \pi dx$. Quoniam autem velocitas massæ diminutæ PM, sed pressæ a vi π, eadem esse debet quæ est velocitas massæ integræ FM, pro qua velocitate modo supra invenimus $\frac{1}{2}xxvv = \frac{2gbccx - 2gbbcc}{c+b}$; scribamus hujus differentiale, quod est $\frac{2gbccdx}{c+b}$ pro $d(\frac{1}{2}xxvv)$, & prodibit $\frac{gaadx}{nb(c+b)}(cc - nnbb) = \frac{gaadx}{nb}(c - nb) + \pi dx$. Dividendo per dx, & transponendo obtinebimus $\pi =$ $\frac{gaa(cc - nnbb - (c - nb)\times(c+b))}{nb(c+b)} = \frac{gaa(cn - c - nnb + nb)}{n(c+b)}$. Quocirca si ad PO inseratur fistula verticaliter erigenda, ut cognosca-

gnoſcatur ad quam altitudinem liquor in illa [ſaltem per tempus breviuſculum] ſuſpenſus hærere poſſet, dividendum eſt π per $g \times PO$, hoc eſt, per $\frac{gaa}{nx}$, ut habeatur $\frac{\pi n x}{gaa} = \frac{x(cn - c - nnb + nb)}{c+b}$ = altitudini liquoris in fiſtula, ex qua altitudine æſtimanda eſt compreſſio abſoluta liquoris in P O. *Q. E. I.*

X L V I.

Quod ſi porro determinare oporteat punctum O in data qualibet L M, ubi intenſitas compreſſionis ſit maxima, id eſt, ubi liquor in fiſtula maximam obtinebit altitudinem; differentianda eſt quantitas inventa $\frac{x(cn - c - nnb + nb)}{c+b}$, ſumto n pro variabili, & reliquis pro conſtantibus; quo facto prodibit $c + b - 2bn = 0$, unde reſultat $n = \frac{c+b}{2b}$, adeoque nx ſeu A O $= \frac{(c+b)x}{2b} = \frac{c+b}{2b}$ AL $= \frac{c}{2b}$ AL + $\frac{1}{2}$ AL $= \frac{1}{2}$ A M + $\frac{1}{2}$ A L. Unde patet punctum O maximæ compreſſionis eſſe in medio inter M & L; plane ut ſupra in *Coroll.* IV conjectando prævidimus.

X L V I I.

Præterea, ſi in expreſſione $\frac{x(cn - c - nnb + nb)}{c+b}$ ſubſtituatur valor inventus ipſius n, qui eſt $\frac{c+b}{2b}$, habebitur ipſa liquoris maxima altitudo in fiſtula $\frac{x(c-b)^2}{4b(c+b)}$. Hinc quia $\frac{1}{2}$ LM, ſeu LO $= \frac{x(c-b)}{2b}$, erit L O, ſeu altitudo liquoris in canali ſupra punctum O ubi fiſtula inſeritur, ad altitudinem liquoris in fiſtula $= \frac{x(c-b)}{2b} : \frac{x(c-b)^2}{4b(c+b)} = 2(c+b) : c-b$, ſeu ut duplum ſummæ diſtantiarum primitivarum A K + A I ad earundem ſimplam differentiam, hoc eſt ut 4 A ω ad I K.

XLVIII.

Cæterum, vel sola ratio sana dictat, massam liquoris descendentis FM in extremitatibus FL & GM nullam pati compressionem, adeoque altitudinem in fistula tam in L quam in M inserta debere esse nullam. Et hoc ipsum quidem per formulam confirmatur; nam in priori casu, ubi $n = 1$, mutatur formula $\frac{x(cn - c - mb + nb)}{c + b}$ in hanc $\frac{x(c - c - b + b)}{c + b} = 0$; in posteriori vero, ubi $n = \frac{c}{b}$, eadem mutatur in hanc $\frac{x(cc - cb - cc + cb)}{b(c + b)}$ etiam $= 0$.

XLIX.

SCHOLIUM III.

Hoc exemplum liquoris sua gravitate descendentis in Tuba hyperbolica ad indefinitum continuata, quod speciminis loco fusius pertractavi, monstrat quomodo sit procedendum in aliis ejusmodi casibus, ubi liquor intra canalem sufficienter longum eadem semper quantitate delabitur, ita nempe ut nihil inde effluat, nihilque pariter novi liquoris subingrediatur. Aperit insuper aditum ad solutionem Problematum de determinando motu oscillatorio fluidorum in tubis recurvis vel reflexis, cujuscunque sint figuræ atque amplitudinis utcunque variantis: In talibus namque tubis seu siphonibus, dum pars quædam fluidi per unum crus descendit, per alterum crus, licet multum dissimile, pars alia fluidi priori æqualis ascendit, hoc est, negative descendit: ita ut perinde ac in tubis continuo deorsum vergentibus eadem semper fluidi massa conservetur. Unde si, mutatis mutandis quantum ad signa in calculo, per eandem methodum quam adhibuimus in allato exemplo procedatur, haud arduum erit pervenire ad supputationem velocitatis fluidi transfluentis in singulis locis, pro quolibet ejus descensu vel ascensu: unde omnia reliqua dependent.

L.

L.

De Vasis quæ interea dum emittunt liquorem per aperturam in fundo vel prope fundum factam, nihil novi liquoris desuper influentis accipiunt.

Pro istis casibus vasorum, quæ emittendo liquorem, sed nullum alium accipiendo, tandem deplentur atque evacuantur; posset adhiberi methodus illa, quam explicui §. XLIV & sequentibus; ubi agebatur de determinatione motus datæ massæ aqueæ intra canalem hyperbolico-conoidicum continuo delabentis, scilicet ope fluidi fictitii, quod nihil aliud agat quam supplere spatium ab aqua descendente vacuum relictum: ista vero mentis fictione insuper habita atque neglecta, sufficiet in rem præsentem æquatio nostra in §. VII data, $(aabb - \zeta\zeta\omega\omega) \times zdx + aMhh\omega dz = aabbadx$, quam pro vasis semper plenis existentibus valere vidimus. Illa quippe æquatio nullo negotio accommodabitur ad ea quoque vasa, quæ ob nullum novum liquorem influentem paulatim deplentur, atque adeo in quibus suprema liquoris superficies Ee (*Fig.* 10) continuo descendit. TAB. XC. *Fig.* 10.

L I.

Ad imitationem ejus quod pro casu vasis cylindrici jam solutum extat in Parte prima Art. XII*, consideremus hic vas cujuscunque figuræ, in quo superne nullus ingrediatur novus liquor, dum ille qui jam inest per orificium infimum continuo ductu elabitur. Ponamus itaque supremam superficiem descendendo ex situ Ee pervenisse in situm Ff, ad quod momentum determinanda sit liquoris effluentis velocitas: quem in finem ipsa amplitudo Ff, seu y, licet variabilis sumenda est pro suprema amplitudine, cui respondet altitudo BP seu t, quæ & ipsa variabilis est [hoc certe permittit natura translationis virium motricium in fluidis, ut cuilibet attendenti patebit], ipsum

* supra pag. 405.

vero M seu $\int \frac{ds^2}{ydt}$, quod in vasis constanter plenis constans erat, nunc est variabile; capiendum nempe per altitudinem variabilem BP.

Scribatur ergo in æquatione nostra yy pro hh, t pro a, & $\frac{ds}{dt}$ pro ζ, atque prodibit hæc æquatio, quæ desideratur; $(\alpha\alpha yy - \omega\omega \frac{ds^2}{dt^2})\, z\,dx + \alpha yy\omega\, dz \int \frac{ds^2}{ydt} = \alpha\alpha yy t\, dx$. Ex eo vero quod elementum aquæ elabentis $\frac{\omega dx}{\alpha}$ = strato descendenti; $-ydt$ [pono $-ydt$, quia crescente x decrescit t] erit $dx = \frac{-\alpha ydt}{\omega}$. Substituendo igitur hunc valorem pro dx, habebit æquatio hanc faciem $(\alpha\alpha yy - \omega\omega \frac{ds^2}{dt^2})\, z\,dt - \omega\omega y\,dz \int \frac{ds^2}{ydt} = \alpha\alpha yy t\, dt$; quæ pro vasis habentibus centricam verticalem, ubi $\alpha = 1$, $ds = dt$, in hanc abit æquationem simpliciorem $(yy - \omega\omega)\, z\, dt - \omega\omega y\, dz \int \frac{dt}{y} = yy t\, dt$.

L I I.

Ex hac æquatione exemplum ex prima Parte allegatum [Art. XII], ubi vas supponebatur cylindricum, nunc porro ad finem prosequemur, ac quædam notatu digna adjiciemus. Hic igitur vicissim ponendum est h pro constante y, atque $\int \frac{dt}{y}$ erit $\int \frac{dt}{h}$, sive $\frac{t}{h}$, totusque terminus $\omega\omega y\, dz \int \frac{dt}{y}$ erit $\omega\omega t\, dz$; unde æquatio pro casu cylindri recti hanc formam habebit $(hh - \omega\omega)\, z\, dt - \omega\omega t\, dz = hht\, dt$, quæ, per modum integrandi dudum mihi usitatum, dat in terminis finitis valorem quæsitum ipsius $z = \frac{hht}{hh - 2\omega\omega} \times (1 - (t:a)^{(hh - 2\omega\omega):\omega\omega})$.

Hinc statim liquet velocitatem, tam initialem quam finalem, esse nullam, hoc est in casu quo $t = 0$, vel quo $t = a$: unde colli-

colligere eſt alicubi fore velocitatem maximam aquæ, tum effluentis ex vaſe, tum in ipſo vaſe deſcendentis. Ea ut determinetur, quærendum eſt maximum z, quod fiet, quando ſuperficies aquæ in cylindro deſcendit ad eam a baſe diſtantiam t, quæ ſit $= a\left(\frac{\omega\omega}{bb-\omega\omega}\right)^{\omega\omega:(bb-2\omega\omega)}$, id quod duabus viis invenitur; nempe vel differentiando valorem inventum ipſius z more ſolito; vel quod commodius eſt, ponendo, in præcedente æquatione differentiali $(hh-\omega\omega)zdt - \omega\omega t dz = hhtdt$, terminum ſecundum $\omega\omega t dz =$ nihilo; unde prodit $z = \frac{bbt}{bb-\omega\omega}$, qui comparatus cum invento valore generali $\frac{bbt}{bb-2\omega\omega}\left(1-\left(\frac{t}{a}\right)^{(bb-2\omega\omega):\omega\omega}\right)$ dabit, ut dixi, $t = a\left(\frac{\omega\omega}{bb-\omega\omega}\right)^{\omega\omega:(bb-2\omega\omega)}$.

L I I I.

Interim, in caſu particulariſſimo, ubi $bb = 2\omega\omega$, ubi amplitudo vaſis cylindrici ſe habet ad amplitudinem foraminis, ut $\sqrt{2}$ ad 1, hoc incommodi accidit, ut $\frac{bbt}{bb-2\omega\omega}\times\left(1-\left(\frac{t}{a}\right)^{(bb-2\omega\omega):\omega\omega}\right)$ evadat $= \frac{bbt}{0}(1-1)$, nec non ut alterum $a\left(\frac{\omega\omega}{bb-\omega\omega}\right)^{\omega\omega:(bb-2\omega\omega)}$, fiat $= \left(\frac{\omega\omega}{\omega\omega}\right)^{\omega\omega:0}$, ſeu $= 1^{\infty}$; ex quo utroque nihil concludi poteſt. Hoc autem incommodum tollitur per regulam, cum aliqua dexteritate adhibitam, quam olim communicavi cum illuſtri HOSPITALIO, ut videre eſt in Analyſi infinite parvorum, Art. 163. *

Prius enim modo allatum $\frac{bbt}{bb-2\omega\omega}\left(1-\left(\frac{t}{a}\right)^{(bb-2\omega\omega):\omega\omega}\right)$ invenitur pro præſenti caſu $= -2(a-t)\,l\,(a-t)$; alterum vero $a\left(\frac{\omega\omega}{bb-\omega\omega}\right)^{\omega\omega:(bb-2\omega\omega)} = \frac{1}{c}$, aſſumendo ſcilicet a pro unitate, & $lc = 1$; atque hinc utrumque per Logarith-

* Vid. Num. LXXI. pag. 401. *Tom. I.*

micam vulgarem, cujus subtangens $= a = 1$, facillime construitur.

L I V.

De Clepsydris conficiendis.

Figuras vasorum aquas per foramen inferius permittentium hucusque haud aliter tractavimus, quam tanquam datas, ut nimirum erueremus leges secundum quas motus aquarum procederet. Nunc vero lubet inquirere ordine inverso in figuram vasis ad id requisitam, ut aquæ suprema superficies subsidat secundum propositam aliquam legem; ex. gr. ut uniformi celeritate deorsum feratur; unde ex quantitate descensuum duratio fluxus immediate innotescat: qui usus olim fuit apud Veteres frequentissimus Clepsydrarum ad horas dimetiendas institutus. Id autem duobus præcipue modis obtineri potest, unus scilicet est, quo ex quantitate elapsæ aquæ, alter quo ex quantitate aquæ in vase adhuc remanente, de temporis spatio judicari potest. De utroque seorsim agemus.

L V.

Consideremus vasa simpliciora, quæ nimirum habent centricas suas verticales, quarumque æquatio [§. LI] hæc erat $(yy - \omega\omega) \times z\,dt - \omega\omega\, y\,dz \int \frac{dt}{y} = yyt\,dt$; ubi indeterminatæ t & y originem ducunt a loco infimo, seu a foramine ω. Quod si jam velimus facere ut aqua erumpat velocitate uniformi; ponendum est $z =$ constanti c; quo posito, erit $dz = 0$, & ita evanescet secundus terminus $\omega\omega\, y\, dz \int \frac{dt}{y}$, reliquique divisi per dt, dabunt hanc æquationem algebraïcam $(yy - \omega\omega)c = yyt$; unde elicitur $yy = \frac{\omega\omega c}{c-t}$ & $y = \sqrt{\frac{\omega\omega c}{c-t}}$ seu $\sqrt{y} = \sqrt{\sqrt{\frac{\omega\omega c}{c-t}}}$.

COROLLARIUM I.

Ea igitur est vasis natura & figura, ut generari possit ex circum-

cumvolutione Hyperbolæ planæ biquadraticæ descriptæ inter duas asymptotos, quarum una verticalis, altera horizontalis, distans ab orificio ω altitudine $= c$.

COROLLARIUM II.

Altitudo prima, seu t initialis, $= c$, ipsaque amplitudo initialis y est infinita: est enim tunc $y = \sqrt{\frac{\omega\omega c}{c - t}} = \sqrt{\frac{\omega\omega c}{c - c}} = \infty$.

COROLLARIUM III.

Quantitas aquæ remanentis in vase pro quavis altitudine t, seu $\int y dt$, invenietur integrando riteque corrigendo $\int dt \sqrt{\frac{\omega\omega c}{c - t}} = 2\omega c - 2\omega\sqrt{(cc - ct)}$. Hinc quantitas totalis aquæ ab initio fluxus $= 2\omega c$; hoc est $=$ cylindro aquæ cujus basis est ω & altitudo $2c$.

COROLLARIUM IV.

Quod si igitur aquæ effluxuræ ex orificio ω substernatur receptaculum cylindricum capacitatis non minoris quam $2\omega c$; aqua effluxa, in eo receptaculo collecta, æqualibus temporibus æqualiter ascendet, atque ita, altitudine receptaculi in gradus æquales divisa, habebitur Clepsydra.

LVI.

SCHOLIUM IV.

Dissimulandum non est hoc genus Clepsydrarum in praxi vix ullum habere posse usum, ob immanem altitudinem quæ danda esset vasi hyperbolico, ut effluxus durare posset per temporis spatium, etiamsi valde mediocre: quod ex eo satis colligi potest, quia si vas altum esset 15 pedes, id est, si $c = 15$ ped. contineret aquam $2\omega c = 30\omega$, hoc est, columnam aqueam cujus

cujus altitudo 30 ped. super basi ω: cum autem ex orificio ω aqua egrediatur uniformi velocitate debita altitudini 15 pedum, sitque tempus casus per hanc altitudinem non nisi unius tantum minuti secundi horarii, manifestum utique est, intra unum minutum secundum elabi ex vase cylindrum aqueum amplitudinis ω, & longitudinis bis quindecim seu triginta pedum, adeoque tantillo tempore totum vas exhaustum iri. Ut nihil jam dicam de impossibilitate structuræ vasis, quod supponit supremam suam amplitudinem infinitam; cui inconvenienti quidem liceret mederi, prolongando vas satis prope ad asymptoton superiorem horizontalem, ut acquirat amplitudinem multo majorem, quam est ea foraminis ω, quæ dein amplitudo circumdari posset margine usque ad asymptoton assurgente.

L V I I.

Commodiori modo parari potest Clepsydra, per æquabilem descensum aquei strati supremi in ipso vase, cujus adeo investiganda est figura ad id apta, ut elabente aqua per orificium ω, superficies aquæ residuæ in vase æqualibus temporibus æqualiter descendat; adeo ut, diviso axe vasis verticali in partes æquales, superficies dato temporis intervallo percurrat datum numerum partium in scala illa sumptarum. Duo autem sunt casus, quibus intentum obtineri potest: aut enim amplitudo luminis ω tam parva est, ut nullam habeat rationem sensibilem ad amplitudinem in vase y; aut amplitudo illa ω sat magna est, ut sit comparabilis cum qualibet y. Priorem casum, utpote faciliorem atque in praxi utiliorem, nunc tractabimus; de altero postea acturi.

L V I I I.

Patet utique æquationem nostram $(yy - \omega\omega)\, z\, dt - \omega\omega y dz \times \int \frac{dt}{y} = yytdt$ reduci, in casu quo ω valde parvum est ratione y, ad hos duos terminos duntaxat $yyzdt = yytdt$, unde $z = t$, hoc est, in quolibet vase habente foramen ω, nimirum aquam ex illo emanare

nare ea velocitate quæ acquiritur a corpore gravi cadente ex altitudine t, quam aqua residua in vase habet; cujus rei veritatem [a nobis scientifice inventam] Scriptores hydraulici superiorum annorum non nisi per experimenta cognitam habebant. Ea vero semel supposita, facile tunc fuit invenire naturam vasis conoïdici, foramine ω tanquam ejus vertice deorsum spectante, quod hunc præstet effectum, ut quovis momento summa superficies y aquæ residuæ descendat uniformi vel æquabili celeritate. Cum enim velocitates fluidi, in eadem quantitate eodemque tempore per duas diversas amplitudines transfluentis, sint in reciproca ratione amplitudinum, faciendum est $y : \omega = \sqrt{z} : \frac{\omega\sqrt{z}}{y}$, eritque $\frac{\omega}{y}\sqrt{z}$ designans celeritatem superficiei y descendentis, quæ celeritas cum debeat esse constans, ponatur $\frac{\omega}{y}\sqrt{z} = \sqrt{c}$, unde erit $\frac{cyy}{\omega\omega} = z = t$. Sunt autem, in conoidibus rectis, amplitudines nihil aliud quam circuli, quorum areæ y sunt ut quadrata radiorum, seu applicatarum curvæ genitricis quæ sui revolutione circa axem describit conoides quæsitum. Nominando igitur applicatam in curva genitrice $= s$, & radium orificii ω circularis $= b$; itemque aream circuli ad quadratum radii, ut n ad 1, erit sane $y = nss$, $yy = nns^4$, $\omega = nbb$, & $\omega\omega = nnb^4$, atque adeo pro æquatione $t = \frac{cyy}{\omega\omega}$, habebitur $t = \frac{cs^4}{b^4}$ seu $\frac{b^4 t}{c} = s^4$; quæ ostendit curvam genitricem conoidis quæsiti esse Parabolam biquadraticam, in cujus puncto infimo, seu vertice deorsum spectante, orificium ω venam aqueam emittens insculptum esse debet.

COROLLARIUM.

Parameter Parabolæ inventæ est $b\sqrt[3]{(b:c)}$, ubi c est arbitraria; adeoque tam parva assumi potest ut $b\sqrt[3]{(b:c)}$ fieri possit quantumvis magna; eum in finem, ut amplitudines conoidis fiant incomparabiliter majores quam amplitudo foraminis ω. Sic

ergo pro lubitu tanta capacitas conciliari potest vasi, foramenque ω tam parvæ amplitudinis fieri, ut effluxus aquæ sat longo tempore durare queat, antequam vas penitus exhauriatur; ad quod imprimis attenditur in Clepsydrarum structura.

L I X.

Quod nunc spectat ad alterum casum, ubi foramen ω non insensibilis adeo amplitudinis supponitur, ut termini in æquatione universali $(yy - \omega\omega)\, z\,dt - \omega\omega\, y\,dz \int \frac{dt}{y} = yy\,t\,dt$, in quibus ω reperitur, evanescant: oportet sane ut maneant omnes termini, atque tunc ponatur $\frac{cyy}{\omega\omega}$ pro z, & $\frac{2cy\,dy}{\omega\omega}$ pro dz, in eum scilicet finem, ut superficies suprema aquæ in vase descendat celeritate uniformi, quæ celeritas debeatur altitudini arbitrariæ c, quo facto resultabit æquatio resolvenda, quæ hæc est, nempe $(yy - \omega\omega)\, c\,dt - 2c\,\omega\omega\, dy \int \frac{dt}{y} = \omega\omega\, t\,dt$. Sunt quædam indicia, ex quibus statim suspicabar dari quandam curvam algebraïcam, quæ huic æquationi in abstracto sumptæ respondeat; imo post brevem indagationem ista protinus se mihi obtulit $yy = \frac{\omega\omega(t + 3c)}{c}$, & pro curva genitrice hæc $s^4 = \frac{b^4(t + 3c)}{c}$, quæ rursus est Parabola biquadratica, sed cujus abscissæ t initium sumunt, non ab ipso ejus vertice, verum intra eundem in axe, in distantia $= 3c$. Interim inventa æquatio $yy = \frac{\omega\omega(t + 3c)}{c}$, quæ quidem in abstracto satisfacit, ideo satisfacere non potest in hac materia, quia tacitam conditionem non adimplet; quæ conditio in hoc consistit, ut existente $t = 0$, tota æquatio in nihilum abeat, ac proin etiam $\int \frac{dt}{y}$ debeat evanescere, id quod non fit per æquationem $yy = \frac{\omega\omega(t+3c)}{c}$.

Nil

Nil quippe novi est, ut quædam propositio, quæ in thesi est vera, non semper quadret in hypothesi; cum nempe aliquid adimplendum accedit, ad quod, rem sumendo in genere, attendi necessario non requiritur. Vera autem curva genitrix pro quæsita figura vasis conoidici reperietur, si qua arte universaliter resolvi potest æquatio $(yy - \omega\omega)\, c\, dt - 2\, c\, \omega\omega\, dy \int \frac{dt}{y} = \omega\omega t\, dt$; ita ut y per t, vel vice versa t per y determinetur; sive id fiat in terminis finitis algebraïcis, vel exponentialibus, sive demum per quadraturas. Hoc autem negotium, cum hujus loci non sit, aliis, quibus vacat, perficiendum relinquo.

L X.

SCHOLIUM V.

Opportuna jam datur occasio examinandi cataractam *Newtonianam*, quam describit Auctor in Editione secunda *Princip. Math. Phil. Nat. Prop.* 36. Lib. II. pag. 303 & seq. Ubi statim animadvertendum formam quam NEWTONUS tribuit suæ cataractæ ABNFEM [vid. *Fig.* 16, quæ *Newtoniana* est in loco allegato] prorsus eandem esse quam supra inveni [§. LV] pro figura Clepsydræ, quæ aquam per orificium ω emittit celeritate uniformi. Notemus jam, quod ipse NEWTONUS agnoscit, in tali cataracta quodlibet stratum MN, ea cum velocitate descendere, quam acquireret si libere caderet a puncto dato I per altitudinem IO, nulla alia vi quam sua naturali gravitate animatum: unde sequitur strata quidem inter se contigua manere descendendo, sed ita tamen, ut in se mutuo nullam vim exerceant, nec premendo nec resistendo, æque ac si singula pondere suo solitaria descenderent. Compressio itaque illa, de qua supra egi in peculiari capite, nulla erit per totam cataractam *Newtonianam*, neque proin de vi pressionis, quam vocavi π, vel minimum exercebitur in latera AME, BNF, id quod etiam patebit ex ipsa mea formula quam pro π dedi in §. XII. Si

TAB. XCI. N°. CLXXXVI. *Fig.* 16.

enim illa ad caſum præſentem applicetur, comperietur, ut dixi, valorem ipſius π eſſe nullum per totam cataractæ altitudinem. Quid ergo hinc concludi debet? Haud dubie hoc, quod ſi latera cataractæ AME, BNF eſſent rigida, inſtar infundibuli, cum quo NEWTONUS comparat illam, atque ſi quocunque in loco, facto foramine, inſeratur fiſtula ad ſitum verticalem erecta, nihil aquæ transfluentis ex cataracta in fiſtulam ſit ingreſſurum & aſcenſurum; ſicuti fieret, ſi premerentur latera ab aqua transfluente. Interim premuntur latera AME, BNF introrſum verſus axem HG a pondere aquarum ſtagnantium in AMEC, BNFD, per ordinariam legem hydroſtaticam, quæ docet preſſiones in ſingulis locis M, N exercitas eſſe proportionales altitudinibus HO. Cum autem latera cataractæ non ſint rigida, & preſſiones iſtæ aquarum ſtagnantium nullas habeant preſſiones ſibi oppoſitas ab aquis transfluentibus; oportet ſane ut aquæ, quæ ſtagnare ponuntur, & continuo premunt, ſortiantur ſuum effectum, hoc eſt, ut ſe ingerant in cataractam, commiſceantque ſeſe cum ipſis aquis fluentibus. Ergo figura cataractæ deſtruetur, turbabitur, aliterque ſecundum noſtram explicationem aquæ deſcendunt.

Ergo explicatio *Newtoniana*, utpote legibus hydroſtaticis adverſa, ſubſiſtere non poteſt.

EPIMETRUM.

De vi per quam vas retrourgetur, dum aqua ex eo erumpit in directione horizontali.

Veritas eſt receptiſſima *Actionem eſſe æqualem reactioni;* hoc eſt, vim quamlibet externam, quæ agit in corpus quoddam aliudve obſtaculum, ſimul quoque agere retrorſum in plagam directe oppoſitam, quemcunque habeat vel inveniat obicem; ſicuti fieri videmus, quando ex. gr. elaſtrum tenſum inter duo corpora poſitum, ſtatim ac ſoluto vinculo relaxari incipit, æquis viribus pellit corpus utrumque, unum antrorſum, alterum retrorſum.

ſum. Nec aliter fieri obſervamus, dum globus ferreus per accenſum pulverem pyrium magna violentia ex tormento bellico exploditur; ſimul etiam ipſum tormentum in contrariam partem repelli, quamvis multo minori impetu, ob ingentem maſſam tormenti reſpectu ipſius globi.

Pari modo, cum videmus aquam explodi ex vaſe in directione horizontali, ſive id fiat immediate per foramen in latere vaſis apertum, ſive mediante aliquo canali ſitum horizontalem habente, concludere debemus adeſſe aliquam vim ſeu potentiam, quæ exploſionem hanc producat, quæ proin æque valide agat premendo retro in latus vaſis foramini extremo canalis directe oppoſitum. Id unum igitur diſpiciendum eſt, ut rite æſtimetur quantitas ſeu menſura illius potentiæ ultro citroque urgentis. Occurrunt menti ſtatim variæ ideæ, quæ primo intuitu videntur deducere ad quæſitum; ſed cum ſingulæ exhibeant ejus rei menſuras a ſe invicem diſcrepantes, incertum eſt, an aliqua ex illis ſit vera, aut potius annon ſingulæ a vero abludant. Quocirca tutiſſima erit via atque certiſſima, quam inibimus, ſi ex ipſis principiis in hac noſtra Theoria hydraulica ſtabilitis immediate eruamus quæſitum.

Hunc in finem, conſideremus quæ ab initio dicta ſunt de tranſlatione virium motricium ſingulorum ſtratorum aqueorum Fm, Nl, (*Fig.* 10) &c. ad amplitudinem communem ſupremam Ee; ubi oſtenſum eſt iſtas vires, ita collectas in unum, præſtare eundem effectum ad expellendum per aperturam Cc liquorem, licet gravitate deſtitutum, idque eadem velocitate ſingulis momentis, qua id fit modo naturali per gravitatem liquoris ſine tranſlatione deſcendentis. Nunc vero clare concipimus, tranſlationem illam ad amplitudinem ſupremam Ee eſſe arbitrariam; ſiquidem ex eodem principio hydroſtatico, quod aſſumſimus, facile colligi poteſt, poſſe transferri vires motrices ſtratorum ſingulorum ad aliam quamcunque aſſumtam amplitudinem ex. gr. ad Ff, quam ut datam ſeu conſtantem conſiderare licet; nec eſt quod dicas, vires ad illam tranſlatas agere tantum premendo ſtrata inferiora, non vero ſuperiora. Nam dum ſtrata TAB. XC. *Fig.* 10.

ta contigua ita inter se adhærent, ut unum sine altero de loco moveri non possit, haud ægre concipimus, quod propulsa massa aquea inferior FCcf etiam superiorem EFfe simul quasi secum trahere, atque cum ea effectum potentiæ prementis in Ff partiri debeat; adeo ut non alia velocitate elapsurus sit liquor per Cc, quam si stratorum vires motrices ad amplitudinem supremam Ee fuissent translatæ.

His probe perceptis, intelligamus jam vires stratorum transferri, non ad amplitudinem supremam Ee, neque ad aliquam intermediam Ff, sed ad infimam Cc, ita ut potentia resultans ex collectione omnium virium stratorum, dum agit immediate tantum in stratum infimum, hoc tamen totam massam aqueam ECce in motum concitare debeat; eadem prorsus lege, ac si vires motrices ad amplitudinem supremam Ee, vel ad aliam quamcunque Ff, fuissent translatæ. Est autem, ex vulgari principio hydrostatico, summa virium motricium ad quamcunque amplitudinem translatarum proportionalis ipsi amplitudini: proinde, faciendo ut Ee ad Cc, seu ut b ad ω, ita gba, seu pondus cylindri aquei cujus basis est Ee & altitudo verticalis AB, ad $g\omega a$, seu ad pondus cylindri cujus eadem est altitudo a seu AB, & basis ω seu Cc: dicatur hoc pondus $= p$, atque sic habemus quantitatem pressionis p, quacum aqua per orificium Cc expellitur, & quæ pellendo antrorsum, simul nititur retrorsum in directione communi.

TAB XCI. N°. CLXXXVI. *Fig.* 13. Applicatio ut fiat: Esto vas cujuscunque figuræ ABD (*Fig.* 13) instructum canali oblongo CEK, non multum amplo, in situ horizontali jacente. Sit, brevitatis ergo, vasis centrica verticalis, nec refert qualemcunque habeat canalis figuram, sive sit conoïdicus truncatus, sive ex pluribus tubis compositus, cujus extremum orificium in K per quod aqua expellitur $= \omega$. Posito jam vase constanter pleno, vidimus supra, pro determinatione velocitatis v aquæ erumpentis, hanc haberi æquationem $\frac{vv(bb - \omega\omega)}{2b} + \frac{bM\omega vdv}{dx} = gba$; si scilicet vires motrices transferuntur ad supremam amplitudinem b, seu ad AD; unde si

easdem transferamus ad amplitudinem infimam ω prodibit $\frac{vv\omega(bb-\omega\omega)}{2bb} + \frac{M\omega\omega vdv}{dx} = g\omega a = p$, seu ponderi cylindri aquei cujus basis est ω & altitudo $= a =$ altitudini aquæ supra horizontalem BK. Finge igitur in vasis pariete BA, superficieculam Bb e regione oppositam & æqualem foramini K, patietur hæc Bb a retroactione potentiæ fluidum expellentis pressionem ipsi similem & $= p$.

Hæc quidem retropressio p in Bb exercita nascitur in tota sua intensitate, statim ac moveri incipit; hoc est, a primo motus momento, ubi velocitas est adhuc infinite parva, usque dum pervenit ad gradum æquabilitatis, vis illa retropressionis constanter est eadem. Qualiscunque enim est v, semper habetur $g\omega a$ seu $p = \frac{vv\omega(bb-\omega\omega)}{2bb} + \frac{M\omega\omega vdv}{dx}$; unde ab initio fluxus, ubi v est $= 0$, seu infinite parva, erit idem $p = \frac{M\omega\omega vdv}{dx}$; ubi vero v pervenerit ad uniformitatem, ita ut dv sit $= 0$, erit pariter $p = \frac{vv\omega(bb-\omega\omega)}{2bb}$. Ex quo sequitur fore $\frac{M\omega\omega vdv}{dx} = \frac{vv\omega(bb-\omega\omega)}{2bb}$, sumendo scilicet in primo termino v pro velocitate initiali, in altero vero v pro velocitate uniformi. Porro vel hinc quoque patet retropressionem nostram esse æqualem ipsi ponderi cylindri aquei habentis basin ω, & altitudinem eam quam habet aqua in vase supra horizontalem BK, quia notissimum principium hydrostaticum docet amplitudinem CE, per quam ingreditur aqua in canalem CK, premi a pondere incumbentis columnæ aqueæ, cujus basis est ipsa CE atque altitudo supremæ superficiei AD supra EC. Posita itaque amplitudine CE $= m$, & altitudine aquæ in vase $= a$; erit pressio quæ urget aquam in canali a CE versus K $= gma$: factoque, ut amplitudo CE ad amplitudinem aperturæ K, hoc est, ut m ad ω, ita gma ad $g\omega a$, erit, per eadem principia hydrostatica, vis $g\omega a$ illa ipsa quæ aquam cogit ad eruptionem

per

per orificium ω: huic ergo vis directe opposita ex reactione nascens, agensque in Bb, pariter erit $= g \omega a = p$. *Q. E. D.*

Corollarium.

Liquet in vasis constanter plenis vim istam retropressionis esse invariabilem, a primo effluxus momento ad æquabilem usque velocitatem, utpote semper $= g \omega a$. Errant igitur qui illam statuunt variabilem, minorem nempe in effluxu tardiori, majorem in velociori, maximam in æquabili.

N°. CLXXXVII.

PROBLEMA HYDRAULICUM.

TAB. XCI. N°. CLXXXVII. *Fig.* 1. A B *est tubus cylindricus, seu uniformiter amplus & utrinque apertus in* A *&* B. *Sit ille perpendiculariter aliquousque immersus fluido infinito cujus superficies est* LR, *& pars tubi immersa* BC: *Concipiatur totus tubus* AB *eodem fluido plenus, ita ut obducto pollice ad* A *nihil effluere possit. Quæritur nunc, si remoto pollice libertas detur fluido descendendi; quousque infra* LR *sit descensurum, & quousque postea supra* LR *sit iterum ascensurum; hoc est, posito* P *pro termino descensus &* O *pro termino subsequentis ascensus, quæritur longitudo* CP, *ut & longitudo* CO?

Solutio.

Considerandum primo est, partem fluidi in CB contentam nullius esse ponderis, vel potius ejus conatum descendendi a gravitate oriundum destrui a pressione contraria fluidi tubum ambientis; atque ita statim ac aliquid fluidi inter descendendum ex parte prominente AC descendit in partem tubi submersam, illud censendum est protinus amittere suam gravitatem; adeo ut tota vis acceleratrix, singulis momentis, dependeat

deat tantum a pondere ejus partis fluidi quæ in tubo eminente adhuc existit. Unde statim patet descensum fluidi debere accelerari, quamdiu aliquid est in AC; proinde maximam velocitatem fore, cum descenderit ad horizontalem LR; deinde iterum retardari debere, ob prævalentem pressionem fluidi ambientis; donec velocitate penitus destructa in P, cogatur fluidum a pressione externa ambiente rursus ascendere ad O, atque habiturum in C rursus maximam velocitatem: postea ab O altera vice delabetur, sed non ad tantam qua prius profunditatem; mox iterum in altum ascensurum: & ita deinceps continuabit oscillando. Quæritur itaque primus descensus ad P, primusque ascensus subsequens ad O; utpote a quibus omnes reliqui dependent.

Quod attinet ad determinationem descensus; habetur ea per duplicem viam, vel directe ex principiis mechanicis, vel indirecte ex natura virium vivarum. Rem utroque modo ita perago.

PRIMUS MODUS.

Principia mechanica docent, incrementum momentaneum velocitatis haberi, si elementum temporis multiplicetur per vim acceleratricem: elementum autem temporis habetur, dividendo elementum spatii percurrendi per velocitatem acquisitam. Sit itaque tota longitudo tubi $AB = a$, pars immersa $CB = 1$, pars quælibet AE a fluido descendente percursa $= x$, gravitas naturalis, qua scilicet corpora ad descensum naturaliter animantur vel sollicitantur, $= g$. Vocetur velocitas acquisita fluidi delapsi ex A in $E = v$. His ita nominatis, erit pondus fluidi totum tubum adimplentis $= ga$; pondus partis $CB = g \times 1 = g$; pondus partis $CE = g \times CE = ga - g - gx$. Nunc quia pondus partis CB ab æquivalente pressione fluidi ambientis destruitur, restat tantum pondus fluidi CE, quod omne fluidum residuum EB ad descendendum accelerare debet. Erit itaque vis acceleratrix $= \frac{g \times CE}{BE} = \frac{ga - g - gx}{a - x}$; quare $\frac{ga - g - gx}{a - x}$

$\times \frac{dx}{v} = dv$; proinde $v\,dv = \frac{gadx - gdx - gxdx}{a - x} = gdx - \frac{gdx}{a-x}$; & integrando $\frac{1}{2}vv = gx + gl(a - x) - gla$. [*Nota.* Adjicio hic gla correctionis gratia; ut nimirum existente $x = 0$, ubi velocitas nulla est, evanescat ejus valor inventus]. Ut itaque sciatur quousque liquor in tubo descendere debeat, ut iterum v fiat $= 0$; oportet facere $x + l(a - x) - la = 0$; eritque, capiendo AP = radici hujus æquationis, punctum P terminus in quo descensus finitur.

TAB. XCI. N°. CLXXXVII. *Fig.* 2. Radix vero x ope Logarithmicæ habetur hoc modo: Sit Logarithmica HCG, cujus subtangens $= 1 =$ BC = parti immersæ tubi. In BC prolongata capiatur BA = longitudini totius tubi, quousque nempe ab initio plenus est liquore, ex A ducta asymtoto BL parallela AH, occurrens Logarithmicæ in H, atque ex hoc puncto H acta tangenti in C parallela HG, quæ secet curvam in G; unde porro ducatur GP asymtoto BL parallela: erit punctum P terminus ad quem descendet fluidum; & in quo descensus finietur. Demonstratio est facilis. Quia enim $AH = l\,AB = la$, & $PG = -l\,PB = -l(AB - AP) = -l(a - x)$, & $AH + PG = AP$; erit $la - l(a - x) = x$; unde $x + l(a - x) - la = 0$. Quæ est ipsissima æquatio construenda. *Q. E. D.*

SECUNDUS MODUS.

TAB. XCI. N°. CLXXXVII. *Fig.* 1. Ex Theoria virium vivarum idem invenio hunc in modum. Nominando hic iterum (*Fig.* 1) $AB = a$, $CB = 1$, pars indeterminata descensus $AE = x$. Sit altitudo quædam verticalis z, per quam grave libere descendens acquireret velocitatem æqualem illi quam fluidum in tubo delapsum ex A in E acquirit; erit ergo hæc velocitas $= \sqrt{z}$. Abscindendo autem $BF = AE$; clarum est per descensum fluidi ex A in E, columnam AF esse translatam in EB, & tunc singulas ejus particulas habere velocitatem $= \sqrt{z}$; quocirca omnis materia fluidi hanc columnam EB constituens habebit vim vivam =

(*a*

$(a-x)\times\sqrt{z}\times\sqrt{z}=az-xz$; cui addendæ sunt particulares vires vivæ collectim sumtæ singularum particularum in spatio BF contentarum, quæ, descendente fluido ex A in E, successive ex orificio B egressæ sunt, quarum utique aggregatum est $=\int zdx$. Ergo quantitas vis vivæ totius materiæ in motu constitutæ $=az-xz+\int zdx$.

Quia vero hæc vis viva debet esse effectus gravitatis partis fluidi supra horizontem LR existentis, oportet utique quantitatem illam vis vivæ $az-xz+\int zdx$, tanquam effectum, esse æqualem suæ causæ adæquatæ, hoc est, summæ productorum quæ fiunt multiplicando singulas fluidi descendentis particulas per suam cujusque altitudinem, per quam quælibet a gravitate sua deprimitur. Sumta igitur CD $=$ AE, erit DC descensus columnæ AD, adeoque AD $\times$ DC exprimit vim vivam a gravitate oriundam materiæ fluidi in columna AD contentæ, postquam descendit in situm EC, ubi partes inferiores jamjam infra horizontem delapsuræ incipiunt suam gravitatem amittere. Quod autem attinet ad particulas fluidi in DC contentas; singulæ singulares descensus faciunt, antequam ad horizontem LR perveniant, pro earum diversis distantiis ab LR, quæ distantiæ cum exprimantur per indeterminatam x, & quælibet particula ei respondens per dx; erit productum xdx vis viva cujuslibet particulæ a gravitate oriunda, adeoque $\int xdx$ seu $\frac{1}{2}xx=$ vi vivæ collectim sumtæ omnium particularum in CD contentarum; quæ ergo addita ad AD$\times$DC, hoc est, ad $(a-1-x)\times x$ seu ad $ax-x-xx$, habebitur vis viva totalis a gravitate oriunda $=ax-x-\frac{1}{2}xx$; per consequens æqualis inventæ vi vivæ ex motu collectæ $az-xz+\int zdx$. Differentiando itaque provenit $adx-dx-xdx=adz-xdz$, unde $dz=dx-\frac{dx}{a-x}$; rursusque integrando $z=x+l(a-x)-la$. Sed z est proportionale quadrato velocitatis quæsitæ vv. Ergo vv, seu si mavis $\frac{1}{2}vv=x+l(a-x)-la$; omnino ut superiori modo directo invenimus, quod

nempe quadratum velocitatis fluidi descendentis per altitudinem x debeat esse proportionale ipsi $x + l(a - x) - la$.

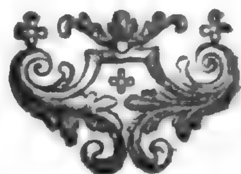
Ut nunc porro determinetur punctum O ad quod, finito descensu, iterum ascendet; advertendum est ante omnia, quod liquor ad supremum usque punctum A esset ascensurus, si particulæ eædem, quæ inter descendendum ex orificio B egressæ fuerant, nunc iterum, inverso ordine, retentis suis velocitatibus acquisitis, singulæ per orificium B subintrarent, & ita quælibet cum præcedentibus junctim in altum protruderetur ab ambientis fluidi pressione; sicuti accidit in omni genere oscillationum, quæ, seposita resistentia, eosdem semper itus & reditus faciunt. Sed quoniam particulæ fluidi egredientes, statim post egressum, intra ambientem liquorem dilabuntur, vel hinc inde divagantur; manifestum est easdem illas particulas suis acquisitis velocitatibus non amplius tubum subingredi, sed eorum loco alias, quæ orificium sine motu obsident, successive in altum rapi, cum præcedenti columna fluidi; quæ particulæ itaque, cum ab initio ingressus nullum adhuc habeant motum, id efficient, ut columna fluidi præcedens cum ipsis adhærentibus segnius ascendat, quam faceret, si particulæ ingrederentur cum aliqua velocitate quæ ascensum juvaret. Hinc ergo liquor non ad A, sed ad punctum aliquod inferius O ascendere valebit. Hujus puncti O altitudo CO supra horizontem ut cognoscatur; concipiamus tantisper particulas ex orificio B dilapsas intra ambientem liquorem, in quo nullam habeant gravitatem, sursum dirigi; adeoque, nulla suæ velocitatis jactura facta, ad horizontem LR pervenire; ex quo postea singulæ, recuperata gravitate, in altum prosiliant, quantum possunt pro sua cujusque velocitate, occupantes ordine locum secundum aliquam curvam LMN. Jam vero, quia quantitas virium vivarum conservari debet, necesse est, ut summa productorum singularum particularum in CO contentarum per suos respective ascensus supra horizontem LR, una cum aggregato productorum quæ fiunt pariter multiplicando singulas particulas in curva

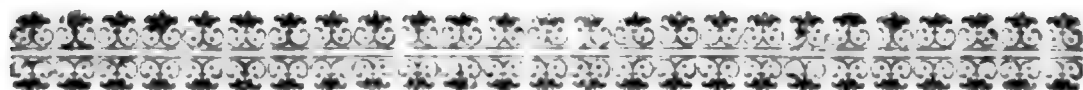
LMN

LMN per suos ascensus & distantias ab LR, sit æqualis summæ productorum similium totius columnæ AC: hanc enim liquor habuit ab initio descensus. Quocirca, si a summa productorum columnæ AC auferatur summa productorum particularum LMN, remanebit summa productorum in columna CO, & hinc ipsa altitudo CO innotescet. Nam summa prior $= \frac{1}{2} AC \times AC = \frac{1}{2} AC^2 = \frac{1}{2} aa - a + \frac{1}{2}$; altera $= \int z dx = ax - x - \frac{1}{2} xx - az + xz =$ [in casu quo x, seu indeterminata AE fit AP, ubi z evanescit] $ax - x - \frac{1}{2} xx$; adeoque $\frac{1}{2} aa - a + \frac{1}{2} - ax + x + \frac{1}{2} xx =$ summæ productorum in $CO = \frac{1}{2} CO^2$: unde $CO = \sqrt{(aa - 2a + 1 - 2ax + 2x + xx)} = 1 + x - a =$ [in eodem hoc casu ubi $x = AP$] CP. Ex quo patet fluidum in tubo ad tantam altitudinem CO ascendere supra horizontem LR, ad quantam profunditatem CP infra LR immediate prius descenderat.

COROLLARIUM.

Cognita CO, cognoscetur, per constructionem supra datam, descensus secundus, & subsequens ascensus secundus: ex hoc postea descensus & ascensus tertii: atque ita porro excursiones singularum oscillationum limitari poterunt.





N^{us}. CLXXXVIII

AD CHRONOLOGIAM PERTINET.

****

De die, qua celebrandum Festum Paschatis, Anno 1724 *.

LEgi, PATRES CONSCRIPTI, Conclusum de Celebratione Paschatis Anni proximi 1724: quod exaratum est die 30 Januarii 1723, a Consiliariis & Legatis Plenipotentiariis Electorum, Principum, & Statuum Evangelicorum in Comitiis *Sacri Romani Imperii*; & ab ipsis cum Illustrissima *Tigurinorum* Republica communicatum, cujus Amplissimus Magistratus illud vobis, Magnifici Domini, perscribi curavit. Ejus contenta summa ponderavi attentione; & ad gratiosa Vestra Jussa, hoc $\frac{13}{24}$ Februarii die hujus Anni 1723, sequentem expositionem submisso obsequio offero.

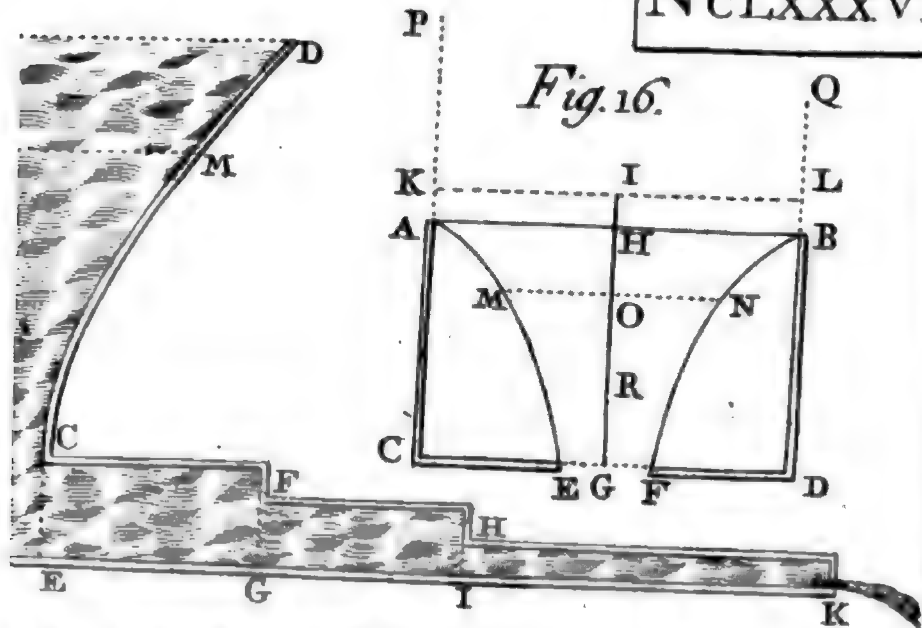
Ante omnia sciendum est, hujus rei disquisitionem non Astronomice solum, verum etiam Theologice & Politice institui; & hinc a me ad quæstionem propositam non perfecte respondcri posse; sed solummodo, quantum ea ad Astronomiam spectat.

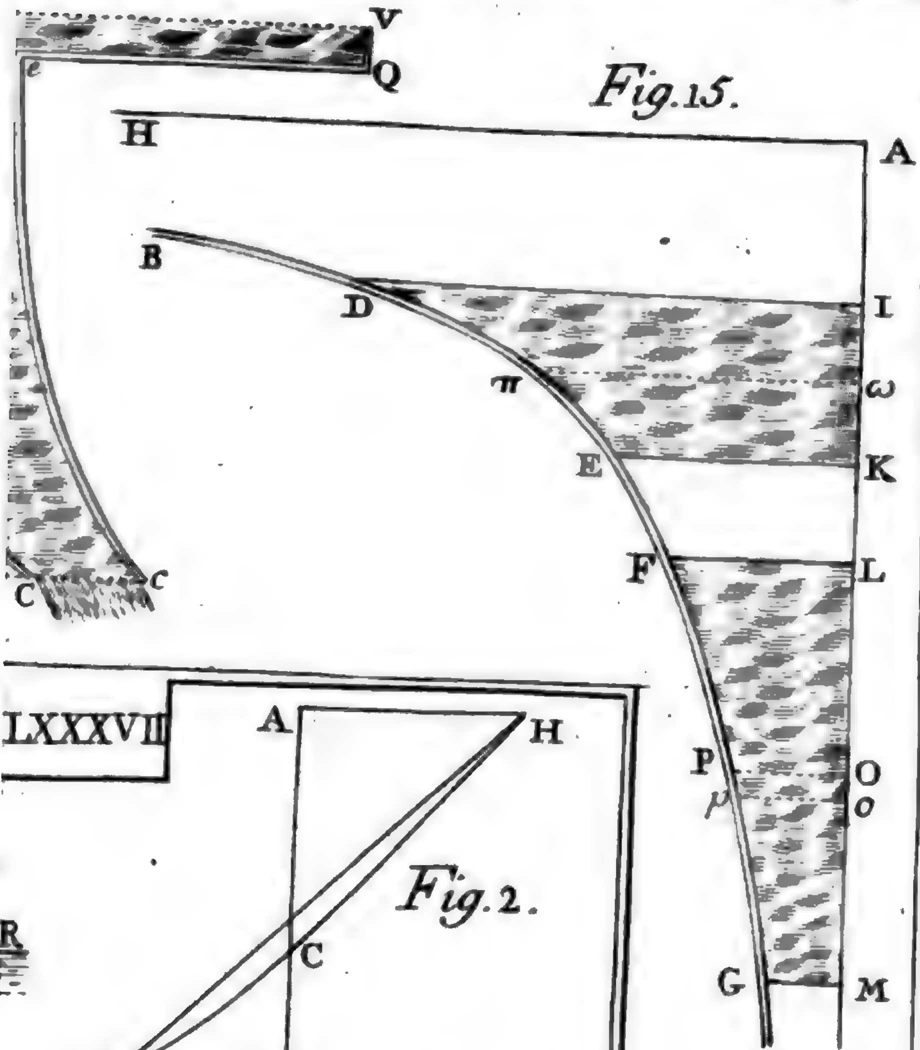
Primo itaque, quod attinet ad caput rei, unde reliqua omnia dependent: An nimirum plenilunium Paschale [quo illud intelligitur plenilunium, quod aut ipso æquinoctii verni tempore contingit, aut illud proxime sequitur] anno Christi 1724, in 8 Aprilis diem incidat. Respondeo ad hanc quæstionem *Affirmando*.

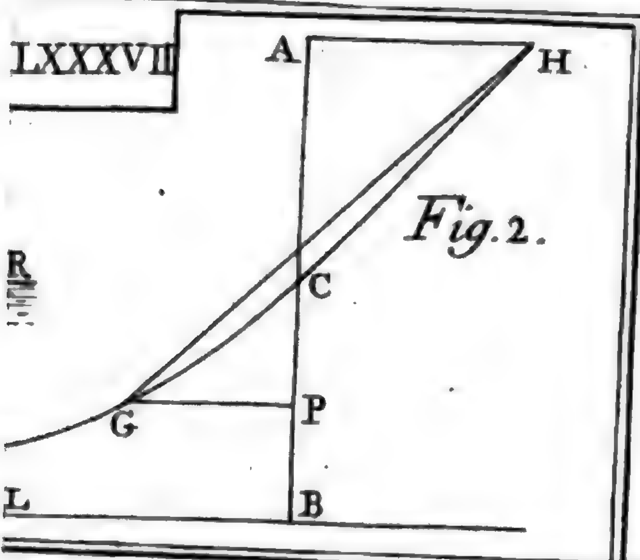
Ut

* Dissertatio ista, Germanico idiomate scripta ad Ampliss. Senatum *Basileensem*, a quodam Auctoris Discipulo latine versa est.

N° CLXXXVI


Fig. 16.
P
Q
K
I
L
A
H
B
M
O
N
R
C
E
G
F
D
D
M
C
F
H
E
G
I
K


Fig. 15.
V
e
Q
H
A
B
D
I
π
ω
E
K
F
L
C
c
P
O
G
M


LXXXVII
Fig. 2.
A
H
C
R
G
P
L
B

Ut autem appareat, hanc meam affirmationem nequaquam niti nuda illorum Aſtronomorum & Mathematicorum aſſertione, quorum in Concluſo Ratisbonenſi fit mentio; opus omni modo eſſe judicavi, ut ipſe prædicti plenilunii diem, horam, & minutum proprio marte ſupputarem, ſine auxilio ullarum Ephemeridum ab aliis computatarum, utpote quibus ſemper tuto credi non poteſt. Facto igitur calculo, inveni prædictum plenilunium Paſchale anni 1724, hic & in omnibus locis ſub noſtro meridiano ſitis, fore die Sabbathi 8 Aprilis, hora 4, minuto 21, poſt meridiem, poſtquam æquinoctium vernum, id eſt, ingreſſus Solis in Signum Arietis, inciderat in 2 minutum horæ 10 antemeridianæ, diei 20 Martii.

Secundo, Jam porro quæritur, an hoc plenilunium Paſchale, ſi per Cyclos fiat computus, incidat, in ſequentem demum Solis [nonum nempe Aprilis] diem, ut volunt illi Aſtronomi, quorum nomina recenſentur in Concluſo Ratisbonenſi. Ad hanc etiam quæſtionem *affirmando* mihi eſt reſpondendum; quoniam Regula vulgaris inveniendi plenilunium Paſchale ope Epactarum id liquido monſtrat; ita ut exiguo valde opus ſit labore.

Mentionem hic facio Epactarum, & non Cycli decemnovenalis, id eſt, Cycli numerorum aureorum, ita dictorum. Tantum enim abeſt, ut Pontifex GREGORIUS XIII hunc Cyclum, ut quidam perperam aſſerunt, in reformatione *Calendarii Juliani* introduxerit, vel præſcripſerit, ut potius Pontifex iſte hunc ipſiſſimum Cyclum, antea in Calendario Juliano uſurpatum, utpote vitioſum aboleverit, & illius loco Epactas introduxerit, quarum ope novilunia & plenilunia multo exactius & accuratius determinantur, quæque proin etiam in *Calendario Gregoriano*, inde ab anno 1582 uſque in hodiernum diem adhibentur.

Quantumvis prope autem Epactæ novilunia & plenilunia indigitent; impoſſibile tamen eſt, ut ſemper præciſe in eundem diem coincidant cum veris & ope calculi aſtronomici inventis noviluniis & pleniluniis; nec ullus unquam Cyclus reperietur tam accuratus, qui non aliquando, ſpatio unius diei, differat.

ferat a computo astronomico, &, una vel altera vice, diem Solis loco diei Saturni exhibeat; cujus erroris quatuor in hoc decimo octavo Seculo habebimus exempla, in annis nempe 1724, 1744, 1778, & 1798.

Quantam autem hæc aberratio unius diei, in determinando Paschatis Festo, producet differentiam, si illud secundum decreta *Concilii Nicæni primi* celebrandum est, quod, anno Æræ *Dionysianæ* 325, a 318 Episcopis habebatur, ex argumento horum Decretorum patebit; quod sequentibus duobus capitibus comprehenditur:

1°. Quod Christiani hoc Festum nunquam debeant eodem die celebrare, quo Judæi Pascha suum celebrant.

2°. Cum itaque Judæi Pascha suum ipso illius plenilunii die celebrent, quod vel in ipsum æquinoctium vernum incidit, vel illud proxime sequitur; Christiani suum Paschatis festum celebrare decreverunt die Solis immediate sequente: quod si vero Pascha Judaïcum in Solis diem incidat; tum illud post octiduum demum celebrare statuerunt.

Hinc patet quidem, cum verum plenilunium Paschale, anno proxime secuturo 1724, incidat in 8 Aprilis diem, qui dies erit Sabbathi, quo proinde Judæi Pascha celebrare deberent; quod Festum Paschatis a Christianis die Solis proxime sequente, nimirum nono Aprilis, sine ulteriore mora celebrandum sit; vi illius, quod *Concilium Nicænum* in posteriore capite decrevit, quo etiam Conclusum Ratisbonæ exaratum nititur.

Quia vero ignotum est, qua regula Judæi per Orbem terrarum dispersi ad determinandum plenilunium Paschale utantur; conjici potest, eos forsitan Cyclum Epactarum adhibere, tanquam rem quæ sine difficiliore calculo etiam a rudioribus peragi potest; cum nulli inter ipsos magni nominis Mathematici existant, qui ipsis verum plenilunii tempus, ope calculi astronomici, indigitare queant. Quod si ita fuerit; Judæi Pascha suum nono Aprilis die, & consequenter, eodem tempore essent celebraturi, quo Christiani Augustanæ Confessionis Pascha suum celebrarent; quod priori capiti intentionis *Concilii Nicæni*

Nicæni adversaretur : quod caput sane Patribus hujus Concilii multo magis curæ fuit, quam posterius, ob odium irreconciliabile veterum Christianorum in Judæos ; quod tam ingens fuit, ut Christiani Orientales, sive Asiatici, qui Pascha suum eodem cum Judæis die celebrarunt, [hinc Quarto-decimani dicti] reliquis abominationi essent, & tanquam Schismatici ex Ecclesia ejicerentur.

In hoc casu igitur Pontificii, qui Pascha suum anno 1724, 16 Aprilis die celebrabunt, in posterius quidem; Protestantes autem in prius & majoris momenti caput impingent. Meo itaque judicio melius fuisset, [quandoquidem omnino a Methodo *Gregoriana* determinandi Pascha recedendum fuit] si Domini Plenipotentiarii Comitiorum Ratisbonensium, neque Statuta *Concilii Nicæni* essent secuti, neque Cyclis *Gregorianis* usi : sed potius, neglecto prorsus plenilunio, quendam Solis diem in principium Veris incidentem, exempli gratia, primum post æquinoctium vernum, aut post 21 Martii determinassent; ac decrevissent, ut eo die in posterum annuatim Festum Paschatis celebraretur. Hac facili methodo, cujus ope quivis plebeius, etiam absque Calendario, quovis anno scire posset quo die Pascha sit celebrandum, omnes lites & difficultates tolli possent ; quæ certe nonnisi superfluis & minime necessariis subtilitatibus ortum suum debent, sicque summo jure vocari possunt difficiles nugæ. Vi hujusmodi subtilitatum, in nimis rigida Canonum *Concilii Nicæni* observatione, accidere posset, ut, in quibusdam locis Orbis Christiani, ubi Conclusum Ratisbonense observaretur, adhuc dies esset Saturni, in aliis autem jam dies Solis, eo ipso momento quo verum astronomicum plenilunium contingeret. Priores itaque, vi hujus Conclusi, eo ipso die Solis ; posteriores vero, demum post octiduum, Pascha suum deberent celebrare ; unde mirabilis orietur confusio.

Hoc autem revera contingere posse illi experientur, qui anno 1778 erunt superstites ; quo anno æquinoctium vernum, secundum computum meum [salvo tamen errore calculi], hic

& in omnibus civitatibus ſub noſtro meridiano ſitis, erit viceſimo die Martii, hora pomeridiana, minuto 49, ſecundum horologia extra urbem adhiberi ſolita †: unde verum plenilunium Paſchale incidet in 11 diem Aprilis proxime ſequentem, qui erit dies Saturni, hora 9 pomeridiana, minuto 56, ſecundum eadem horologia: quo tempore autem media nox in aliis regionibus Orbis Chriſtiani multo magis verſus ortum ſitis jam præterierit, quarum incolæ proinde jam diem Solis habebunt, dum apud nos adhuc dies Saturni erit; quod omnibus notum eſt, qui Aſtronomiam & Geographiam vel e limine tantum ſalutarunt.

Sic, exempli gratia [locum enim nominabo intra Europæ fines ſitum] dicto plenilunii Paſchalis tempore, *Moſcuæ*, [quæ eſt Metropolis potentiſſimi *Ruſſorum* Imperatoris] jam ſeptem minuta poſt mediam noctem erunt præterlapſa. *Moſcovitæ* itaque, etiamſi ſupponamus eos ſe quoque Concluſo Ratisbonenſi accommodare, nihilominus tamen Paſcha ſuum octo diebus ſerius quam nos eſſent celebraturi. Niſi omnium locorum incolæ, neglecto proprio meridiano, communem aliquem meridianum ad calculum dierum, horarum & minutorum adhibere vellent: quem in finem, Corpus Evangelicum Ratisbonæ neceſſario meridianum Uranoburgicum proponit, ſub quo olim Celeberrimus *Danorum* Aſtronomus *Tycho* BRAHEUS obſervationes ſuas condidit. Interea probe ſciendum eſt, nullum meridianum præ alio aliquam prærogativam habere in rei natura fundatam, hincque ſpem non eſſe, ut omnes populi, qui ex ſcopo Corporis Evangelici calculo aſtronomico, utpote cæteris accuratiore, uti vellent, ſe adigi patiantur ad recipiendum alium meridianum a ſuo diverſum, in determinandis diebus & horis. Mihi certe perſuadere non poſſum, vel *Ruſſorum* Imperatorem, vel ejus Patriarcham, conceſſurum ut is dies qui jam a dimidio quadrante horæ apud ipſos cœpit eſſe dies Solis, nihilomi-

† Notum eſt horologia *Baſileæ* una citius hora quam extra urbem tempus indicare: adeo ut in Urbe hora ſecunda numeretur quo momento extra Urbem prima.

hilominus dies Saturni vocaretur; quæ res esset metamorphosis admodum ridicula, non absimilis illi, qua olim summus quidam Pontifex, occasione exortæ tum in populo universalis lætitiæ, dicitur, pro auctoritate sua, diem Veneris mutasse in diem Jovis, ut populo permitti posset esus carnis & libertas genio indulgendi. His omnibus accedit, quod si certus quidam meridianus præscribatur, cui omnes qui jam Conclusum Ratisbonense sequuntur se accommodare debeant, in locis ab hoc meridiano procul dissitis Pascha non poterit celebrari secundum tenorem rigidum Decretorum *Concilii Nicani*, in annis supradictis; quæ tamen decreta in Concluso Ratisbonensi pro fundamento adducuntur. Unde sequitur nimium rigorem parere contradictionem; quoniam accidere potest, ut principia, iisque innixa praxis a Ratisbonensibus præscripta, secum invicem consistere nequeant. Hoc, & alia hujusmodi asystata satis ostendunt melius fore, si vel Dominica vigesimam primam diem Martis proxime sequens, vel alia quædam, methodo supra explicata, celebrationi Paschatis assignaretur, & inde omnia hinc pendentia Festa determinarentur; neglectis tam Canonibus *Concilii Nicani*, quam operosa supputatione plenilunii Paschalis ope calculi astronomici peragenda, ut & Cyclo Epactarum a GREGORIO XIII adhibito. Cum enim Lex Mosaica ceremonialis nos Christianos non amplius obstringat; hi Canones modo memorati, aliæque hominum traditiones, nos multo minus obligabunt. PAULUS enim *Apostolus* diserte ait: *Alius diem a die discernit; alius dies omnes eodem loco habet. Suam quisque sententiam exploratam habeat; qui dierum rationem habet, Domino habet.* Item *qui dierum rationem non habet, Domino non habet.* Rom. XIV. 5. 6. Et ad Galatas. *At nunc Deum cognoscentes, vel potius a Deo cogniti, qui fit ut vos rursus ad infirma egenaque rudimenta convertatis, quibus rursum de integro servire vultis. Dies observatis, & menses & tempora, & annos.* Gal. IV. 9. 10.

Optandum esset, ut Christiani non tam solliciti forent de eligendo die Paschatis, quam de eodem semel electo rite & mo-

re Christianos decente celebrando, in honorem Dei & memoriam gloriosæ resurrectionis Domini nostri JESU CHRISTI.

Quia igitur determinatio diei Paschatis apud Christianos res est mere indifferens & arbitraria; neque sperandum, id quod supra de Dominica vigesimam primam Martii diem proxime sequente proposui, a Statibus Imperii Evangelicis probatum iri & vim Legis obtenturum; audiendæ imprimis erunt rationes politicæ circa eligendam alterutram methodum determinandi Pascha.

Si itaque & mihi licet hac in re, salvo tamen aliorum judicio, mentem meam aperire; haud abs re alienum mihi videtur fore, si nuperrime exarato Concluso Ratisbonensi nos conformemus, non quidem ob causas in eo adductas, sed potius quia Ratio Status videtur requirere ut in puris formalibus a reliquis Evangelicis non secedamus; quandoquidem maxima pars *Helvetiæ* Reformatæ, jam sub finem Seculi præcedentis, se tum publicato Concluso Statuum Imperii Evangelicorum accomodavit, recipiendo Calendarium novum & correctum quod Concluso illo sanciebatur & introducebatur: quo jam tum in Comitiis S. Rom. Imperii decretum fuerat, ut supputatio Paschatis neque per Cyclum *Dionysianum* in *Calendario Juliano* receptum, neque per Cyclum *Gregorianum*, sed unice per calculum astronomicum instituatur; ut ita ipso facto indigitetur Pagos *Helvetiæ* Reformatæ eodem quo Pontificii Calendario uti nolle. Ita ut hodiernum Conclusum Ratisbonense nihil aliud sit, quam executio prioris a Reformatis *Helvetiæ* Pagis jam ab initio hujus Seculi approbati & recepti. Præterea attendendum etiam est ad hodiernum rerum statum. Conamur enim stabilire arctissimam unionem inter Ecclesias Reformatas & Fratres *Augustanæ* Confessionis: quod opus nunquam satis laudandum dissidio nullatenus necessario circa Calendarium facile impediri posset.

Hæc ad mandatum vestrum gratiosissimum de hac materia adducere volui, PATRES CONSCRIPTI; omnia prudentissimo vestro judicio debita reverentia submissurus. Quod si autem

autem hæ meæ considerationes non viderentur sufficere; negotium hoc, quod etiam ad scientias physicas spectat, ulteriori examini nostri Professoris Physices submitti posset; ad exemplum Inclyti Magistratus *Tigurini*, qui in eadem consultatione Professorem Physicæ & Ingeniarium Professori Matheseos associavit. Qui tres Viri illud scriptum composuerunt, cujus Apographum ad Vos, PATRES CONSCRIPTI, transmissum est.

Interea, Vobis apprecando perennem in administranda Republica prosperitatem & omnis generis felicitatem, summa veneratione semper ero,

PATRES CONSCRIPTI,

Die 26. Febr. 1723.

Vester Obsequiosissimus Civis,

JOHANNES BERNOULLI
Doct. & Profess.

N°. CLXXXIX.

DE TERRÆ MOTIBUS
Carolo-Hesychii factis.

I.

EPISTOLA Dni. TEXTORIS AD Dnum. BERNOULLIUM.

Vir Nobilissime & Celeberrime, Honoratissime Domine Professor, Fautor colendissime,

INæstimabili afficior voluptate, præter omnem expectationem occasionem nactus, meum in Te, *Vir Nobilissime & Celeberrime*, affectum plane singularem litteris ad Te meis testandi. Postquam enim, inde ab undecimo die Maii ad minimum usque ad 26 ejusdem mensis diem, perpetuis fere, modo quidem debilioribus, modo autem vehementioribus Terræ motibus, modo in his regionibus inusitato prorsus, fuimus agitati; Serenissimus Princeps, Dominus meus Clementissimus, mihi in mandatis dedit, ut Tibi, *Vir Nobilissime & Celeberrime*, gratiosissime a se salutato, illorum historiam, quanta id fieri poterit ἀκριβείᾳ, exponerem; additis insuper precibus, ut Tu, *Vir Nobilissime & Celeberrime*, quantum id Tibi gravissima Tua permittent negotia, & commode poterit fieri, nos pro Tua humanitate digneris reddere certiores: An & quamdiu hujusmodi Terræ motus *Basileæ* & in vicinia fuerint observati? Item, ut paucis, iisque generalioribus, judicium tuum aperias, quod nobis maximi erit ponderis, ob fiduciam, quam merito in Tuo isto, *Vir Nobilissime & Celeberrime*, acumine ingenii plane singulari collocamus, unde hujusmodi insolita phænomena hoc tempore potuerint oriri? cum nemo nostrum meminerit, ab annis innumerabilibus, in hisce regionibus tale quid accidisse, uti nunc sumus experti, paucis exceptis Terræ tremoribus, & tamen interea nullæ mutationes, quoad causas universales, antea fuerint observatæ, quæ potuerint sufficere producendis hisce effectibus. Additam rei enarrationem non potui exigere ad rigorem geometricum, cum mihi non sit horologium accuratum, quod notet minuta prima & secunda, & cum fuerim sæpissime impeditus negotiis quæ postulabat officii ratio, quibus factum est, ut non potuerim pro rei necessitate observationibus vacare; sed nunc hic, nunc illic, debuerim visitare ægrotos. His accedit, quod subitanei hujusmodi naturæ effectus nullas admittant observationes

vationes accuratas. Nihilominus tamen spero, historiam horum effectuum, quam Tecum communicavi, sufficere explendo desiderio Serenissimi & Gratiosissimi Principis. Cæterum me Tuo favori & benevolentiæ inæstimabili humillime commendo, *Vir Nobilissime & Celeberrime*, & omni, qua possum, nominis Tui veneratione indesinenter ero,

Vir Nobilissime & Celeberrime,

Carolo-Hesychii 28 Maii 1737.

Tuus obsequiosissimus Cultor

TEXTOR

Doctor, Consiliarius aulicus, & Medicus Serenissimi Principis.

NARRA-

II.

NARRATIO PROLIXA
TERRÆMOTUS,

Quem mense Maio Anni 1737 *Carolo-Hesychii* sensimus.

Nota divisionem Barometri, quo sum usus in fine hujus narrationis exhiberi.

POstquam hic amænissima Veris tempestate satis diu cœloque constanter sereno fuimus usi, spirantibus subsolanis; experti tandem sumus æstum extraordinarium, fere qualis esse solet in mense Julio & Augusto.

Baromet. 16 grad. inter cælum subnubilum & serenum.

Subsolanus, æstus vehemens, cælum sudum, malacia.

1 11 Maii, anni currentis, die Saturni, hora circiter 3 matutina, minuto 45, cepimus sentire primum notabilem Terræ motum, cum stridore, qualem equi curribus juncti solent excitare.

2 Hora 2 pomeridiana, minuto 30, sensimus subitaneum Terræ motum, cum tanto fragore, ac si e longinquo vehemens audiretur tonitru, vel ictus tormenti bellici per aerem transiens. Tremor fragorem hunc secutus, & titubatio durabat circiter duo minuta. Cuidam cæmentario turrem operienti pileus ex capite deciderat, & Præfectus cæmentariorum asseverabat turrim in eo motu, quantum quidem oculis dijudicare potuerit, 3 ½ pedes a perpendiculo in alterum latus declinasse. Hic quidem ædificia hoc tremore cum magno fragore huc illuc concussa sunt; unde quibusdam in locis cibi e parietibus, imagunculæ, peræ, & vasa vitrea ex abacis deciderunt; camini concussi sunt; sellæ & specula in quibusdam conclavibus huc illuc titubarunt. Verumtamen postea edocti sumus, hunc Terræ motum *Rastadii*, [quod 5 horis hinc *Argentoratum* versus distat] multo fuisse violentiorem.

3 Hora 10, & rursus hora 12 nocturna, iterum
4 Terræ motum concussionibus notabilem sentiebamus; cum illo tamen non comparandum, quem antea hora 2 & 3 senseramus.

Barometri

Barometrum in eodem gradu.

Turbines procellosæ, sed cito desinentes.

SW. SSW. & WSW. variant.

Cœlum sudum, æstus.

5 Die Solis 12 Maii, hora tertia matutina, minuto 45, vehementem sensimus concussionem & fragorem, cum conquassatione domuum. Toto die quemvis ventorum impetum comitabatur concussio notabilis, præter tremorem perpetuum.

Baromet. in eodem gr.

SW. Turbines, nubes,

Hora 3 pomeridiana, procellæ, æstus.

6 Die Lunæ 13 Maii, $\frac{3}{4}$ post horam tertiam pomeridianam, sensimus ab occidente vehementem fragorem subterraneum & vehementem Terræ motum.

7 Inter horam tertiam & quartam notabilem concussionem.

8 Hora 5, iterum notabilem concussionem.

Baromet. in eodem gr.

SW. & WSW.

Cœlum serenum & sudum, æstus.

9 Die Martis 14 Maii, hora 2 matutina, vehementem Terræ motum cum crepitu parietum in domibus.

Barometer in eod. gr., ut & ventus & tempestas.

10 Die Mercurii 15 Maii, hora circiter tertia matutina, minuto 49, vehementem Terræ tremorem.

11 Hora quinta, minuto 45, vehementem Terræ motum, cum fragore concussione & conquassatione domuum, & subsequente titubatione tria minuta durante.

12 Hora sexta, minuto 46 & 47, duas vehementes concussiones, cum titubatione.

13 Hora 8, minuto 20, notabilem concussionem, cum vehemente titubatione, 8 minuta durante.

14 Hora 10, vehementem tremorem, cum pertinace & vehemente titubatione. Tremorem debilem, qui a 12 hujus Mensis die constanter duravit, & etiam hoc toto die sine intermissione.

Barometrum, ventus & tempestas in eodem gr.

15 Die Jovis, 16 Maii, ab hora quinta matutina usque ad 15 minutum horæ sequentis, quinque aut sex vehementes concussiones. Minuto 37, vehementem tremorem cum trepidatione parietum.

16 Minuto 46, concussionem vehementem, cum tremore & trepidatione.

17 Post meridiem, imprimis paulo ante horam 4, usque ad horam 5 & ultra, complures & vehementes concussiones cum tremore & trepidatione.

Barometrum descendit, usque ad horam 2 pomerid. ad gradum 14.

Cœlum incipit esse nubilum.

Versus horam 4, barometrum descendit ad gradum 13.

a S. SW. & W. tres apparent tempestates.

Cœlum incipit esse serenum, hora 8 pomerid.

Noctu, cœlo sereno fulgurat a SW. & WSW.

18 Die Veneris, 17 Maii, hora 5 matutina usque ad 6, concussiones frequentes & vehementes ut die præcedente.

19 Hora 8 antemeridiana, strepitum e longinquo, sequente tremore vehemente cum trepidatione.

20 Post quinque minuta, similes strepitus, tremores ac trepidationes, qui sæpius repetiti durarunt minimum 15 minuta.

Barometrum in eod. gr.

Cœlum subnubilum, nubes a SW.

Hora 8 antemer. tonitru, tempestas, pluvia.

Versus horam 9 cessat pluvia.

Hora 9 nocturna, minuto 45, meteoron ignitum. Vide infra observatione quinta.

21 Die Saturni 18 Maii, mane, ab hora 5 usque ad horam 6, complures concussiones atque tremores.

22 Hora nona, quosdam tremores vehementes.

23 Hora 9 nocturna, minuto 45, Terræmotum terribilem cum fragore & tonitru subterraneo conjunctum, ab occasu & libe, cum concussione domuum vehementissima, quæ omnes terrore haud exiguo affecit. Duravit ista concussio in maximo suo vigore, minimum 3 vel 4 minuta; eratque ad sensum multo vehementior ea, quæ hora 2 & 3 pomeridiana, diei 11, contigit.

24 Inter horam 10 & 11, tremores quosdam notabiles: hora 10, minuto 45 circiter, vehementem impetum perpendicularem cum fragore subterraneo, quem secutus est sonitus hujusmodi, ac si solum sub pedibus nostris esset fornicatum.

25 Ultra 40 minuta post horam 11, vehementior adhuc tremor Terræ productus a duobus impulsibus perpendicularibus se invicem secutis, cum fragore veluti Tormenti bellici vehementer tonante, & hujusmodi sono, ac si antrum spatiosissimum esset sub pedibus nostris.

26 Ab hora 12, usque ad 1, frequentes tremores notabiles.

Hora 2 antemer. W, cœlum nubibus magis tegitur.

27 Die Solis, 19 Maii, paulo ante horam primam matutinam, vehementes soli concussiones, debiliores tamen iis, quas duabus horis præcedentibus, circiter

Hora

Hora 4 *antemer. nubes sparsæ in horizonte. Aurora.*

Barometrum 14 *grad.*

Ante meridiem, post horam 7, *ventus validus. Frigor notabilis.*

Ab hora 11, *cœlum magis nubilum, S & SO. In meridie, ab hora* 12 *ad* 1, *æstus vehemens, mox rursus aër frigidus. Omnibus horis pomerid. W, & SW.*

circiter decima & duodecima, senseramus.

28 Versus horam tertiam, vehementem Terræ motum, cum concussionibus & tremoribus.

29 Quibusdam minutis ante horam quartam, duos vehementes impetus perpendiculares, se invicem immediate sequentes, cum fragore tormenti bellici in distantia mediocri displosi.

30 Hora 6, 40 & aliquot minutis, duas concus-
31 siones terribiles se invicem excipientes. Deinde, minuto sequente, tertiam concussionem, cum tremore & trepidatione pertinace.

32 Post horam 12 meridianam, vehementem impetum perpendicularem, cum fragore tormenti displosi.

33 Iteratum & multiplicem impulsum & concussionem, cum multiplice fragore & crepitu.

34 Hodiernus fragor, ab hora 6 usque ad præsens tempus, videtur, judicio aurium, procedere a Notapeliote, sive ab Euroaustro.

35 Hora prima pomeridiana, sensimus iterum fragorem tormenti & concussionem vehementem ab Euroaustro.

36 Hora duodecima, minuto 30, vehementem concussionem.

37 Hora prima, minuto 30, fragorem tormenti cum concussione ab Euroaustro.

38 Hora 2, minuto 15, fragorem tormenti cum concussione ab Euroaustro.

39 Aliquot minutis post horam tertiam, concussionem absque fragore notabili. Eodem die didicimus aliquos caminos nocte præterita damnum cepisse, & quosdam parietes *cratitios*, ligno & lapidibus interpositis confectos, & calce illitos, solvi cœpisse. Impetus horæ 12 noctis præteritæ concutiebat speculam excubitoris ante arcem. Impetus vero immediate sequens excubitorem, e specula hacce metu ruinæ exsilientem, in terram prosternebat, ita ut semianimis ad contubernales deportaretur. Specula, licet satis ponderosa, corruebat; ita ut plures asseres e tecto deciderent.

Excubiæ Portæ Linkhemiensis & Durlacensis in parietem projiciebantur.

Barometrum 13 grad. W. & SW. Aurora, cælum nubibus sparsis obductum, versus SW, tenues & atræ nubes tempestatem minantes. Aër obscuratur a nubibus spissis; versus horam 8, pluvia exigua; post horam 8, cælum subserenum; versus horam 9, cælum redditur serenum.

Versus horam 12 merid. Barom. $12\frac{1}{2}$ grad. Aër frigidus. Soles ardentes. SW & W.

Versus horam 1, Barometrum 12 grad.

Versus horam 4, Barom. $11\frac{3}{4}$ grad.

Versus horam 7 pom. Barom. 11 grad.

SW & W pergit.

Cælum nubibus obductum, ventus validus, quandoque fulgures. Hora 11 & 12 nocturna, imber & caligo. Post horam 12, cessat pluvia.

40 Die Lunæ, 20 Maii, hora prima antemeridiana usque ad horam duodecimam, sensimus quosdam tremores notabiles.

41 Post horam septimam antemeridianam, fragorem tonitrus, raucum quidem, sed vehementem ab Africo, & e longinquo venientem, cum concussione domuum.

42 Paulo ante horam decimam, impetum vehementem cum fragore tormenti e longinquo & ab Africo venientem, atque concussionem domuum & soli.

43 Quibusdam minutis post horam 10, similem impulsum, cum vehemente tremore Terræ.

44 Minuto 45 post horam 10, mediocrem impulsum & concussionem.

45 Hora 10 nocturna, minuto 30, tremorem cum trepidatione.

Barometrum 11 grad. SW, & W. Fulgor notabilis. Mane Sol per vices intercurrens.

Post meridiem 2 --- 3, tempestas valde nubila, pluvia tempestatem annuntians. Hora 3, aër a nubibus valde obscuratus. Ante Solis occasum Iris; crepusculum in horizonte occiduo, instar incendii ingentis; præterea pluvia, quæ demum post horam decimam cessavit.

Post mediam noctem tonitru.

46 Die Martis, 21 Maii, hora 2 matutina, Terræ motum cum trepidatione & titubatione.

47 Die

Barometrum 11 grad.

Ventus in eodem, frigor, interdum pluvia. Montes, ab occidente meridie usque ad orientem, vaporant modo insolito, ac si ingentes fornaces ibi fumarent. Post meridiem, cessatio pluviæ, malacia.

47 Die Mercurii 22 Maii, ab hora prima
48 matutina usque ad horam tertiam, succes-
49 sive quatuor Terræ motus mediocres, cum
50 tremore & trepidatione conclavium & lectorum.

51 Hora 10 nocturna, 40 & aliquot minutis, notabilem Terræ motum, qui 4 minuta duravit, in unica serie, cum mediocri trepidatione & titubatione; ita ut nonnulli hanc ob rem e domibus voluerint aufugere.

Barom. 11 ½ grad.

Ventus in eodem. Cælum valde nubilum & perquam nebulosum; pluvia generalis; e montibus surgunt plurimi vapores spissi in altum. Pluvia copiosa usque ad noctem.

Ante occasum Solis nubes moventur a S O versus N W, a N W versus S O, & a N O versus S W, & a S W versus N O. Sol per vices intercurrens, crepusculum.

Ventus similiter a SW versus NO, a NO ad S W, &c.

52 Die Jovis, 23 Maii, hora 12 pomeridiana, impulsum notabilem & trepidationem soli.

53 Hora 3 & 5, Terræ motum debilem.

Barom. 12 grad. Tempestas nubila, N O. Turbines procellosi. Nubes a N O versus S W, & ab N W versus S O. Montes iterum vehementer fumant. Pluvia spissa & nebulosa.

Hora 4 pomer. Barom. 13 ½ grad. Malacia. Cælum nubilum absque pluvia.

54 Die Veneris, 24 Maii, hora 2 matutina, vehementem impulsum & fragorem, cum concussione conclavium & lectorum.

Barom. 14 grad.

S W, ab occasu per septentrionem, usque ad S O, nubes tenues

55 Die Saturni, 25 Maii, hora 6 matutina, minuto circiter 45, impulsum perpendicularem & vehementem e locis inferioribus, cum

tenues & sparsæ. Sol per vices intercurrens. Deinde a SO ad W, Nubes pluviosæ. Post horam 7, turbines procellosæ sed cito transeuntes.

cum sequente trepidatione & titubatione quatuor circiter minuta durante.

Versus horam 9, NW, nubes pluviosæ, quæ movebantur a NW versus SO.

Versus horam 11, N a N versus S, moventur nubes, pluvia larga & continua.

Sub vesperam tempestas valde nubilosa. Pluvia durans per integram noctem, cum aere procelloso.

Hodie tempestas aliquantum magis calida.

56 Hora 6, minuto circiter 40, vehementem impulsum, cum trepidatione & titubatione.

57 Hora 8, frequentem & vehementem trepidationem & titubationem.

58 Hora 9, minuto 15, impulsum notabilem & concussionem, aliquot minutis postea redeuntem.

59 Hora 4 pomeridiana, minuto 30, tremorem subterraneum & notabilem perquam frequentem; & quandoque huc illuc trepidantem.

60 Hora 5, tremorem notabilem.

Barometr. in eodem gr.

Hora 10, Barom. 14 ½ grad.

Mane, ante horam 1, ventus validus & procellosus, indesinenter usque ad ortum Solis, post ortum Solis pluvia larga, pergit ventus procellosus. Boreas. Nubes, Lumen boreale.

Frigor ingens. Tempestas nebulosa, montes nebulis spissis & caliginosis obducti.

Post meridiem pluvia larga & generalis, quæ post horam 10 pomerid. cessat aliquantulum, & brevi postea rursus incipit, & pergit usque ad tempus matutinum sequens.

Hora 9 & 10 nocturna, in montibus nebulæ spissæ & caliginosæ, cum coruscationibus subobscuris.

61 Die Solis, 26 Maii, hora 1 antemeridiana, minuto 30, Terræ motum, cum vehemente trepidatione & procelloso turbine.

62 Hora 7 matutina, Terræ motum cum trepidatione.

63 Hora 6 pomeridiana, impulsum perpendicularem cum fragore rauco.

64 Hora 8 nocturna, impulsum perpendicularem & vehementem, cum fragore rauco.

65 Deinde, post minutum dimidium, alterum, sed paulo debiliorem.

Barome-

66 Die

66 Die Lunæ, 27 Maii, hora ſecunda pomeridiana, impulſum perpendicularem cum tremore.

Barometrum in eodem grad.
W a S. ſive Meſolibonotus.
Pluvia generalis, nubes valde obſcuræ, nebula ſpiſſa, imber perpetuus per totam noctem, montes modo inſolito fumantes.

67 Die Martis, 28 Maii, hora 2 matutina, Terræ motum, cum tremore & trepidatione, abſque tamen fragore, circiter 8 vel 10 minuta durantem.

Barometr. 15 *grad.*
Boreas.
Hora 8 *Baromet.* 15 $\frac{1}{4}$ *grad.*
Hora 9, *Barom.* 16 *grad.*
Hora 12, *Barom.* 16 $\frac{1}{2}$ *grad.*
Hora 1, *Barom.* 17 *grad.*
Toto tempore antemer. montes nebulis & vaporibus adeo fumantes, ut prorſus non potuerint conſpici.
Mane verſus horam ſextam, adhuc parum pluviæ; quæ deinde ceſſat uſque ad horam 7: *poſtea pluvia larga, cum nebulis, per totum tempus antemerid.*
Poſt horam 9, *SW.*
Poſt meridiem, Boreas, pluvia ceſſat; ante Solis occaſum, cælum fit aliquantiſper ſerenum. Noctu, nubes ſparſæ cum ſtellis intermicantibus.
Major æſtus, quam diebus præcedentibus.

Horum Terræ motuum vehementiſſimi fuerunt illi, quos experti ſumus die 11 Maii, hora 2 pomeridiana, minuto 30; die 18 Maii, hora nona pomeridiana, minuto 45; deinde hora 11, min. 45.

His proxime accedunt quos ſenſimus die 11 Maii, hora 4 matutina; eodem, hora 12 pomeridiana; die 12 Maii; die 14 Maii, hora 2 matutina; die 15 Maii, hora 3 matutina, minuto 45; die 18 Maii, hora 10 pomeridiana, minuto 45; die 19 Maii hora o matutina, 40 & aliquot minutis; horis itidem, 3; 4; 6; 12; & 12 minuto 15, matutinis; & 1; 1, 30 minuto, 2; 15 minuto veſpertinis. His autem adhuc debiliores erant reliqui ſupra memorati.

Præter

Præter hos impulsus & concussiones, admodum notabiles in campo etiam aperto, toto hoc tempore,[1] usque ad 26 Maii, facillime sentiri potuerunt perpetui tremores, trepidationes & titubationes: deinde etiam impulsus & strepitus debiliores satis frequentes.

Cæterum die 17 Maii, post meridiem, ab hora sexta usque ad noctem; die 20 ejusdem, ab hora prima matutina usque ad horam quintam, ab hora 11 antemeridiana usque ad horam 10 nocturnam, solum valde adhuc erat quietum, si paucos tremores debiliores excipias. Econtrario senseramus iterum molestiam tanto majorem, ob frequentiores tremores & concussiones, quibus a die 21 usque ad diem 26, fuimus obnoxii.

OBSERVATIONES

Hac occasione facta.

In omnibus hisce, tam vehementioribus concussionibus, quam debilioribus tremoribus Terræ, omnes galli urbani & agrestes, interdiu & noctu, semper multo quam solent vehementius cecinerunt. Plurimæ etiam gallinæ hujusmodi ediderunt cantum, ac si omnes in gallos fuissent mutatæ. In concussionibus autem vehementioribus, hæ aves celerrime ad se invicem accesserunt, ac si quam-maxime fuissent perterritæ. Unde colligi potest, solum toties peculiares vapores exhalasse, quoties fuit concussum; qui has aves peculiari affecerint sensatione, iisque occasionem ita canendi subministraverint.

2°. Postquam Terræ motus ab initio jam tres dies duravisset, calor desiisset & aër jam satis refrixisset; tam hic in Urbe, quam in agro, observatum fuit, lac vaccinum, noctu emulsum, mane sequente in optimis cellis acorem contraxisse, etiamque coagulatum fuisse, si quis illud fervefecerit, ut in tempestatibus solet coagulari.

3°. Homines fide digni, & alieni ab omni superstitione, digitis solo infixis, calorem peculiarem & tam insolitum senserunt, ac si illud aqua bulliente tinctum fuisset; quamvis hoc experimentum tum demum tentaverint, postquam Terræ motus jam diu duravit, & jam aër cepit esse pluviosus & frigidus.

4°. Complures, qui aurem noctu solo admoverunt, in eoque sæpius ultra quadrantem horæ perstiterunt, hujusmodi strepitum audiverunt, ac si magna aquæ copia in gremio Terræ perpetuo coqueretur & ebulliret.

5°. Homines fide digni, tres septimanas ante initium Terræ motus, versus hypophænicem diutissime ignem viderunt, quem ab initio ignem terres-

terrestrem crediderunt, sed post attentam & accuratam observationem deprehenderunt, illum fuisse phænomenon in nubibus procul a terra remotis apparens.

Custos agrestis *Cillensfeldii*, ita dicti, hora non prorsus dimidia versus Euro austrum hinc dissiti, nomine DAUSIG, vir honestus & fide dignus, affirmat, se, die 18 Maii, & ut conjiciebat, paulo ante horam 10 nocturnam, quercui innixum, vultu trans *Carolo-Hesychium*, *Landaviam* versus, sive Mesargestem directo, animadvertisse ignem, minimum 15 pedes longum & latum, vehementissime radiare; unde conjecerit, incendium ortum esse *Carolo-Hesychii*, & postquam, ut aiebat, hoc phænomenon tamdiu viderit, ut interea Oratio Dominica commode potuerit bis recitari, illudque *Landaviam* versus, id est, ab ortu in occasum progredi observasset, sibi visum fuisse, se una cum quercu in altum tolli, & una cum illo rursus in terram decidere; quam primum autem, post concussionem hanc violentam & inde ortum terrorem, ad se redierit, & supradictum ignem diutius voluerit observare, illum jam prorsus disparuisse.

6°. Quamvis eruptiones notabiles & vehementes horum Terræ motuum non stricte & accurate eadem hora diei redierint; nihilominus tamen ex hac mea vera narratione apparebit, eos ordinem quendam horarum diei observasse; nempe, ante meridiem circiter ab hora tertia usque ad 7 aut 8, post meridiem ab hora 12 usque ad horam tertiam vel quartam, & tandem noctu ab hora 9 usque ad horam 12.

7°. Tandem *Ulma* accepimus, auctore Viro honesto & prænobili, Terræ motum ibi quidem observatum esse valde exiguum, verum Ulmenses quotidie fere tempestatibus fuisse territos.

Tempus præterlapsum & negotia urgentia mihi nullum relinquunt otium plura notandi. Hoc tantum paucis addere volui, me usum esse Barometro communi, cujus hæc est divisio.

a	1	usque ad	4	gradum inclusive :	Procellæ.
a	5	— — —	8	— — —	Pluvia larga.
a	9	— — —	12	— — —	Pluvia & Ventus.
a	13	— — —	16	— — —	Tempestas variabilis.
a	17	— — —	20	— — —	Cœlum serenum.
a	21	— — —	24	— — —	Serenitas constans.
a	25	— — —	28	— — —	Valde siccum.

I I I.

Ad praecedentes litteras & narrationem D^ni^. Textoris *Responsio.*

Vir Nobilissime & Celeberrime, Domine & Fautor honoratissime, aestumatissime.

Litteræ Tuæ gravissimæ, die 28 Maii exaratæ, die 4 hujus mensis ad me pervenerunt, una cum Relatione prolixa & cognitu jucunda multiplicium Terræ motuum quos, intra 15 aut 16 dies, *Carolo-Hesychii* & in vicinia sensistis.

Ante omnia gratias Tibi habeo, quantas possum, pro communicatione hujus relationis; deinde veniam rogo, *Vir Nobilissime & Celeberrime*, quod ad humanissimas litteras Tuas non statim respondi. Cujus rei causa est, non tam multitudo negotiorum meorum, quam imbecillitas corporis mihi a morbo gravissimo relicta, quem hoc vere fui perpessus; & quo præcipue trepidatio manuum mearum, qua jam a multis annis laboravi, adeo invaluit, ut difficulter calamum scriptorium regere potuerim.

Admiratione dignum utique est, quod talis regio, qualis Vestra est, ubi concussiones Terræ sunt rarissimæ, ut probe animadvertis, *Vir Nobilissime & Clarissime*, jam brevi adeo tempore a pluribus hujusmodi terribilibus casibus subito obruta & perturbata sit; adeo ut amænissimum *Carolo-Hesychium* (hoc saltem tempore) suo nomine haudquaquam responderit, sed summo jure vocari possit *Carol-Anesychium*.

Ex omnibus hisce Terræ motibus, in Urbe nostra nonnisi duos sumus experti. Nempe 11 Maii, hora tertia pomeridiana, secundum nostrum numerandi modum, & deinde hora quinta matutina diei sequentis, quorum uterque nihilominus tam debilis fuit, ut paucissimi homines eos animadverterint vel senserint, etsi posterior aliquantulum fortior fuerit priore.

Argen-

Argentorato mihi ſcriptum eſt, eaſdem binas concuſſiones ibi paulo majore impetu vim ſuam exeruiſſe. Unde conjicio originem ipſarum *Argentinenſibus* propiorem fuiſſe quam *Baſileenſibus*, & *Carolo-Heſychianis* adhuc propiorem quam *Argentinenſibus*.

Concludo tamen primam hujus veſtri continui Terræ motus cauſam, ubicunque primum ſortita fuerit effectum, non adeo violentam fuiſſe; cum illius effectus, quantumquidem notum eſt, ſe non in regiones remotas extenderit, ut ſæpe fieri ſolet, & ut præſertim in eo eſt obſervatum quem, circiter ante quinque vel ſex annos, hora ſexta pomeridiana, ſenſimus, quique ſe extendit a confiniis *Poloniæ* uſque ad *Montes Pyrenæos*.

Anno proxime præterito, die 12 Junii, paulo ante horam octavam pomeridianam, Terræ motum valde fortem experti quoque ſumus per totam *Helvetiam* & loca vicina, qui nullo quidem damno notabiliore nos affecit, præterquam quod aliquos caminos dejecit, & aliquas murorum fiſſuras produxit. In quibuſdam locis Terræ motus ſunt multo frequentiores quam in aliis; præſertim in regionibus *Italiæ* & *Siciliæ*, haud procul diſſitis a montibus ignivomis *Veſuvio* & *Ætna*, quemadmodum etiam, ante annos circiter octo vel decem, Urbs Siculorum *Panormus* Terræ motu vehementiſſimo fere prorſus fuit everſa, & in ea deleta fuerunt multa hominum millia; qui partim miſerrime conquaſſati, partim vero prorſus a Terra abſorpti fuerunt.

Etiam Urbs noſtra *Baſilea* huic malo quandoque fuit obnoxia, præſertim antiquis temporibus; quippe, anno 1356, duæ tertiæ Urbis partes Terræ motu horribiliſſimo fuerunt everſæ, & magna etiam pars flammis exortis in cineres abiit.

In vaſtiſſima *Americæ* regione *Peruviana*, & cum primis in illius Metropoli, Terræ motus tam ſunt frequentes, ut rariſſime dies præterlabatur, quo non aliquæ ſentiantur concuſſiones; unde etiam omnia ejus ædificia perquam humilia & ſolida ſolent exſtrui.

Quod itaque attinet ad cauſam unde hi tam prodigioſi effectus oriuntur; vellem certe lubentiſſime deſiderio Sereniſſimi &

Gratiosissimi Principis per omnia satisfacere, si hoc ullo modo fieri posset.

Ut tamen nihilominus generales meas conjecturas Ipsi ea, qua decet, reverentia aperiam, sequentia breviter notabo.

1°. Circumstantiæ, quarum in recensione Tua mentionem facis, *Vir Nobilissime & Celeberrime*, abunde evincunt esse plurimas cavitates seu cryptas subterraneas; cum subinde dicas auditum esse fragorem subterraneum, qui hujusmodi sonum post se reliquerit, ac si solum esset fornicatum.

2°. Hinc itaque potest concludi, in spatiosis istis cavitatibus formari materiam inflammabilem; quæ si accenditur, magno impetu conatur erumpere, & Terram longe lateque concutit, instar cuniculi subterranei in loco munito, qui incensus dissilit, Terramque circumjacentem ita concutit, ut illius tremor ad aliquot milliarium distantiam quaquaversum possit sentiri.

3°. Hoc illis confirmatur Terræ motibus, qui in vicinia *Vesuvii*, *Ætnæ*, & reliquorum montium ignem eructantium oriuntur, & communiter tum incipiunt, cum novæ flammæ magno fragore & crepitu e montibus istis conantur erumpere. Tum enim concussiones atque tremores isti tam diu durant, donec ignis exitum liberrimum absque ullo impedimento sortitur. Considerandum etiam est in poris particularum, exempli gratia, nitri in pulvere pyrio contenti inclusum esse aërem quam-arctissime condensatum atque compressum; qui, cum pori admoto igne aperiuntur, subito erumpit, & conjunctis viribus, mediante vi sua elastica, fortissimos parietes cavitatum subterranearum penetrat atque disrumpit, [ut hoc etiam fieri solet, quando cuniculus subterraneus, vel saltem bomba dissilit] unde in regione circumjacente necessario concussio debet oriri, major vel minor, pro ratione quantitatis materiæ incensæ.

4°. Quam fortem & violentum autem effectum aër in poris coarctatus possit habere, si per illorum aperturam emittitur, ex eo fere potest concludi, quod vi aëris in sclopeto pneumatico vi humana condensati, si illud ejaculamur, globus tanta vi propellatur ut in 50 passuum distantia hominem occidere pos-

sit;

fit; quamvis non nisi decies aut duodecies densior reddi possit aëre externo & naturali.

5°. Quid jam non fiet, si aër in poris nitri, naturæ viribus, non decies tantum, sed & centies, imo millies & sæpius, condensatur plusquam aër naturalis, & ejus vis elastica in eadem augetur ratione; quemadmodum peculiari experimento demonstravi in Dissertatione mea *de effervescentia* *, quam, jam ante annos 47, edidi, cum essem adhuc juvenis.

6°. Si igitur hoc ut hypothesis stabilita conceditur, & porro supponitur sulphurem & nitrum in cryptis subterraneis naturaliter posse generari, ex quibus pulvere carbonario mixtis pulvis pyrius confici solet; facile apparet, post harum materiarum permixtionem, mediante unica ignis scintillula, [quæ oriri potest, si tantum unus silex in alterum incidit] hanc ita natam materiam illico capturam ignem, & terram superjacentem, instar cuniculi incensi, magna vi & fragore disrupturam, & ita longe lateque concussionem Terræ, sive Terræ motum producturam.

7°. Verum etiam fieri potest, ut materia inflammabilis in tam exigua copia adsit, & tam profunde jaceat, aut tanta mole terræ tegatur, ut realis ignis eruptio non sequatur; sed ut ignis multos cuniculos & fornices successive penetret, & tandem pedetentim per meatus terræ evaporet; unde non nisi tremores aut concussiones se invicem sequentes sentiuntur, & varii ignes fatui exhalationibus oriri debent: quod ais, *Vir Nobilissime & Clarissime*, apud Vos observatum esse.

8°. Si ingens adest materiæ copia, eaque ubique simul incenditur, ut fere fieri solet in incensione cuniculi subterranei, tunc necessario a subitanea disruptione soli circum circa terribilis Terræ motus oriri debet, qui unicam tantum, verum vehementissimam, concussionem producet, præcedentibus lentibus tremoribus destitutam; quia initium, medium, & finis hujus effectus unico veluti momento transeunt. Quod merito vocari potest subitanea & in summo gradu excitata effervescentia, quod

* N°. I. pag. 3. *Tom. I.*

in permixtione quorundam liquorum chymicorum apparet, veluti olei vitrioli cum oleo tartari, quorum effectus, quantumvis subitaneus, nequidem comparari potest cum eo quod observatur in fulguratione accensi pulveris pyrii.

9°. Quod si autem subitanea effervescentia casu quodam impeditur, ut hoc fit in præparatione pyroboli, vel cum solummodo pulvis pyrius humectatur & subigitur; tum ipsa materia per incensionem sensim consumetur; aër autem in poris inclusus & condensatus, de quo supra egi, se nihilominus exeret, quamvis lentius, & vehementi sua pressione & pulsu in parietes fornicum subterranearum, varios per aliquod tempus durantes tremores, concussiones, aliaque symptomata, ut apud Vos observasti, producere poterit; quæ autem profecto non tam periculosa erunt, quam unicus impetus, qui oritur ex incensione subitanea universæ, quæ adest, materiæ.

10°. Idem judicium est ferendum de omnibus fermentationibus in quacunque materia ortis; observabimus enim eam statim extendi, & majus spatium occupare, quamprimum incipit fermentescere; adeo ut, si alicubi inclusa est, magna vi exitum quærat; quod utique abunde apparet ex musto fermentescente, quod dolium etiam ferreis circulis circumdatum posset disrumpere, nisi in superiore parte superficiei dolii fieret apertura. Causa hujus vis supernaturalis, ut videtur, non nisi ex condensatione perquam violenta aëris oritur, qui ante initium fermentationis in poris particularum musti inclusus, postquam aperiuntur, erumpit & omni sua vi in assulas dolii ita agit, ut illud necessario disrumpi debeat; nisi aër, qui se dilatare conatur, per apertum spiramen exitum inveniat.

11°. In fermentationibus communiter ingens exoritur æstus, ob internum motum particularum in se invicem impingentium; ita ut materia, natura sua inflammabilis, sua sponte facillime in flammas abire possit; quemadmodum fænum demessum, quod, antequam prorsus siccum est & aridum, in horreum colligitur & coarctatur, sæpissime sponte in flammas abit & incendium gignit.

12°. Cele-

12°. Celebris Chymicus Dominus LEMERY edidit in ***Commentariis Academiæ Scientiarum Parisinis*** Anni 1700, pag. 101 & seqq. Dissertationem lectu dignam, cui titulus est: ***Explicatio physica & chymica Ignium subterraneorum, Terræ motuum, Ventorum furentium, Fulgurum & Tonitrus.*** In ea est sententia non tantum Terræ motus sed & reliqua meteora, quorum titulus meminit, una cum phænomenis & effectibus suis, oriri ex sulphure, qui sub terra generatur & ferro miscetur. Quomodo autem hoc re ipsa demonstrari, & ope præparationis artificiosæ ante oculos poni possit, sequenti docet descriptione.

13°. Sumit portionem limaturæ ferri, eamque miscet cum ingenti portione sulphuris in pulverem redacti, ex qua materia deinde, affusa copia aquæ sufficiente, pastam conficit, quam horis aliquot in digestione finit. Hæc sensim incipiet magno æstu fermentescere & intumescere, ac hinc inde aget rimas, ex quibus ascendent vapores, qui quidem tantum erunt calidi, quando mediocris tantum adest materiæ copia; sed qui in flammas erumpent, quando magna aderit, veluti cum pasta adhibetur triginta vel quadraginta librarum.

14°. Quamvis Auctor putat effectum hujus operationis in eo tantum consistere, quod particulæ acutæ sulphuris, violenta intrusione in particulas ferri, mutuam cum istis & vehementem attritionem, hincque magnum æstum producant; tamen, me judice, nodus nondum est solutus. Quamvis enim, mediante hac hypothesi, inflammatio aliquo modo potest explicari; nondum tamen apparet, unde intumescentia, vehemens impetus, exhalatio, aliaque symptomata oriantur; nisi dixero, hæc omnia præcipue oriri ex dimissione particularum martialium, quæ in poris inclusæ sunt & condensatæ, quando nimirum cuspidatæ & acutæ sulphuris particulæ poros aperiunt; ut jam supra in explicatione effectus pulveris pyrii ostendi: hac tamen differentia, quod particulæ sulphureæ hic agant in poros particularum nitrosarum, ibi autem in poros particularum martialium: ubi notandum, in his æque ac in illis aërem condensatum tamdiu-

con-

contineri, usque-dum per aperturam pororum libertatem adipiscitur magna vi erumpendi. Particulæ pulveris pyrii, quæ per se nullo motu gaudent, primum suum motum accipiunt ab igne exterius admoto, quem subitanea effervescentia statim sequitur; quare pulvis iste omnis dicto citius in aërem evolat. E contrario autem particulæ mixturæ Domini LEMERII, ob fluididitatem aquæ sensim sponte incipiunt moveri, & supradictæ fermentationi omnibusque reliquis effectibus hinc fluentibus dant ortum.

15°. Narrat, se aliquando in æstate massam quinquaginta librarum suæ mixturæ ingenti & profundo vasi immisisse, illudque linteo tectum in terram defodisse, postquam linteum luto duos pedes alto operuisset. Quo facto, post octo vel novem horas postea, observaverit quod solum inceperit intumescere, incalescere, rimas agere, sulphureosque & calidos vapores emittere, qui tandem in lucidas ignis flammas fuerint mutati, quæ actas rimas magis adhuc aperuerunt, & circa locum illum ubi vas erat defossum, flavum & atrum pulverem abjecerint: absoluta autem prorsus fermentatione, solum adhuc diu fuisse calidum: denique se, postquam materia refriguerit, reperisse quod nihil remanserit, præter pulverem nigrum & gravem, qui erat limatura martis jam libera a sulphure, quocum erat permixta.

16°. Ex omnibus hisce circumstantiis a semet observatis, ostendit Dominus LEMERI, quomodo, juxta hypothesin suam, non solum Terræ motus, verum etiam venti furentes, turbines, fulgura, tonitrua, fulmina, aliique hujusmodi effectus violenti possint oriri. Quamvis autem ejus methodus ratiocinandi mihi non per omnia placet, quandoquidem ex ratiociniis ejus minime potest ostendi, unde iste perquam violentus motus oriatur; nihilominus tamen experimentum illius modo memoratum pulcherrimum est, & aptissimum unde, ex hypothesi mea, causa probabilissima horum effectuum poterit doceri; imprimis vero causa Terræ motus, omniumque quæ ipsum comitantur circumstantiarum.

17°. Qua ratione autem hujusmodi mixtura, qualem Dominus

nus LEMERI confecit, a natura possit formari, non opus est pluribus demonstrare. Sufficit enim ingredientia hujus massæ, nempe sulphur & ferrum, magna copia gigni. Possunt itaque, dum generatur isthæc materia, effluvia aut vapores sulphuris, & scoriæ ferri subtilissimæ tanta copia permisceri, ut cuniculum subterraneum impleant, & postea, quando massa hæc permixta fit matura, facillime inflammari; unde necessario Terræ motus oriri debet, omnibus suis accidentibus terrore plenis junctus.

Quod, si jam mihi contingeret esse tam felici, ut hæ meæ simplices cogitationes desiderio Serenissimi & Gratiosissimi Principis possent satisfacere, maximo certe afficerer gaudio. Rogo Te itaque, *Vir Nobilissime & Celeberrime*, ut Serenissimum Principem velis reddere certiorem, quam devota mente Ipsum colam. Interea semper ero,

Vir Nobilissime & Celeberrime,

Basileæ die 19 Junii 1737.

Tibi Deditissimus
JOH. BERNOULLI
Doct. & Profess.

P. S.

Quod ais, *Vir Nobilissime & Celeberrime*, observatum fuisse, quod in omnibus Terræ concussionibus & tremoribus, tam interdiu quam noctu, galli urbani & agrestes, modo insolito, vehementissime cecinerint, imo quod & gallinæ multis in locis hujusmodi ediderint cantum, ac si omnes fuissent mutatæ in gallos; imo quod hæ aves, in concussionibus vehementissimis, celerrime ad se invicem accesserint, ac si quammaxime fuissent perterritæ; existimo hæc omnia subitanei terroris fuisse effectus, & sic minime, ut singulare quid, Terræ motui debere tribui: quoniam observamus idem illis accidere, quoties alias alio modo subito exhorrescunt & perterrefiunt, aut etiam quoties accipitrem quendam supervolantem deprehendunt; unde subitaneo

percelluntur terrore, & ad varios ſtrepitus & motiones impelluntur.

Quod porro notas, lac vaccinum noctu emulſum mane ſequente etiam in optimis cellis aceſcere; nulla alia utique hujus rei eſt cauſa, præter eam, quæ in tempeſtatibus horrendis eundem producit effectum. Tremor nimirum in lacte producit motum inteſtinum vehementiſſimum; unde oritur diſſolutio partium, & per conſequens diffluxus earundem, & acor, idque eo magis, quoniam æque in tonitru, ac in Terræ motu, multi vapores ſulphurei accedunt, qui acore præditi ſunt, ut ex corroſivitate ſpiritus ſuphuris ſufficienter apparet.

I V.

Dni. TEXTORIS *Reſponſio.*

Vir Nobiliſſime & Celeberrime, Honoratiſſime Domine Profeſſor; Patrone Colendiſſime,

JUdicium tuum de nupero Terræ motu Principi Sereniſſimo Domino meo clementiſſimo perplacuit, qui & affirmavit, ſibi a Te, *Vir Nobiliſſime & Celeberrime*, per omnia eſſe ſatisfactum, ſeque ex animo dolere, quod hac re tantopere fueris occupatus. Interea Te, per me, gratioſiſſime ſalutat, & certiorem reddit, ſe gratum ſuum animum proxima occaſione ipſo facto eſſe teſtaturum. . . . .
. . . .

Cæterum inſigni hac fruor voluptate, ut me favori Tuo inæſtimabili humillime commendare & ſumma veneratione perpetuo eſſe poſſim,

Vir Nobiliſſime & Celeberrime,

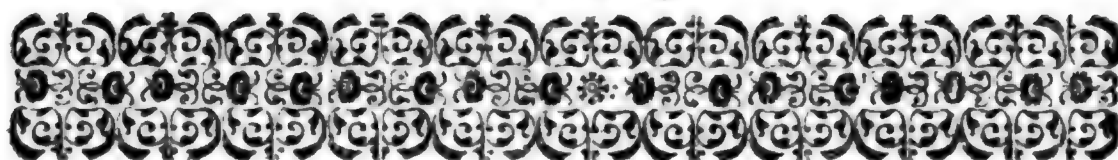
Tuus obſequioſiſſimus Servus

Carolo-Heſychii die 10 Julii 1737.

TEXTOR.

FINIS.

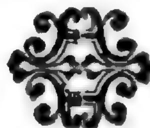
INDEX



INDEX NUMERORUM

Quos TOMUS QUARTUS *complectitur.*

De



INDEX

INDEX
RERUM NOTABILIORUM.

A

Æquatio

B

C

Curvatura

D

Densitas

E

Equa-

Fibres

G

Har-

H

I

Incom-

K

L

LEIB-

Lumen

Natura

N



O

Ofcill.

Proble-

Projecti-

S

T

Tour.

V

FINIS.





